

Introduction to Operations Research: Part 1

Roger Z. Ríos

Graduate Program in Electrical Engineering
Universidad Autónoma de Nuevo León

Selected Topics on Optimization Class

FIME / UANL

January 2024



Agenda

- Parte 1: ¿Qué es la Investigación de Operaciones?
- Parte 2: ¿Qué es un problema de optimización?
- Parte 3: ¿Cómo se resuelven los problemas de optimización?
- Parte 4: Áreas de investigación



¿Qué es la Investigación de Operaciones?

- Ciencia que brinda de **soporte científico a la toma de decisiones**
- Campo entre **matemáticas aplicadas y ciencias de la computación**
- Aplicaciones reales de tremendo impacto económico
- Evita el costosisímo ENSAYO y ERROR
- Colaboración multidisciplinaria

Aplicaciones Industriales

- **Transportación y logística:** cadena de abastecimiento, inventarios, fletes
- **Manufactura:** Secuenciación de operaciones, diseño
- **Aviación:** Asignación de vuelos y tripulaciones, determinación de tarifas, operaciones irregulares
- **Servicios:** Secuenciación de personal/turnos
- **Recursos naturales:** Gestión forestal, prevención de incendios, uso de agua, agricultura
- **Sector salud:** Localización de servicios médicos de emergencia, trasplantes renales cruzados

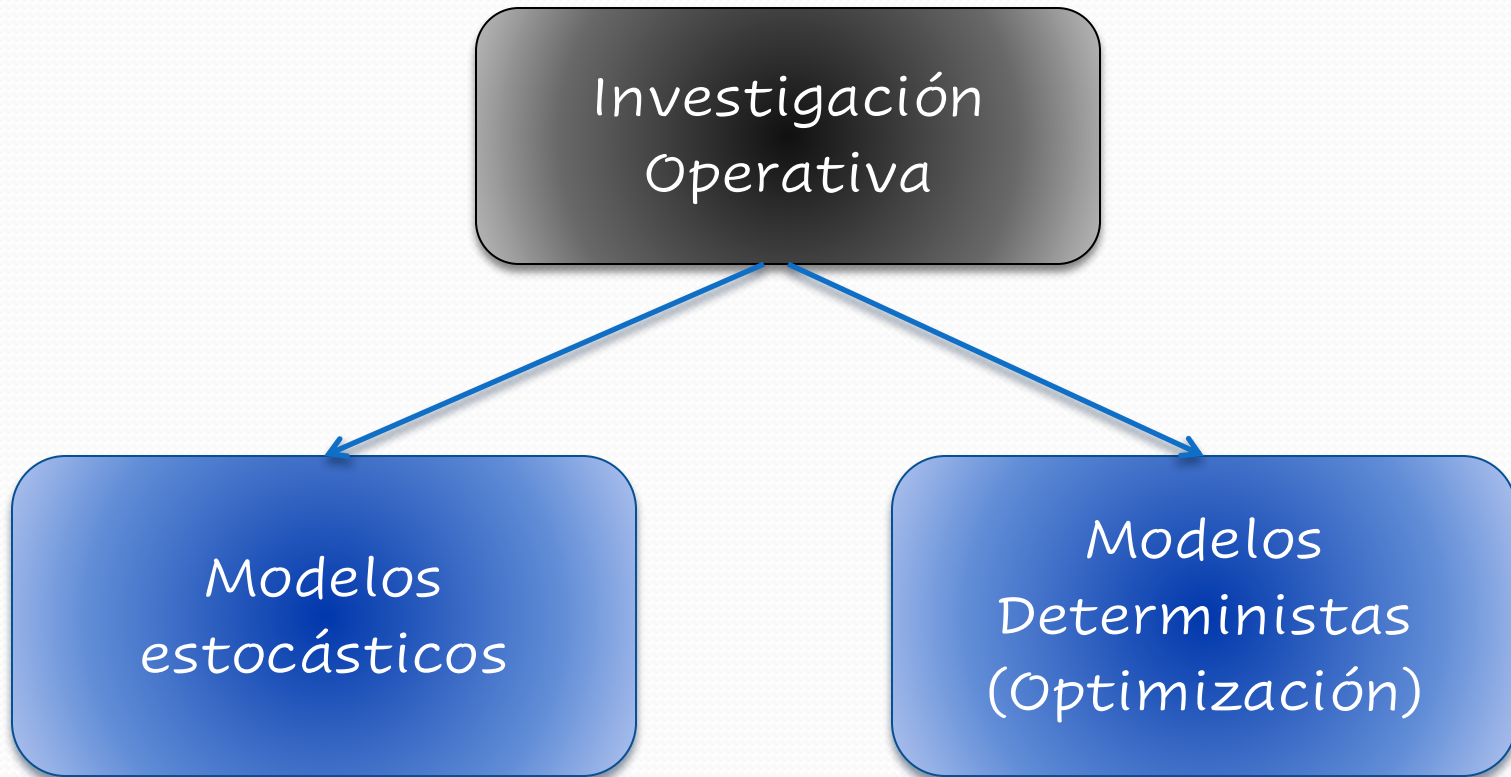
Importancia y Relevancia

- Aplicaciones en diversas áreas/ramas
- Decisiones avaladas científicamente
- Tremendo impacto económico / social

Metodología

- Modelaje matemático
- Análisis
- Derivación/desarrollo de método de solución
- Implementación computacional
- Evaluación experimental

Clasificación



Clasificación

Modelos
Deterministas
(Optimización)

Programación
lineal

Programación
entera

Programación no
lineal

Programación
dinámica

Optimización
combinatoria

etc., etc.

