

Comparación de métricas de dispersión en optimización de sistemas territoriales

Brenda Aide Peña Cantú¹, Roger Z. Ríos Mercado¹, Hugo Jair Escalante²

¹División de Posgrado de Ingeniería en Sistemas, FIME-UANL

²INAOE, Puebla

Febrero 2012, Revisado Marzo 2012

Resumen

En este trabajo se presenta la comparación de dos modelos formulados para la solución de un problema de diseño de territorios comerciales donde se desea minimizar la dispersión territorial. Este trabajo es motivado por un caso práctico de una compañía distribuidora de bebidas embotelladas. El primer modelo utiliza como medida de dispersión la métrica del problema de localización del p -centro, y el segundo la métrica del problema de la p -mediana. Se muestran resultados experimentales basados en muestras de datos reales de diversos tamaños donde se observa que es una mejor decisión usar el modelo basado en la medida del p -centro que el de p -mediana con base en ciertos criterios considerados.

Palabras clave: Investigación de operaciones; Diseño de territorios comerciales; Métrica p -Centro; Métrica p -Mediana.

Abstract

This paper presents a comparison of two models to solve a commercial territory design problem. The work is motivated by a real-world problem from a beverage bottling company. The first model uses, as a dispersion measure, the metric from the well-known p -center problem. The second one uses the metric from the p -median problem. Experimental results based on real-world data indicate that the model with p -center metric is a better choice than the p -median according to some considerations.

Keywords: Operation research; Territory design; p -Center metric, p -Median metric.

Introducción

El problema abordado proviene de una empresa embotelladora de bebidas ubicada en la ciudad de Monterrey, N.L., México. Ésta necesita dividir sus clientes en un número de territorios dado con base en ciertos requerimientos de planeación. El diseño territorial puede verse como el problema de agrupar pequeñas áreas geográficas llamadas unidades básicas, en grupos geográficos llamados territorios, de forma que éstos satisfagan un conjunto de criterios de planeación [1]. Éste tiene diversas aplicaciones como el diseño de territorios políticos, distritos escolares, servicios de emergencias, distritos policíacos. De todas, las aplicaciones más importantes son las de diseño de territorios para ventas [2,3] y territorios políticos [4,5,6,7].

Segura [8] explica que la mayoría de las compañías que tienen ventas considerables y una gran área de mercado se ven en la necesidad de diseñar territorios de ventas, con fines administrativos o comerciales. Comúnmente existen una gran cantidad de razones por las que es necesario rediseñar una área de ventas o servicios. Puede suceder por un decremento o incremento en el número de ventas o clientes, la administración del personal de atención a las áreas de una mejor manera o simplemente balancear la carga en los territorios.

En este artículo se comparan dos modelos desarrollados con distintas medidas de dispersión para el diseño de territorios comerciales, ambos para minimizar la dispersión, uno utilizando la medida p -centro desarrollado por Caballero [1] y el segundo utilizando la medida p -mediana desarrollado por Segura [8]. Un trabajo similar es el propuesto por Erkut y Neuman [9], en el cual se contrastan cuatro diferentes modelos para maximizar dispersión de un conjunto dado de puntos. Lo que se trata de hacer en este trabajo es un estudio comparativo similar considerando los modelos de minimización de dispersión de los territorios con los que se cuenta.

Descripción de los modelos

Lo que se desea saber es qué modelo es más conveniente utilizar respecto a su robustez, es decir qué tan sensible es un modelo a pequeñas variaciones en los parámetros de entrada. En el caso que se comparan dos modelos para resolver un mismo problema, el término robustez se refiere a qué tanto se aleja del valor óptimo la solución óptima de un modelo al evaluarlas en el otro modelo. Como lo describe Caballero [1], se sabe que se desea dividir el conjunto de unidades básicas que conforman la red de distribución de la empresa en un conjunto de territorios adecuados para sus propósitos comerciales. Para desarrollar este plan territorial se hicieron las siguientes suposiciones:

- La manzana geográfica es la unidad básica de la que se conforman los territorios.
- Se asocian a cada territorio medidas de demanda de producto y de número de clientes conocidos como *tamaños*. Estos tamaños están definidos como la suma aritmética de los valores correspondientes a las medidas de actividad de las unidades básicas que los conforman.

