

Comparación de métricas en sistemas territoriales

Brenda Aide Peña Cantú
Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica
Universidad Autónoma de Nuevo León, México
bap10_st@hotmail.com

Roger Z. Ríos Mercado
Programa de Posgrado en Ingeniería de Sistemas
Universidad Autónoma de Nuevo León, México
rogrrer@yalma.fime.uanl.mx

Hugo J. Escalante
Programa de Posgrado en Ingeniería de Sistemas
Universidad Autónoma de Nuevo León, México
hugo.jair@gmail.com

Julio 2011

Resumen

Este trabajo trata sobre la comparación de dos modelos formulados para la solución de un problema de diseño de territorios comerciales donde se desea minimizar la dispersión territorial. El problema es motivado por un caso práctico de una compañía distribuidora de bebidas embotelladas. El primer modelo utiliza como medida de dispersión la métrica del problema de localización del p-centro, y el segundo la métrica del problema de la p-mediana. En el primer se mide la dispersión territorial en base a la distancia de la unidad más alejada del centro territorial, en la segunda en base a la sumatoria de las distancias de las unidades con respecto al centro. Los resultados experimentales, basados en muestras de datos reales de diversos tamaños, muestran que el modelo basado en la medida del p-centro es más robusto.

1. Introducción

El problema a abordar proviene de una empresa embotelladora de bebidas ubicada en la ciudad de Monterrey, N.L. México. Y ésta necesita dividir su número de clientes, dentro de un número de territorios en base ciertos requerimientos de planeación dados.

El diseño territorial se puede ver como el problema de agrupar pequeñas áreas geográficas llamadas unidades básicas, en grupos geográficos llamados territorios, de forma que éstos satisfagan un conjunto de criterios de planeación (Caballero, 2008). El diseño territorial tiene diversas aplicaciones como territorios políticos, distritos escolares, servicios de emergencias, distritos policíacos. De todas, las aplicaciones más importantes son las de diseño de territorios de venta y de diseño de territorios políticos.

Como lo explica Segura (2008), la mayoría de las compañías que tienen una venta considerable y una gran área de mercado se ven en la necesidad de diseñar territorios de ventas, con fines administrativos o comerciales. El problema de diseño de territorios de es muy similar, donde la finalidad es atender a los clientes de la mejor manera posible tratando de minimizar ciertos costos. Comúnmente existen una gran cantidad de razones por las que es necesario rediseñar un área de ventas o servicios. Puede suceder por un decremento o incremento en el número de ventas o clientes, lo que hace inevitable un ajuste en el diseño territorial. Otras de las frecuentes razones suelen ser la administración del personal de atención a las áreas de una mejor manera o balancear la carga en los territorios.

De tal modo que el asunto es el de comparar dos medidas de dispersión en territorios comerciales, ambas planteadas para minimizar la dispersión, uno utilizando con medida p-centro desarrollado por Caballero (2008) y el segundo utilizando como medida p-mediana desarrollado por Segura (2008). Un trabajo similar es el propuesto por Erkut y Neuman (1991), en el cual se contrastan cuatro diferentes modelos de maximizar dispersión en territorios. Lo que se trata de hacer es un estudio comparativo similar utilizando los modelos de minimización de dispersión de los territorios con los que se cuenta.

2. Descripción del problema

Se desea saber que modelo de diseño de territorios descritos a continuación es más conveniente utilizar respecto a su robustez. Como lo describe Caballero (2008) se sabe que se desea dividir el conjunto de unidades básicas que conforman la red de distribución de la empresa en un conjunto de territorios adecuados para sus propósitos comerciales. Para este desarrollar este plan territorial se hicieron las siguientes suposiciones:

- La manzana geográfica es la unidad básica de la que se conforman los territorios.
- Se asocian a cada territorio medidas de demanda de producto y de número de clientes conocidos como *tamaños*. Estos tamaños están definidos como la suma aritmética de los valores correspondientes a las medidas de actividad de las unidades básicas que los conforman.