Problemas de Optimización

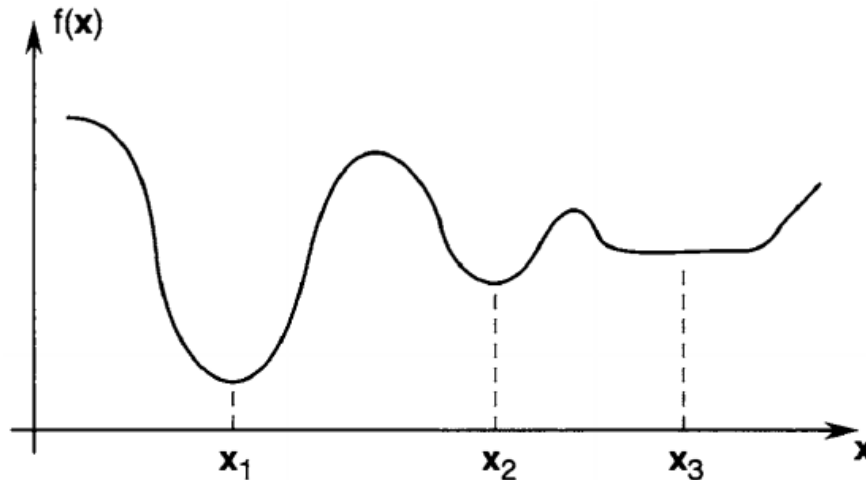
- **Características**

- Cada decisión tiene un “costo” o “beneficio”.
- Cada decisión NO es libre, esta sujeta a restricciones tecnológicas o requerimientos empresariales o del sistema.
- Se busca encontrar de entre TODAS las soluciones factibles, la que de el “mejor” rendimiento (valor óptimo de la función de desempeño).
- Son “difíciles” de resolver.

¿Qué es Optimización?

- **Optimización:** Disciplina de las matemáticas que involucra el encontrar (o buscar) puntos máximos y mínimos de funciones (de varias variables) sujetas a restricciones.
- Formalmente: Dado un vector de variables $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$
- Se busca:
 minimizar $z = f(x)$
 sujeta a: $g_i(x) \leq b_i \quad i = 1, \dots, m$
 x son variables continuas/enteras

Optimización



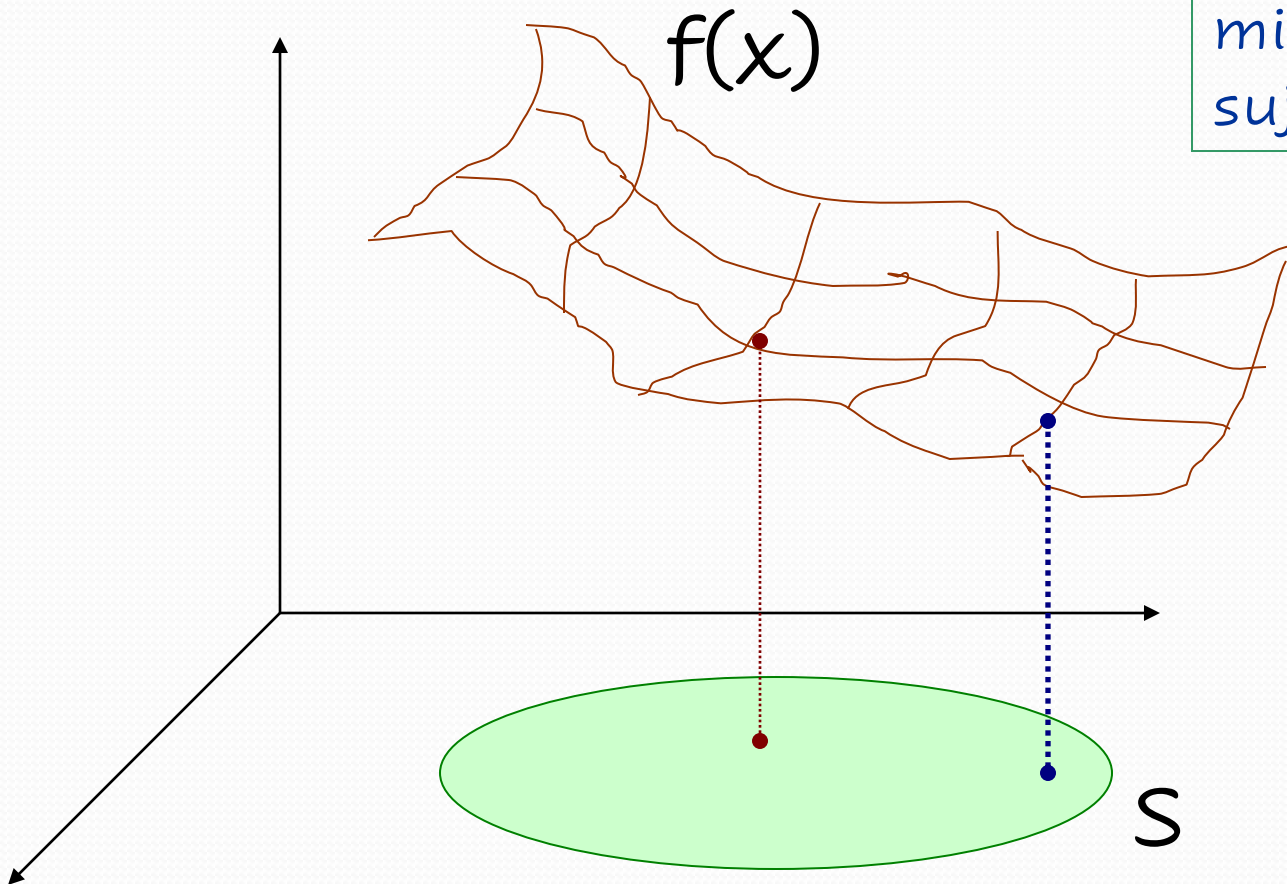
x_1 : mínimo global (estricto)