La empresa considera ciertos criterios de planeación que se traducen en un conjunto de requerimientos que el diseño territorial debe cumplir:

- Cada unidad básica se debe asignar únicamente a un solo territorio. Esto quiere decir que los territorios definen conjuntos distintos de unidades básicas.
- Los territorios deben ser geográficamente compactos. Esto significa que la distancia entre las unidades básicas dentro de un mismo territorio es pequeña.
- Es de suma importancia que los territorios estén balanceados con respecto a cada medida de actividad. Lo anterior representa que para cada territorio, los tamaños de las medidas de actividad estén dentro de un rango establecido.
- Cada territorio debe ser contiguo. Esto implica que para cada par de unidades básicas pertenecientes al territorio existe una ruta que las comunique, compuesta exclusivamente por unidades básicas colindantes entre si y pertenecientes al mismo territorio.
- El diseño territorial debe contar con un número fijo de territorios previamente establecido.

A continuación se presentan en la formulación de ambos modelos como un programa lineal entero mixto. El modelo basado en la medida p -centro (TDPC) está definido como sigue:

Modelo TDPC

$$\text{Minimizar } f_c(x) = \max \{d_{ij} x_{ij}\} \quad (1)$$

Sujeto a:

$$\sum_{i \in V} x_{ij} = 1 \quad j \in V \quad (2)$$

$$\sum_{j \in V} x_{ij} = p \quad (3)$$

$$\sum_{j \in V} w_j^a x_{ij} \leq (1 + \tau^a) \mu^a x_{ii} \quad i \in V; a \in A \quad (4)$$

$$\sum_{j \in V} w_j^a x_{ij} \geq (1 - \tau^a) \mu^a x_{ii} \quad i \in V; a \in A \quad (5)$$

$$\sum_{j \in \bigcup_{v \in S} N^v \setminus S} x_{ij} - \sum_{j \in S} x_{ij} \leq |S| \quad i, j \in V, \forall S \subset V \quad (6)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad i, j \in V \quad (7)$$

Mientras que el modelo basado en la medida p -mediana (TDPM) se presenta a continuación:

Modelo TDPM

$$\text{Minimizar } f_m(x) = \sum_{i \in V} \sum_{j \in V} d_{ij} x_{ij} \quad (8)$$

Sujeto a:

(2) a (7)

Tanto en el modelo TDPC, como en el TDPM la función objetivo (1) y (8) busca minimizar la dispersión donde x_{ij} es la variable de decisión y d_{ij} se define como la distancia euclidiana entre los nodos i y j . La restricción (2) asegura que la asignación de cada unidad básica sea a un solo centro. Las restricción (3) establece el número de centros a elegir y por consecuencia el número de territorios a formar que esta designado por p . Las restricciones (4) y (5) aseguran que para cada actividad a el tamaño de los territorios este dentro del rango definido por τ^a alrededor de su tamaño promedio definido por μ^a donde w_i^a es el valor de la actividad a en el nodo i . La restricción (6) garantiza la conectividad de los territorios en el que N es el conjunto de nodos adyacentes al nodo i .

Metodología de solución

El método empleado para la solución de ambos problemas es el propuesto por Salazar, Ríos y Cabrera [10], en el que se puede resolver de forma óptima modelos de hasta 150 unidades básicas y formando 8 territorios tanto para TDPC como para TDPM. En la figura 1 se presenta el procedimiento de solución empleado.