La empresa considera ciertos criterios de planeación que se traducen en un conjunto de requerimientos que el diseño territorial debe cumplir:

- Cada unidad básica se debe asignar únicamente a un solo territorio. Esto quiere decir que los territorios definen conjuntos distintos de unidades básicas.
- Los territorios deben ser geográficamente compactos. Esto significa que la distancia entre las unidades básicas dentro de un mismo territorio es pequeña.
- Es de suma importancia que los territorios estén balanceados con respecto a cada medida de actividad. Lo anterior representa que para cada territorio, los tamaños de las medidas de actividad estén dentro de un rango establecido.
- Cada territorio debe ser contiguo. Esto implica la conexión geográfica entre las unidades básicas, es decir que para cada par de unidades básicas pertenecientes al territorio existe una ruta que las comunique compuesta exclusivamente por unidades básicas colindantes entre si y pertenecientes al mismo territorio.
- El diseño territorial debe contar con un número fijo de territorios previamente establecido.

A continuación se presentan la formulación de ambos modelos como un programa entero lineal mixto.

Modelo TDPC

$$\text{Minimizar } f(x) = \max\{d_{i,j}x_{i,j}\} \quad (1)$$

$$\sum_{i \in V} x_{i,j} \quad j \in V \quad (2)$$

$$\sum_{j \in V} x_{i,j} = p \quad (3)$$

$$\sum_{j \in V} w_j^a x_{i,j} \leq (1 + \tau^a) \mu^a x_{i,i} \quad i \in V; a \in A \quad (4)$$

$$\sum_{j \in V} w_j^a x_{i,j} \geq (1 - \tau^a) \mu^a x_{i,i} \quad i \in V; a \in A \quad (5)$$

$$\sum_{j \in \bigcup_{v \in S^A \setminus S} v} x_{i,j} - \sum_{j \in S} x_{i,j} \geq 1 - |S| \quad i, j \in V, \forall S \subset V \quad (6)$$

$$x_{i,j} \in \{0,1\} \quad i, j \in V \quad (7)$$

Se presenta el modelo con sus restricciones correspondientes utilizando como medida p-mediana.

Modelo TDPM

$$\text{Minimizar } f(x) = \sum_{i \in V} \sum_{j \in V} d_{i,j} x_{i,j} \quad (8)$$

$$\sum_{i \in V} x_{i,j} \quad j \in V \quad (9)$$

$$\sum_{j \in V} x_{i,j} = p \quad (10)$$

$$\sum_{j \in V} w_j^a x_{i,j} \leq (1 + \tau^a) \mu^a x_{i,i} \quad i \in V; a \in A \quad (11)$$

$$\sum_{j \in V} w_j^a x_{i,j} \geq (1 - \tau^a) \mu^a x_{i,i} \quad i \in V; a \in A \quad (12)$$

$$\sum_{j \in \cup_{v \in S^A \setminus S} v} x_{i,j} - \sum_{j \in S} x_{i,j} \geq 1 - |S| \quad i, j \in V, \forall S \subset V \quad (13)$$

$$x_{i,j} \in \{0,1\} \quad i, j \in V \quad (14)$$

En el modelo TDPC la función objetivo (1) busca minimizar la dispersión, al igual que en el modelo TDPM (8) realiza la misma tarea. Las restricciones (2) y (9) aseguran que la asignación de cada unidad básica a un solo centro. Las restricciones (3) y (10) establecen el número de centros a elegir y por consecuencia el número de territorios a formar. Las restricciones (4), (5), (11) y (12) aseguran que para cada actividad el tamaño de los territorios este dentro del rango definido por τ^a alrededor de su tamaño promedio definido por μ^a . Las restricciones (6) y (13) garantizan la conexidad de los territorios. Y por ultimo la restricciones (7) y (14) utilizadas para variables binarias.

3. Metodología de solución

El método empleado para la solución de ambos problemas es el propuesto por Salazar, Ríos y Cabrera (2010), en los que se pueden resolver de forma óptima modelos de hasta 150 unidades básicas y formando 8 territorios tanto para TDPC como para TDPM. En la figura A se presenta el procedimiento de solución empleado.

```

Input:
P := Instancia del problema TDP
MedidaDisp := TDPC o TDPM
TipoModelo := MILP
Output: X = (X1, X2, . . . , Xp) := A factible p-partición de V
Cortes ← ∅ {Conjunto de cortes}
Modelo ← GeneraModeloRelajado (P, MedidaDisp, TipoModelo)
While(Cortes ≠ ∅ )
  (TipoModelo = MILP)
  X ← ResolverModelo (MILP)
  Cortes ← ResolverProblemaSeparado (P, X)
  AgregarCortes(Modelo, Cortes)
EndWhile
Return X

```

Figura 1 Procedimiento de solución empleado.