x_2 : mínimo local (estricto)

x_3 : mínimo local

Problema de Optimización

$$\begin{array}{l} \min f(x) \\ \text{sujeta a: } x \in S \end{array}$$



Tipos de Problemas

Variables / funciones	Lineales	No lineales
Continuas	LP	NLP
Enteras (discretas)	MILP	MINLP

LPs son "fáciles"

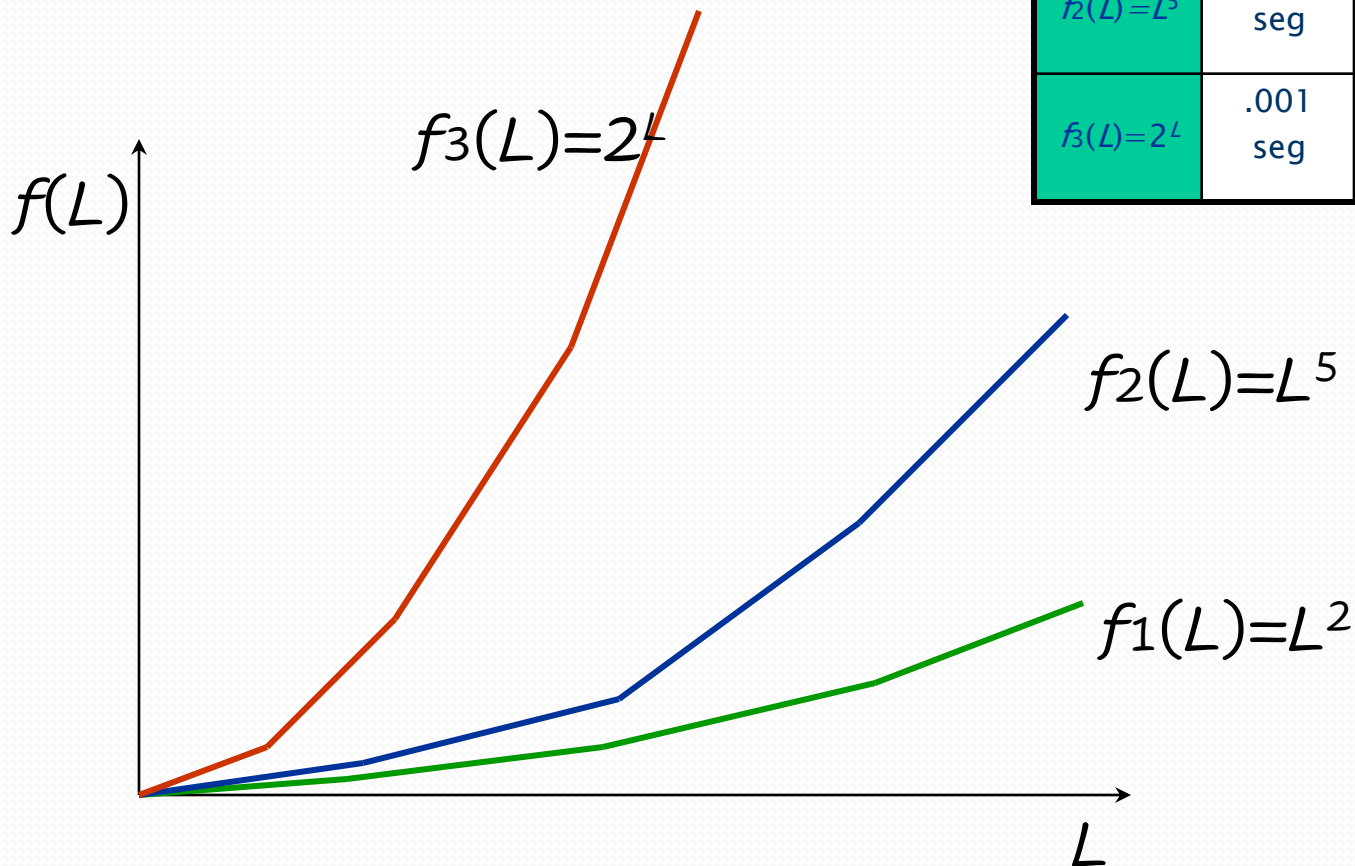
NLPs convexos son "fáciles"