Input:

$P :=$ Instancia del problema TDP

$MedidaDisp :=$ TDPC o TDPM

Output: $X = (X_1, X_2, \dots, X_p) :=$ Una p -partición factible de V

$CriterioParada \leftarrow$ NO

$Cortes \leftarrow \emptyset$ {Conjunto de cortes}

$Modelo \leftarrow$ *GeneraModeloRelajado* ($P, MedidaDisp$)

while ($CriterioParada \neq$ SI)

$X \leftarrow$ *ResolverModelo* ($MedidaDisp$)

$Cortes \leftarrow$ *ResolverProblemaSeparacion* (P, X)

if ($Cortes = \emptyset$)

$CriterioParada \leftarrow$ SI

else

AgregarCortes($Modelo, Cortes$)

endif

endwhile

return X

Figura 1. Procedimiento de solución empleado.

Dentro de la formulación se necesita como datos de entrada la instancia, además de especificar si se trata de p -centro o p -mediana. Enseguida, el método realiza un procedimiento iterativo usando el método de Ramificación y Acotamiento, donde internamente se relajan las restricciones de conectividad (ya que crecen de forma exponencial) y se resuelve la relajación. Posteriormente se realiza una prueba para verificar la conectividad mediante una búsqueda en anchura (BFS, por sus siglas en inglés), que es un algoritmo para recorrer y buscar elementos en un grafo [11], para verificar si alguna restricción de conectividad no se cumplió. Si ese es el caso, se identifican aquellas desigualdades violadas y se agregan al modelo relajado como cortes y continúa el procedimiento hasta que no haya desigualdades sin cumplir. Por último, el método retorna la solución óptima.

Trabajo experimental

Para llevar a cabo los experimentos se utilizaron varios conjuntos de pruebas con diferentes características a fin de analizar el comportamiento de ambos modelos variando cada uno de los parámetros. Las instancias de prueba fueron construidas a partir de información real facilitada por un especialista de la empresa.

Dentro del estudio realizado se evaluaron 20 instancias. El método de solución bajo ambas métricas fue codificado en el lenguaje C++ y compilado con el compilador Sun C++ 8.0. Todos los experimentos fueron realizados en un ordenador SunFire V440, con el sistema operativo Solaris 9, donde se utilizaron bibliotecas de optimización para C++ de CPLEX [12] en su versión 11.2 en el Laboratorio de Cómputo de Alto Desempeño del Posgrado de Ingeniería de Sistemas de la FIME, UANL. Mayores detalles pueden encontrarse en el trabajo de Peña Cantú [13].

A las instancias se les identificó de la forma en que se muestra en la Tabla 1 para facilitar su clasificación por número de nodos (N), número de territorios a formar (p) y tolerancia (τ^a) para cada actividad. Se llevó a cabo la experimentación con 20 instancias de cada tamaño. En la Tabla 2 se presentan los resultados para los datos de 60 nodos, 4 territorios y una tolerancia de 5% para cada una de las actividades.

Tabla 1. Datos de experimentación.

Sufijo de instancia	N	p	τ^a (%)
DU60-04-05	60	4	5.00
DU80-05-05	80	5	5.00
DU100-06-05	100	6	5.00

Tabla 2. Resultados para las instancias 60 nodos, 4 territorios y 5% de tolerancia.

Nombre instancia	xm		xc		DR _M (%)	DR _C (%)	
	fm(xm)	fc(xm)	fm(xc)	fc(xc)			
DU60-04-05-01	5460.17	234.24	6160.43	168.66	12.82	38.88	
DU60-04-05-02	5451.68	201.45	5976.66	176.14	9.63	14.37	
DU60-04-05-03	5597.87	184.87	5874.58	165.38	4.94	11.78	
DU60-04-05-04	5935.66	258.21	6278.13	188.14	5.77	37.24	
DU60-04-05-05	5303.19	213.08	5962.00	179.98	12.42	18.39	
DU60-04-05-06	5253.94	159.68	5647.49	158.72	7.49	0.60	
DU60-04-05-07	5460.17	234.24	6247.44	168.36	14.42	39.13	
DU60-04-05-08	5309.96	228.86	5862.49	178.56	10.41	28.16	
DU60-04-05-09	5224.51	181.89	6344.72	173.73	21.44	4.70	
DU60-04-05-10	5350.15	181.06	5607.09	152.34	4.80	18.86	
DU60-04-05-11	5150.91	222.50	6910.35	183.90	34.16	20.99	
DU60-04-05-12	5597.50	232.53	6193.97	178.87	10.66	29.99	
DU60-04-05-13	5731.98	199.75	6731.70	184.35	17.44	8.35	
DU60-04-05-14	5462.95	212.61	5887.73	181.29	7.78	17.28	
DU60-04-05-15	5332.77	221.40	6105.17	164.14	14.48	34.89	
DU60-04-05-16	5399.54	214.09	6083.78	173.37	12.67	23.49	
DU60-04-05-17	5602.85	209.10	6096.18	173.74	8.80	20.35	
DU60-04-05-18	5773.95	232.96	6494.64	189.28	12.48	23.08	
DU60-04-05-19	5543.44	200.15	6215.93	177.99	12.13	12.44	
DU60-04-05-20	5543.44	200.15	6565.13	181.45	18.43	10.30	
					Media	12.66	20.66