Como se puede apreciar en la Figura 1 dentro de la formulación, se necesita como datos de entrada las instancias; un documento donde se guarda información de los nodos, territorios a formar y tolerancia de cada actividad; además de determinar si se trata de medida p-mediana o p-centro y por ultimo establecer que se resuelva de forma lineal. En seguida el método de solución realiza un procedimiento de iteración usando el método Ramificación y Acotamiento (B&B por sus siglas en inglés) (Hillier y Liberman, 2001), se relajan las restricciones de conectividad, ya que crecen exponencialmente y se resuelve. Posteriormente se lleva a cabo una prueba de conectividad mediante una búsqueda en anchura (BFS por sus siglas en inglés) para verificar si alguna restricción no se cumplió, si ese es el caso se identifican aquellas desigualdades violadas y se agregan al modelo relajado como cortes y continúa el procedimiento hasta que no haya desigualdades sin cumplir. Por ultimo imprime la solución óptima.

4. Experimentación

Para llevar a cabo los experimentos se adquirieron varios conjuntos de casos de pruebas con diferentes características a fin de analizar el comportamiento de ambos modelos variando cada uno de los parámetros. Cada caso de prueba es llamado *instancia*. Estas fueron construidas a partir de información real facilitada por el especialista de la empresa.

Dentro del estudio realizado se evaluaron 20 instancias, donde fueron codificadas en lenguaje C++, cada proceso fue compilado en Sun C++ 8.0. Todos los experimentos fueron realizados en un ordenador Intel Inside Pentium 4, con el sistema operativo Ubuntu 10.10, donde se utilizaron bibliotecas de optimización para C++ de CPLEX en su versión 9.0. En la tabla 1 se visualizan los datos para estudio.

Nombre de instancia	Nodos	Territorios	Tolerancia/Actividad
DU60-04-05-	60	4	5.00%
DU80-05-05-	80	5	5.00%
DU100-06-05-	100	6	5.00%

Tabla 1 Datos de experimentación.

A las instancias se les identifico de la forma en que se muestra en la Tabla 1 para facilitar su clasificación por número de nodos, número de territorios a formar y tolerancia para cada actividad. Se llevo a cabo la experimentación con 20 instancias de cada tamaño. En la Tabla 2 se presentan los resultados para los datos de 60 nodos, 4 territorios y una tolerancia de 5 % para cada una de las actividades.

Instancia	Xm		Xc		DR_M (%)	DR_C (%)
	fm(xm)	fc(xm)	fm(xc)	fc(xc)		
DU60-04-05-01	5460.17	234.24	6160.43	168.66	12.82	38.88
DU60-04-05-02	5451.68	201.45	5976.66	176.14	9.63	14.37
DU60-04-05-03	5597.87	184.87	5874.58	165.38	4.94	11.78

DU60-04-05-04	5935.66	258.21	6278.13	188.14	5.77	37.24
DU60-04-05-05	5303.19	213.08	5962.00	179.98	12.42	18.39
DU60-04-05-06	5253.94	159.68	5647.49	158.72	7.49	0.60
DU60-04-05-07	5460.17	234.24	6247.44	168.36	14.42	39.13
DU60-04-05-08	5309.96	228.86	5862.49	178.56	10.41	2816
DU60-04-05-09	5224.51	181.89	6344.72	173.73	21.44	4.70
DU60-04-05-10	5350.15	181.06	5607.09	152.34	4.80	18.86
DU60-04-05-11	5150.91	222.50	6910.35	183.90	34.16	20.99
DU60-04-05-12	5597.50	232.53	6193.97	178.87	10.66	29.99
DU60-04-05-13	5731.98	199.75	6731.70	184.35	17.44	8.35
DU60-04-05-14	5462.95	212.61	5887.73	181.29	7.78	17.28
DU60-04-05-15	5332.77	221.40	6105.17	164.14	14.48	34.89
DU60-04-05-16	5399.54	214.09	6083.78	173.37	12.67	23.49
DU60-04-05-17	5602.85	209.10	6096.18	173.74	8.80	20.35
DU60-04-05-18	5773.95	232.96	6494.64	189.28	12.48	23.08
DU60-04-05-19	5543.44	200.15	6215.93	177.99	12.13	12.44
DU60-04-05-20	5543.44	200.15	6565.13	181.45	18.43	10.30
			Media		12.66	20.66

Tabla 2 Resultados para las instancias 60 nodos, 4 territorios y 5 % de tolerancia.