NLPs no convexos son "difíciles"

MILPs son casi todos "difíciles"

MINLPs son casi todos "difíciles"

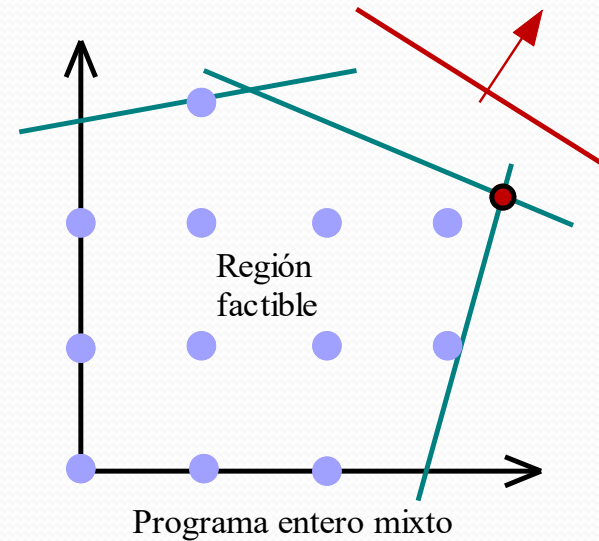
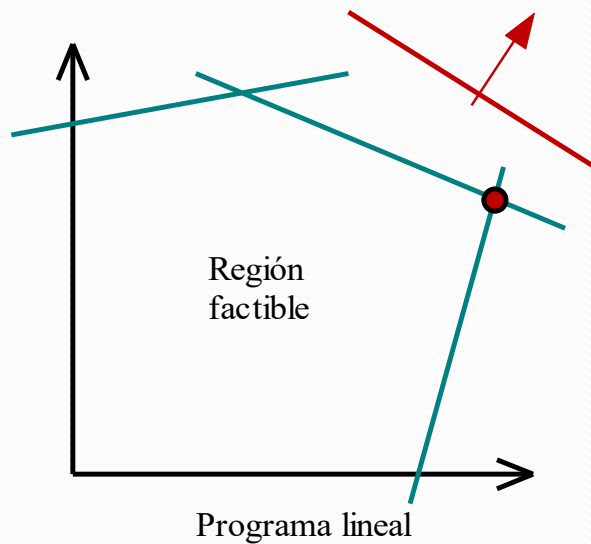
Complejidad Computacional: Problemas "fáciles" vs. "difíciles"



Tiempo de CPU (1 mflops/seg)			
$L =$	10	30	50
$f_1(L) = L^2$.0001 seg	.0009 seg	.0025 seg
$f_2(L) = L^5$.1 seg	24.3 seg	5.2 min
$f_3(L) = 2^L$.001 seg	17.9 min	35.7 años

Problemas “difíciles”: Caso de variables enteras

¿Porqué es difícil de resolver?



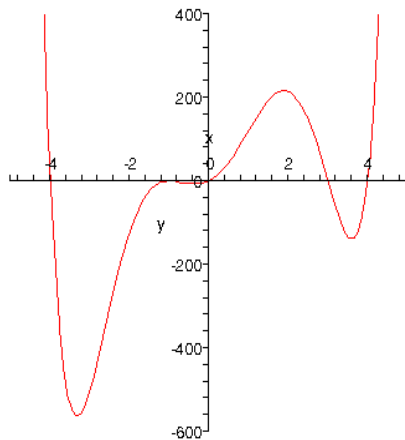
Problemas “difíciles”: Caso de variables continuas

¿Porqué es difícil de resolver?