En la primera columna de la Tabla 2 se señala el nombre con el que se identifica cada instancia. La siguiente columna muestra los valores de la función objetivo al optimizar el modelo TDPM ($f_m(x_m)$). En la tercera columna ($f_c(x_m)$) se tiene el valor de la función objetivo de TDPC evaluado con la solución óptima del modelo de TDPM. El valor de la cuarta columna ($f_m(x_c)$) representa lo opuesto a la tercera, ya que se evalúa la solución óptima del modelo TDPC dentro del modelo de TDPM. En la columna número cinco ($f_c(x_c)$) se tiene el valor óptimo de la función objetivo del modelo TDPC. Las últimas dos columnas reflejan las diferencias relativas del modelo TDPM y TDPC, respectivamente calculándolas de la siguiente manera:

$$DR_M = \frac{f_m(x_c) - f_m(x_m)}{f_m(x_m)} \quad DR_C = \frac{f_c(x_m) - f_c(x_c)}{f_c(x_c)}$$

En la parte izquierda de la Figura 2 se observa la solución óptima para la instancia DU60-04-05-04 utilizando el modelo TDPM. Dentro de esta gráfica se aprecian los nodos distribuidos en cuatro territorios de tal forma que se cumple con la conectividad entre cada uno de los nodos pertenecientes al territorio, al igual que el balance de éste. Cada territorio está marcado con un color y tipo de línea diferente, cada nodo se encuentra señalado con un círculo, que representa el promedio de los pesos de cada una de las actividades. Los círculos marcados con una cruz roja son los centros de cada uno de los territorios formados. Los círculos señalados con una cruz negra son los nodos más alejados al centro de cada territorio.