En la primera columna de la Tabla 2 se aprecia el nombre con el que se identifica cada instancia, la segunda columna muestra los valores de las función objetivo correspondientes al optimizar el modelo TDPM, en la columna número tres se tiene el valor de la función objetivo TDPX evaluado en la solución óptima del modelo TDPM. El valor de la cuarta columna representa lo opuesto a la tercera columna, ya que se evalúa la solución óptima del modelo TDPC dentro del modelo TDPM. En la columna número cinco se tiene el valor de la función objetivo del modelo resuelto con la métrica de p-centro. Las columnas seis y siete reflejan el la desviación relativa respecto a cada medida. Se puede apreciar en la instancia DU-04-05-04 en particular se tiene una gran diferencia entre los valores de los intervalos de las columnas nueve y diez, ya que por un lado muestra una cifra de 5.77 % contra un 37.24 %, es decir una diferencia de 31.47 %.

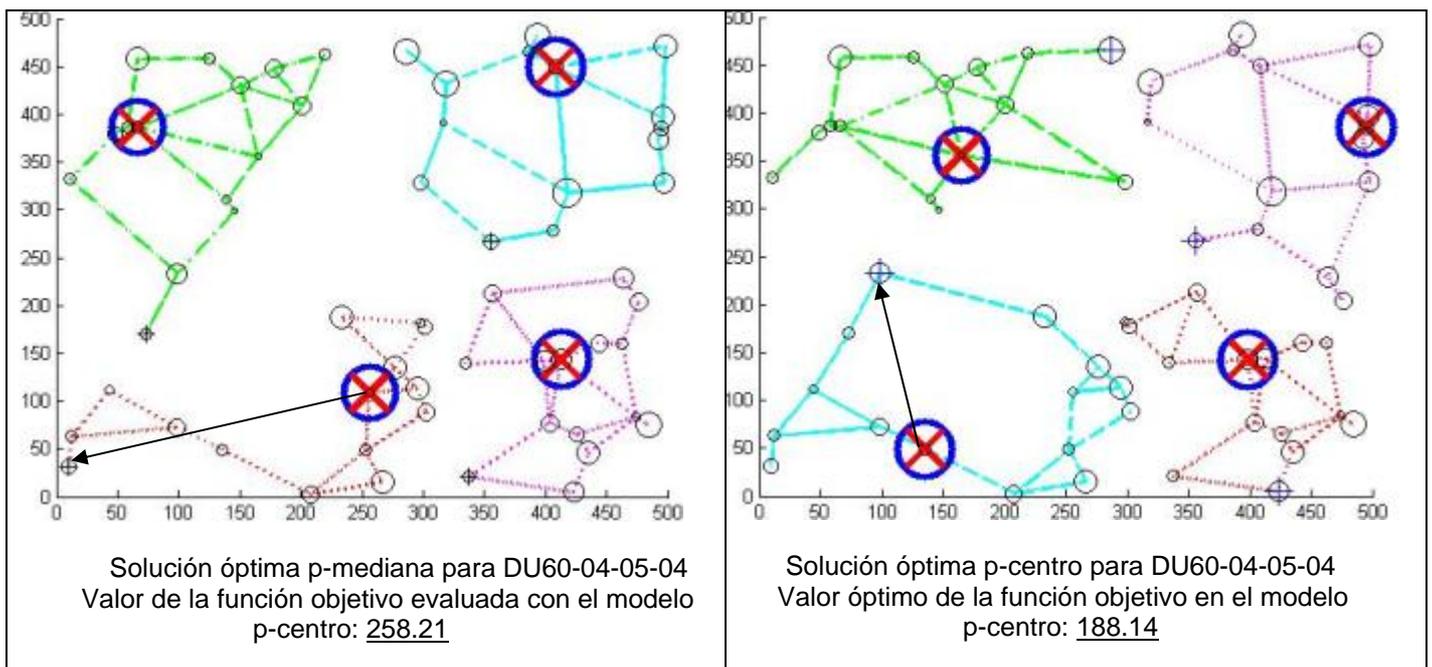


Figura 2 Comparación soluciones para DU60-04-05-04.