Condiciones de optimalidad

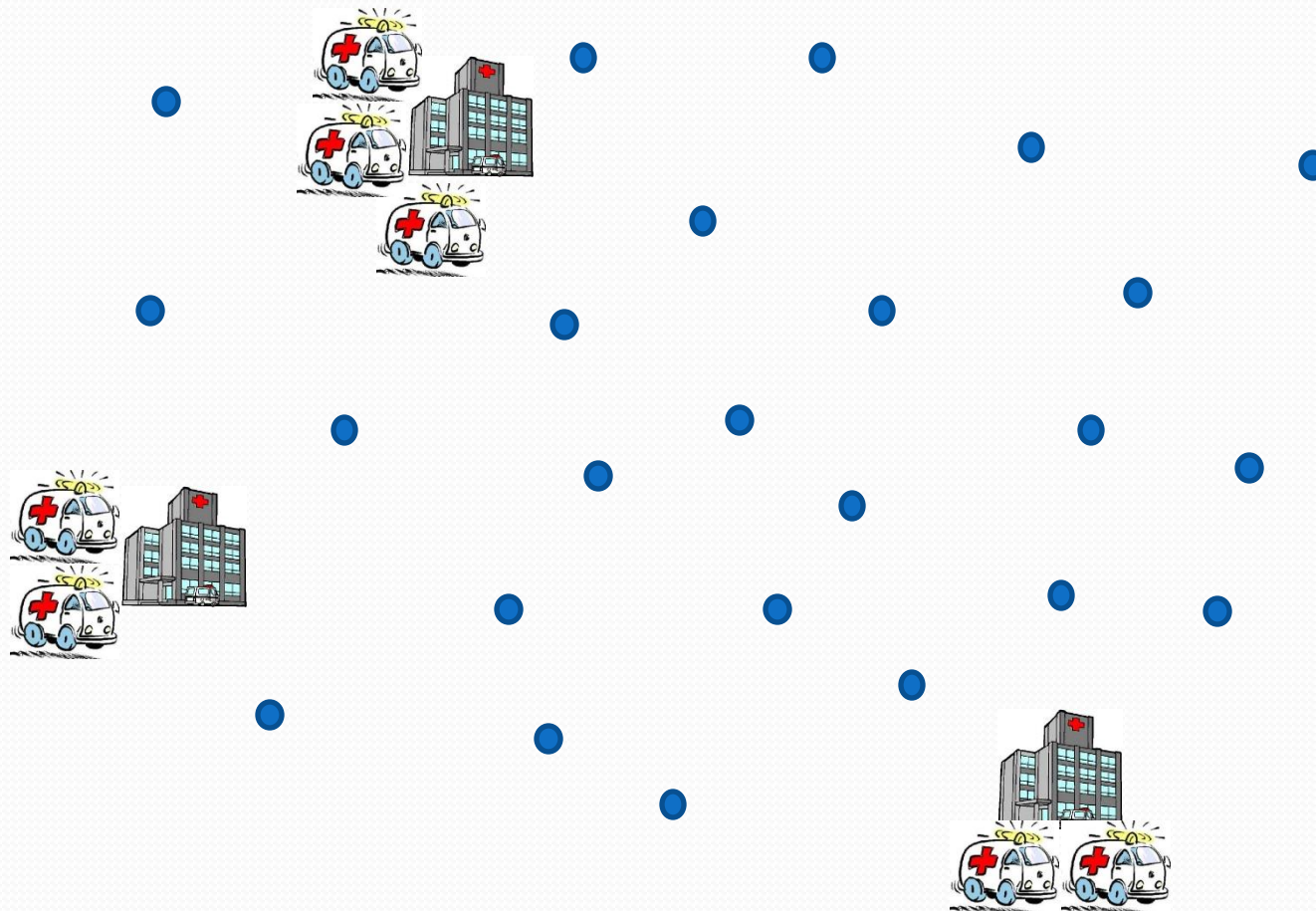
1er orden: $\nabla f(x^*) = 0$

2o orden: $H(x^*)$ debe ser positivo definido ($x^T H(x^*) x > 0$)