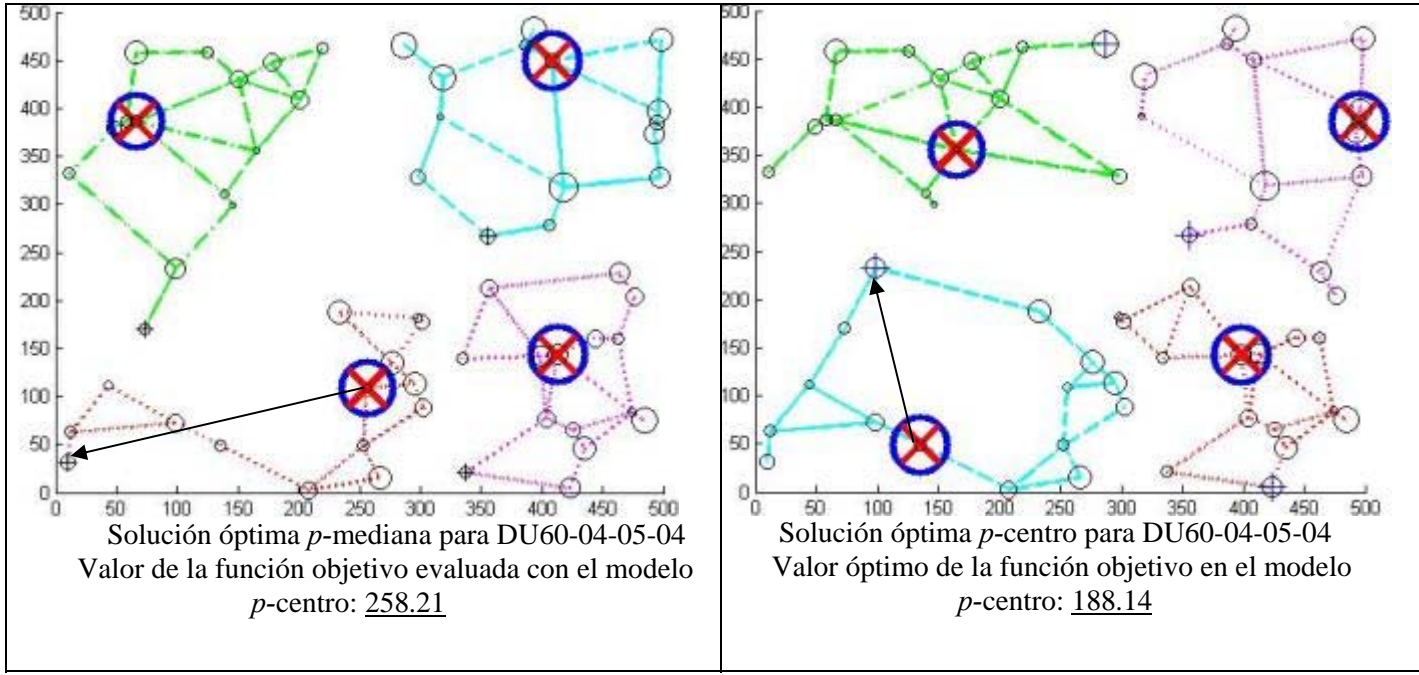


Figura 2. Comparación soluciones para DU60-04-05-04.

Como se aprecia en la gráfica, se ha señalado con una flecha a la mayor de estas distancias con un valor de 258.21. En la parte derecha de la Figura 2 se muestra la gráfica correspondiente a la solución óptima del modelo TDPC para misma instancia, donde se aprecia la distribución de los territorios respecto al la medida de dispersión p -centro y asimismo se indica con una flecha la mayor distancia a la cual le corresponde un valor de 188.14. Como se contempla en la Figura 2, la distancia del centro al nodo más alejado mostrado en la solución del modelo TDPC es menor a la máxima distancia del centro del territorio al nodo más lejano para el modelo con métrica TDPM, esto muestra una gran disimilitud respecto a la configuración de las soluciones de ambos modelos. Diseños similares se obtuvieron con otras instancias del mismo tamaño.

En la Tabla 3, se muestran los resultados obtenidos para las instancias de 80 nodos, 5 territorios y 5% de tolerancia respecto a cada actividad.

Tabla 3. Resultados 80 nodos, 5 territorios y 5% de tolerancia.

Nombre instancia	xm		xc		DR _M (%)	DR _C (%)
	fm(xm)	fc(xm)	fm(xc)	fc(xc)		
DU80-05-05-01	6600.56	230.40	7297.67	162.88	10.56	41.45
DU80-05-05-02	6408.82	192.30	7183.43	150.83	12.09	27.50
DU80-05-05-03	6958.05	194.84	7886.62	153.26	13.35	27.13
DU80-05-05-04	6900.16	209.30	7848.35	159.54	13.74	31.19
DU80-05-05-05	6280.58	184.85	6825.27	142.96	8.67	29.31
DU80-05-05-06	6521.08	238.58	7302.45	163.86	11.98	45.60
DU80-05-05-07	6455.97	187.40	7048.03	147.06	9.17	27.43
DU80-05-05-08	6680.28	213.98	7525.30	165.50	12.65	29.29
DU80-05-05-09	6650.20	177.37	7410.03	155.44	11.43	14.11
DU80-05-05-10	6534.77	179.28	7461.49	156.74	14.18	14.38
DU80-05-05-11	6539.55	191.00	7119.01	152.76	8.86	25.03
DU80-05-05-12	6703.55	186.52	7604.56	165.08	13.44	12.98
DU80-05-05-13	6285.66	181.63	6565.02	149.62	4.44	21.39
DU80-05-05-14	6615.80	199.70	7215.14	150.87	9.06	32.37
DU80-05-05-15	6990.43	239.15	7732.07	158.22	10.61	51.15
DU80-05-05-16	6391.66	201.13	6960.89	147.27	8.91	36.57
DU80-05-05-17	6766.01	227.49	7781.65	167.25	15.01	36.02
DU80-05-05-18	6808.45	175.54	7676.38	164.14	12.75	7.20
DU80-05-05-19	6643.17	183.33	7713.52	167.64	16.11	9.36
DU80-05-05-20	6873.61	185.17	7257.61	149.03	5.59	24.25
Media					11.13	27.18