En la Figura 2 se presenta una comparación gráfica entre las dos soluciones óptimas correspondientes a cada uno de los modelos estudiados; en la imagen de la izquierda se aprecia como quedan distribuidos los territorios respecto a la función objetivo del TDPM, donde se han marcado con una cruz los nodos más alejados al centro de cada territorio respecto a la medida de dispersión p-centro, y como se aprecia se ha señalado con una flecha a la mayor de estas distancias con un valor de 258.21. En el dibujo de la derecha se muestra la distribución de los territorios respecto al modelo TDPC, de igual forma se señalan con una cruz los nodos más alejados al centro de cada territorio respecto a la misma medida y asimismo se indica con una flecha la mayor distancia a la cual le corresponde un valor de 188.14.

Instancia	xm		Xc		DR_M (%)	DR_C (%)
	fm(xm)	fc(xm)	fm(xc)	fc(xc)		
DU80-05-05-01	6600.56	230.40	7297.67	162.88	10.56	41.45
DU80-05-05-02	6408.82	192.30	7183.43	150.83	12.09	27.50
DU80-05-05-03	6958.05	194.84	7886.62	153.26	13.35	27.13
DU80-05-05-04	6900.16	209.30	7848.35	159.54	13.74	31.19
DU80-05-05-05	6280.58	184.85	6825.27	142.96	8.67	29.31
DU80-05-05-06	6521.08	238.58	7302.45	163.86	11.98	45.60
DU80-05-05-07	6455.97	187.40	7048.03	147.06	9.17	27.43
DU80-05-05-08	6680.28	213.98	7525.30	165.50	12.65	29.29
DU80-05-05-09	6650.20	177.37	7410.03	155.44	11.43	14.11
DU80-05-05-10	6534.77	179.28	7461.49	156.74	14.18	14.38
DU80-05-05-11	6539.55	191.00	7119.01	152.76	8.86	25.03
DU80-05-05-12	6703.55	186.52	7604.56	165.08	13.44	12.98
DU80-05-05-13	6285.66	181.63	6565.02	149.62	4.44	21.39
DU80-05-05-14	6615.80	199.70	7215.14	150.87	9.06	32.37
DU80-05-05-15	6990.43	239.15	7732.07	158.22	10.61	51.15
DU80-05-05-16	6391.66	201.13	6960.89	147.27	8.91	36.57
DU80-05-05-17	6766.01	227.49	7781.65	167.25	15.01	36.02
DU80-05-05-18	6808.45	175.54	7676.38	164.14	12.75	7.20
DU80-05-05-19	6643.17	183.33	7713.52	167.64	16.11	9.36
DU80-05-05-20	6873.61	185.17	7257.61	149.03	5.59	24.25
			Media		11.13	27.18

Tabla 3 Resultados 80 nodos, 5 territorios y 5 % de tolerancia.

En la Tabla 3, se muestran los resultados obtenidos con para las instancias de 80 nodos, 5 territorios y 5 % de tolerancia respecto a cada actividad.

En particular en la instancia DU80-05-05-15 se tiene una gran diferencia entre los valores de los intervalos de ambas columnas, ya que por un lado muestra una cifra de 10.61 % contra un 51.15 %, es decir una diferencia de 40.54 %.