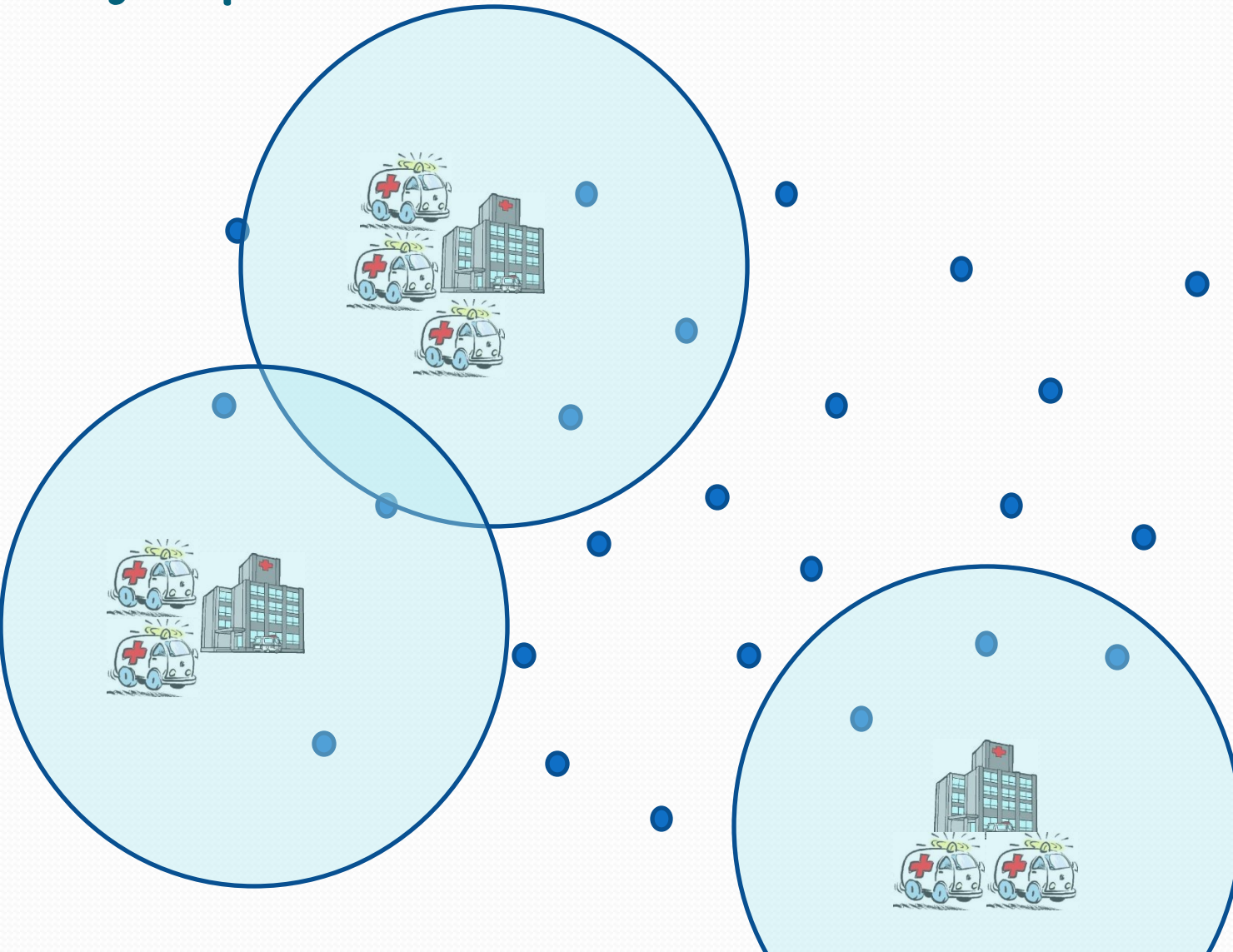


- Múltiples mínimos/máximos
- Problema no convexo
- Dimensión de x

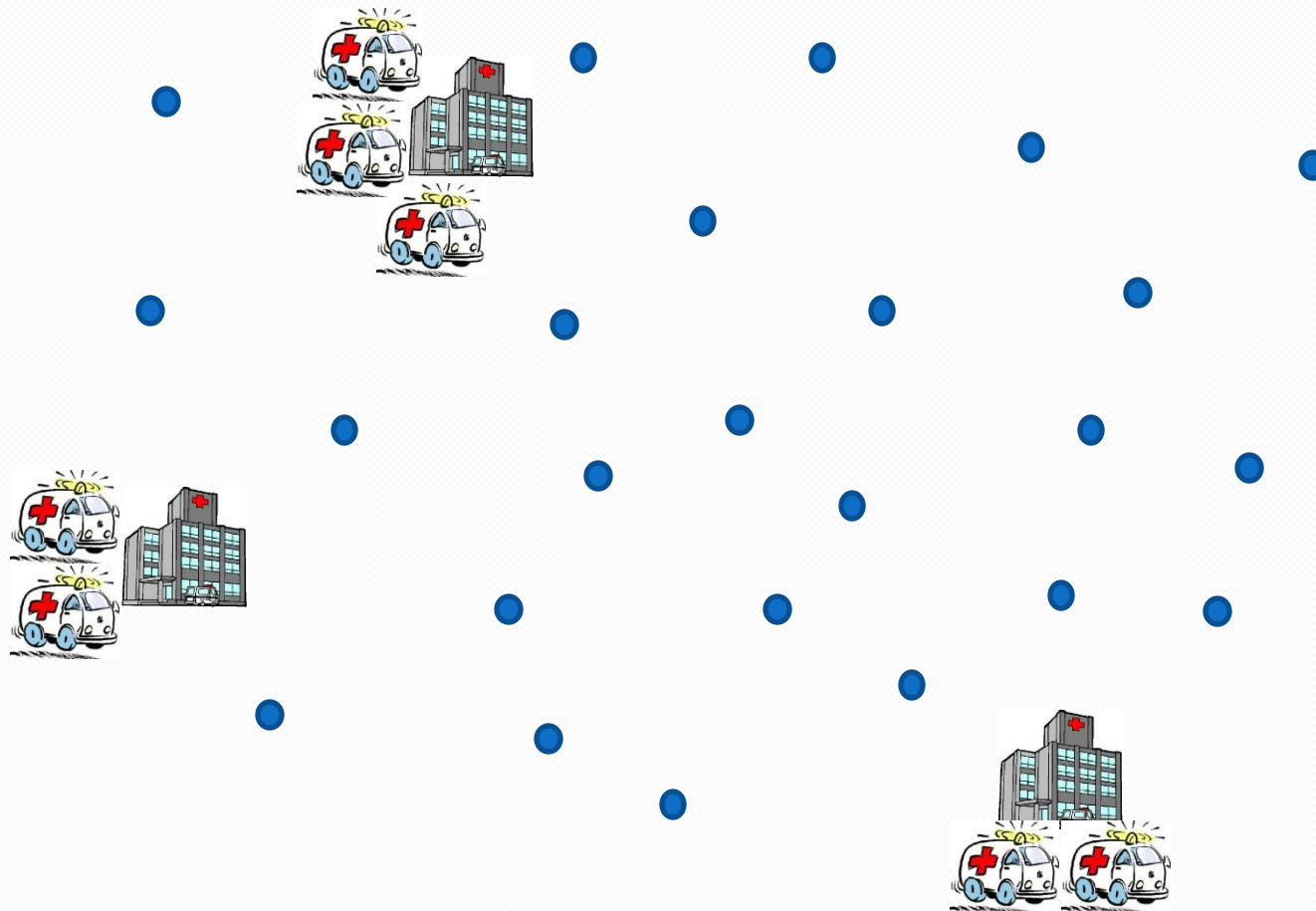
Ejemplo Problema Entero: Localización de ambulancias