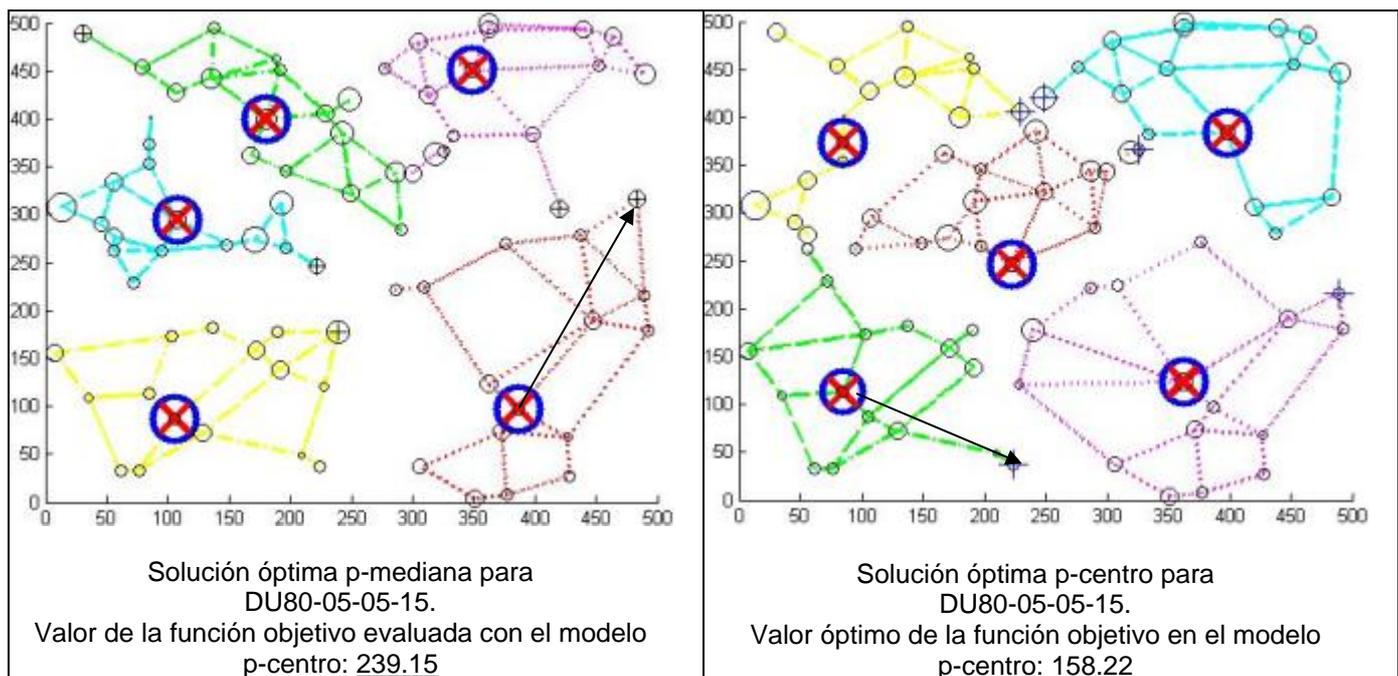


Figura 3 Comparación soluciones óptimas para DU80-05-05-15.

En la Figura 3 se presenta una comparación grafica entre las dos soluciones óptimas correspondientes a cada uno de los modelos estudiados, en la imagen de la izquierda se muestra como quedan distribuidos los territorios respecto a la función objetivo TDPM, donde se han marcado con una cruz los nodos más alejados al centro de cada territorio respecto a la medida de dispersión p-centro, y como se aprecia se ha señalado con una flecha a la mayor de estas distancias con un valor de 239.15. En el dibujo de la derecha se aprecia la distribución de los territorios respecto al TDPC, de igual forma se señalan con una cruz los nodos más alejados al centro y asimismo se indica con una flecha la mayor distancia a la cual le corresponde un valor de 158.22.

En la Tabla 4 se tienen los resultados obtenidos para instancias de 100 nodos, 6 territorios y 5 % de tolerancia.