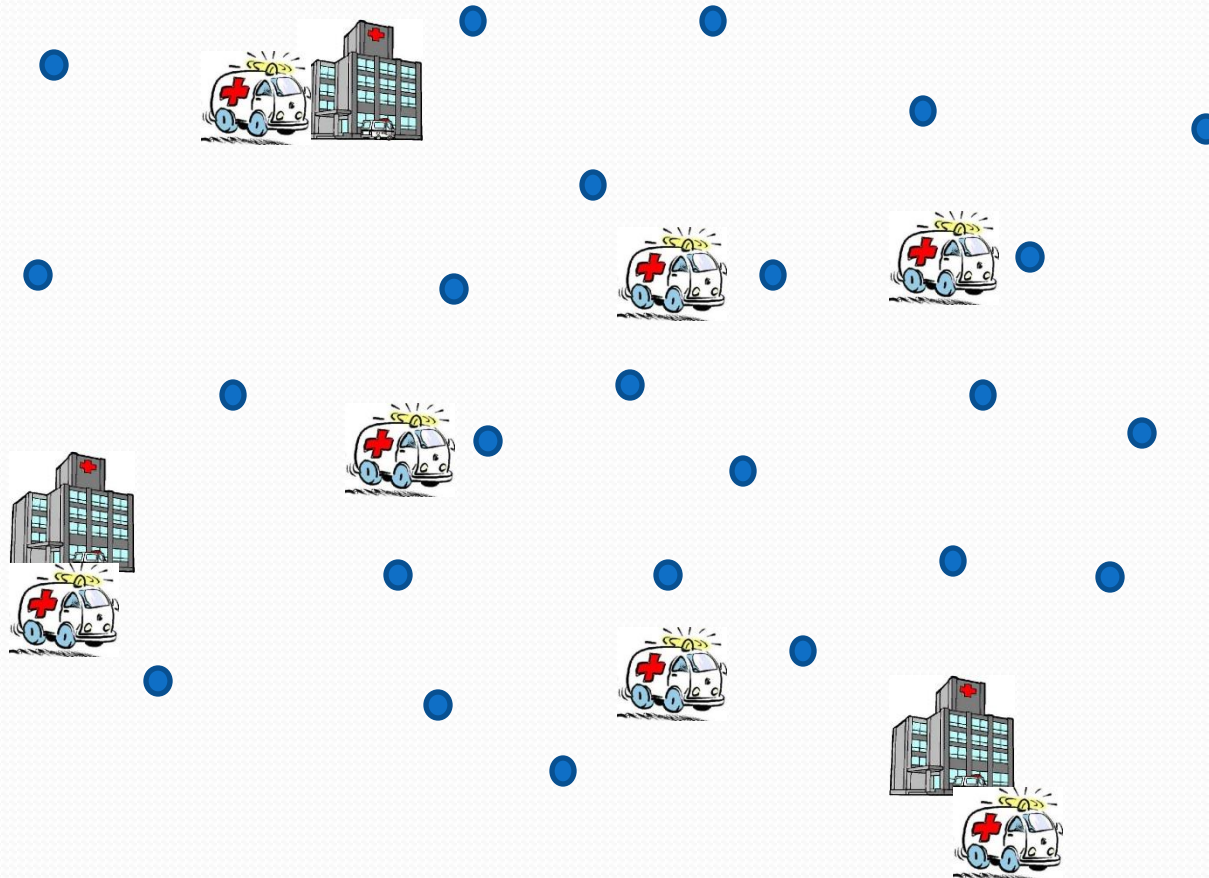
Ejemplo: Localización de ambulancias



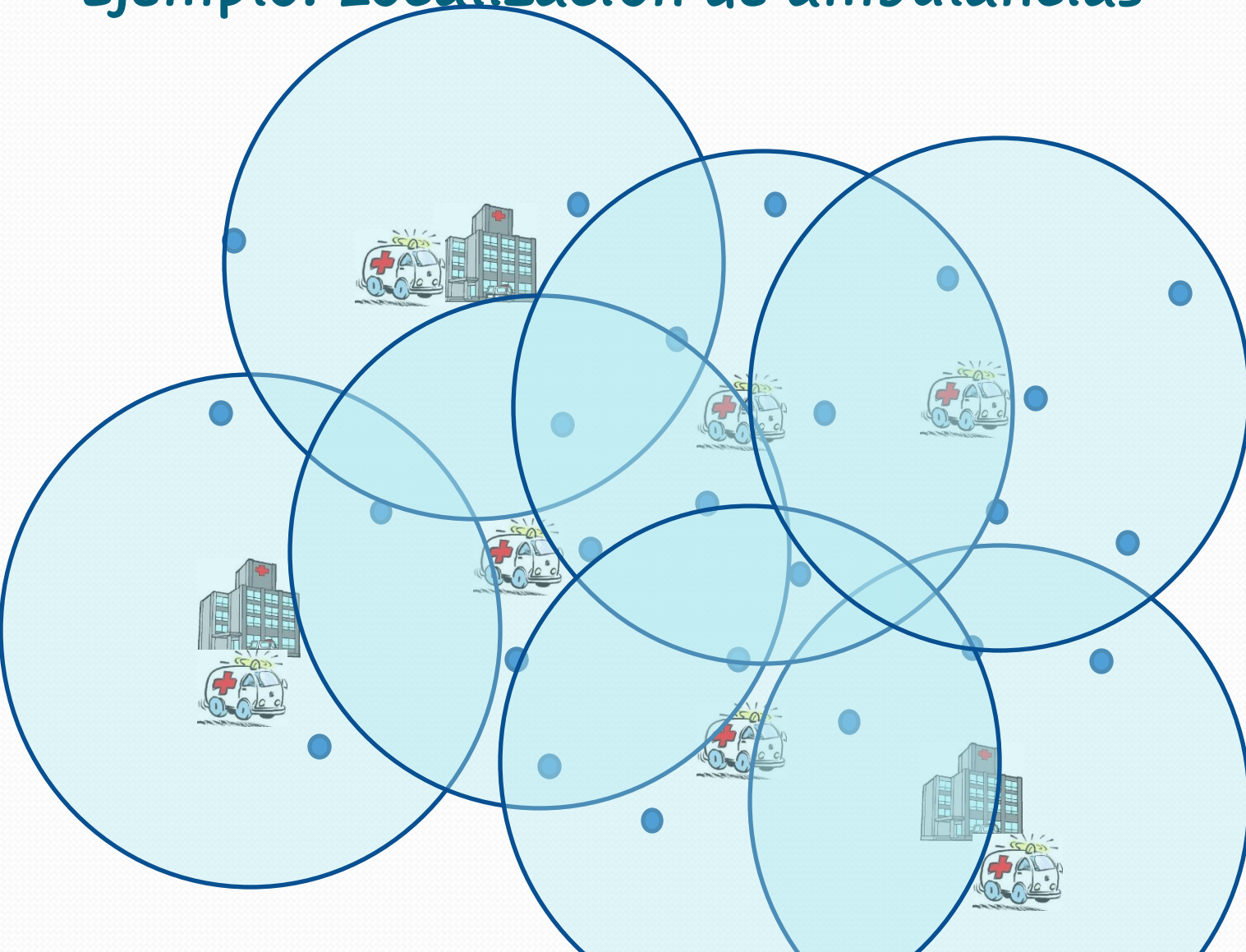
Ejemplo: Localización de ambulancias



Ejemplo: Localización de ambulancias



Ejemplo: Localización de ambulancias



Ejemplo: Localización de ambulancias

Objetivo:

Cómo ubicar las ambulancias para maximizar el número de potenciales clientes que reciben cobertura médica a tiempo en caso de emergencia

Sujeto a:

- Número limitado de p ambulancias
- Conjunto dado de sitios potenciales de ubicación

Ejemplo: Localización de ambulancias

- **Conjuntos/índices**

- $C = \{1, 2, \dots, n\}$:= Conjunto de clientes; $i \in C$
- $A = \{1, 2, \dots, m\}$:= Conjunto de sitios potenciales de ubicación; $j \in A$
- N_i := Conjunto de sitios potenciales cuyo tiempo de traslado “cubren” al cliente i ($= \{j \in A : t_{ij} \leq T\}$)
- N_j := Conjunto de clientes que cuyo tiempo de traslado se “cubren” desde el sitio j ($= \{i \in C : t_{ij} \leq T\}$)

- **Parámetros**

- p := Número de ambulancias
- T := Umbral de traslado crítico
- t_{ij} := Tiempo de traslado entre cliente i y ambulancia en j

- **Variables de decisión**

- Y_j := (Binaria 0-1) =1 se se ubica una ambulancia en el sitio j , =0 si no
- X_i := (Binaria 0-1) =1 si el cliente i se cubre por al menos una ambulancia, =0 si no

Ejemplo: Localización de ambulancias

- **Objetivo**

- Maximizar cobertura

$$\text{Max} \sum_{i \in C} X_i$$

- **Restricciones**

- Localización

$$X_i \leq \sum_{j \in N_i} Y_j \quad i \in C$$

- Cobertura

$$Y_j \leq X_i \quad j \in A, i \in N_j$$

- Cota de ambulancias

$$\sum_{j \in A} Y_j = p$$

- Integralidad

$$X_i, Y_j \in \{0,1\} \quad i \in C, j \in A$$

Métodos Exactos vs. Rápidos

- Soluciones exactas puede tomar toda la vida obtenerlas
- Heurísticas son en general más prácticas en ambientes industriales
- Es necesario análisis de desempeño

Dificultades/Aspectos por enfrentar

- Existencia de solución óptima
- Cómo encontrarla
- Recursos requeridos (tiempo, memoria)
- Métodos de solución exacta vs. Heurísticas
- Calidad de soluciones
- Incertidumbre en los datos
- Reoptimización
- Explotación de estructura del problema

Colaboración conjunta

- IO es una ciencia multidisciplinaria
- Necesidad de resolver problemas muy complejos
- Uso eficiente de recursos
- Expertos en aplicaciones \leftrightarrow Expertos en optimización

Líneas de Investigación del Roger

[<http://yalma.fime.uanl.mx/~roger/>]

- **Modelado y análisis de problemas de toma de optimización discreta**
 - Modelado
 - Análisis, desarrollo, explotación de propiedades
- **Desarrollo de Algoritmos Eficientes de Solución**
 - Métodos exactos (solución óptima global)
 - Técnicas avanzadas de optimización metaheurística (solución rápida)
- **Aplicaciones**
 - Secuenciación en sistemas de manufactura (EUA)
 - Sistemas de transporte de gas natural (EUA)
 - Optimización de sistemas territoriales (Alemania, España)
 - **Uso eficiente de recursos naturales (forestación)**
 - **Servicios médicos**
 - Y lo que se deje...