nombre instancia	X _m		X _c		DR_M (%)	DR_C (%)
	fm(x _m)	fc(x _m)	fm(x _c)	fc(x _c)		
DU100-06-05-01	7370,14	191,15307	8309,21396	144,855943	12,74	31,96
DU100-06-05-02	7278,42508	164,077029	8782,35913	145,590037	20,66	12,70
DU100-06-05-03	7508,51316	189,9568	8426,37457	139,96387	12,22	35,72
DU100-06-05-04	7581,56548	171,51879	8168,55192	145,774092	7,74	17,66
DU100-06-10-05*	7609,49739	154,919094	8362,21328	139,45671	9,89	11,09
DU100-06-05-06	7242,99709	215,87082	8409,7426	145,3869	16,11	48,48
DU100-06-05-07	7432,68068	167,94471	8649,67674	137,240963	16,37	22,37
DU100-06-05-08	7052,89175	193,206425	7622,25863	139,786067	8,07	38,22
DU100-06-10-09*	7181,50306	186,673146	8077,48268	130,654243	11,76	37,88
DU100-06-05-10	7432,8896	155,241269	8026,26409	135,389845	4,65	19,08
DU100-06-05-11	6829,47592	166,544529	7778,81715	130,363577	13,90	27,75
DU100-06-05-12	7461,20693	184,808632	8269,3662	139,799172	10,83	32,20
DU100-06-05-13	7061,61038	178,029053	8556,5977	145,109657	21,17	22,69
DU100-06-05-14	7825,61511	150,440811	8172,43719	142,821102	4,43	5,34
DU100-06-05-15	7158,74046	153,464598	7780,01315	134,112957	8,68	14,43

DU100-06-05-16	7653,15898	246,006923	8103,6571	137,25306	5,89	79,24
DU100-06-05-17	6880,47207	157,113029	7799,50256	139,106089	13,36	12,94
DU100-06-05-18	7438,50782	260,750449	8517,43781	141	14,50	85,12
DU100-06-05-19	7152,04225	186,888001	8158,4702	139,97955	14,07	33,51
DU100-06-05-20	7590,09881	222,656669	8236,56433	149,78693	8,52	48,65
					media	11,78
						31,85

Tabla 4 Resultados 100 nodos, 6 territorios y 5 % de tolerancia.

Como se aprecia en la Tabla 4 las instancias DU100-06-10-05 y DU100-06-10-09 tienen un valor de tolerancia de 10 %, esto se debe que para una tolerancia del 5 % ambas instancias resultaban infactibles, por lo que no tenían solución. Por tal motivo en estos dos casos se incremento el valor de la tolerancia. En particular en la instancia DU100-06-05-18 se tiene una gran diferencia entre los valores de los intervalos de ambas columnas, ya que por un lado muestra una cifra de 14.50 % contra un 85.12 %, es decir una diferencia aproximadamente de 70.00 %.

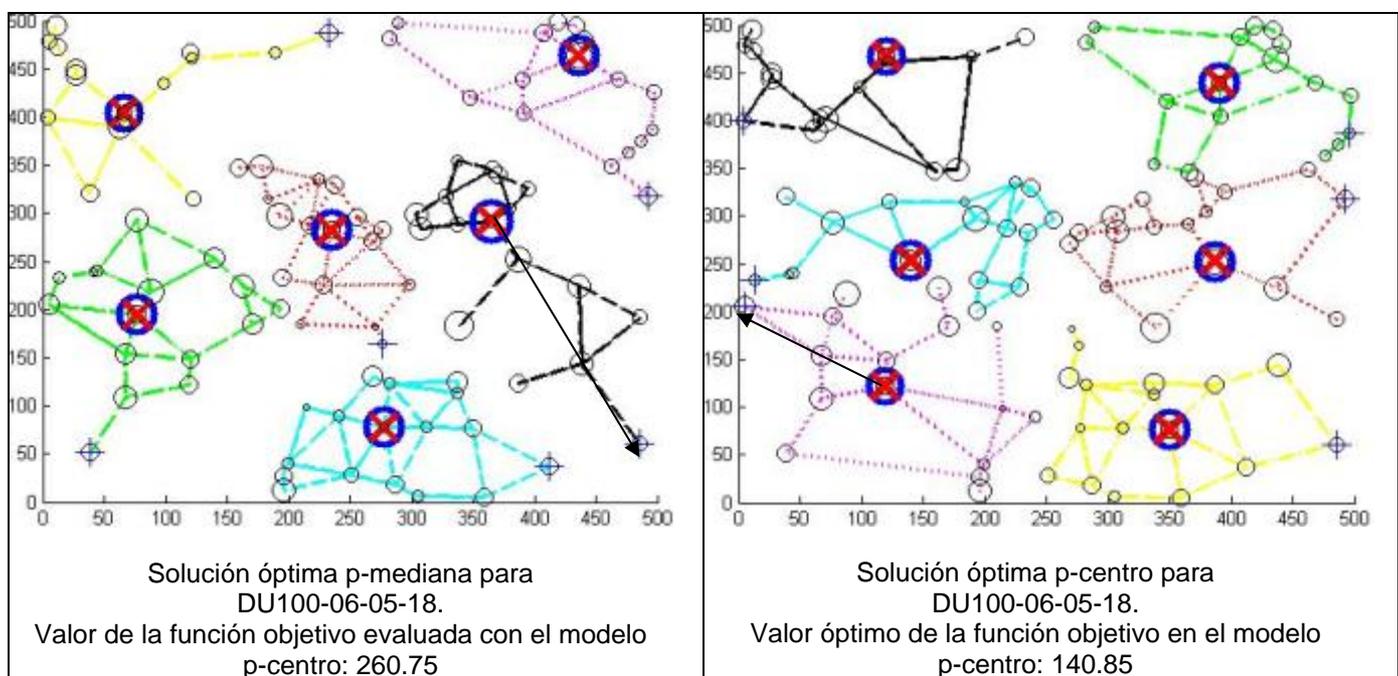


Figura 4 Comparación soluciones óptimas para DU100-06-05-18.

En la Figura 4 se presenta una comparación grafica entre las dos soluciones óptimas correspondientes a cada uno de los modelos estudiados, en la imagen de la izquierda se muestra como quedan distribuidos los territorios respecto a la función objetivo TDPM, donde se han marcado con una cruz los nodos más alejados al centro de cada territorio respecto a la medida de dispersión p-centro, y como se aprecia se ha señalado con una flecha a la mayor de estas distancias con un valor de 260.75. En el dibujo de la derecha se aprecia la distribución de los territorios respecto al TDPC, de igual forma se señalan con una cruz los nodos más alejados al centro y asimismo se indica con una flecha la mayor distancia a la cual le corresponde un valor de 140.85.

5. Conclusiones

Como se vio en los resultados anteriores, con diferentes tamaños de instancias usados, se aprecia una considerable diferencia entre cada uno de las desviaciones relativas obtenidos para cada modelo estudiado en este experimento; en todos los casos visualizándose valores superiores para DR_M que para DR_C , es decir, la columna que muestra los valores del cociente:

$$DR_A = \frac{F_m(x_c) - F_m(x_m)}{F_m(x_m)}$$

De tal modo se concluye que, si se selecciona el modelo TDPM y al final resulta que el TDPC es el favorable, las soluciones obtenidas con el modelo de p-centro se desviarán en promedio 20.66 % para los espacios de 60 nodos, 27.18 % para 80 nodos. Por lo tanto si se selecciona TDPC y posteriormente resulta que el TDPM es más conveniente, las soluciones obtenidas con el TDPM se desvían en promedio un 12.66 % para 60 nodos, 11.13 % para 80 nodos. Con esto se concluye que el modelo diseñado con la medida de dispersión p-centro es más robusto que el modelo diseñado con la métrica de p-mediana.

Referencias

Caballero Hernández, S. I. (2008). *Un procedimiento de búsqueda voraz, aleatorizado y adaptativo para el diseño eficiente de territorios de atención comercial con requerimientos de asignación conjunta*. Tesis de maestría FIME, UANL, San Nicolás de los Garza, México, Mayo.

Erkut, E. y Neuman, S. (1990). *Comparison of models for dispersing facilities*. *INFOR*, 29(2): 68-83.

Hillier, F. S. y Liberman, G. I. (2001) *Investigación de operaciones*. Estados Unidos. McGraw-Hill.

ILOG, S.A. CPLEX 9.0 *Online documentation*, 2003. <http://yalma.fime.uanl.mx/cplex~manual/>.

Salazar, M. A., Ríos, R. Z. y Cabrera, M. (2010). *New models for commercial territory design*. *Networks and Spatial Economics (aceptado)*.

Segura Ramiro, J. A. (2008). *Un algoritmo de localización-asignación para el diseño eficiente de planes territoriales de uso comercial*. Tesis de maestría FIME, UANL, San Nicolás de los Garza, México, Mayo.