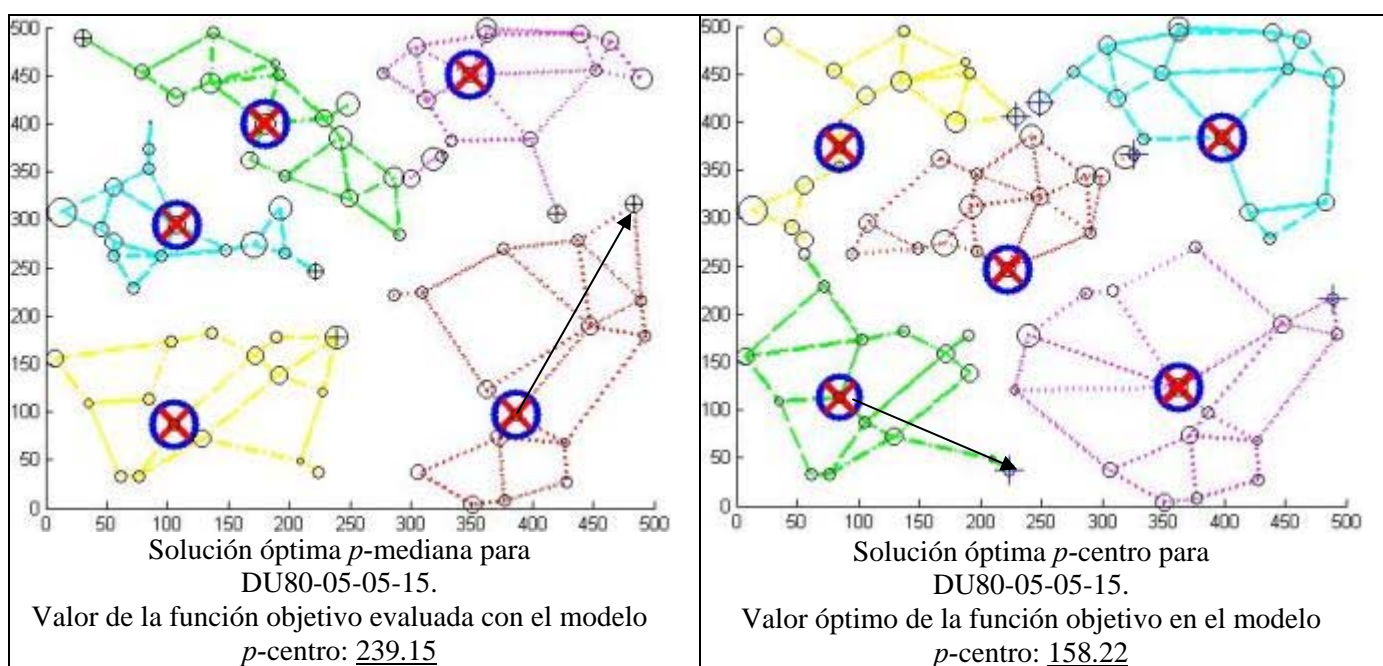


Figura 3. Comparación soluciones óptimas para DU80-05-05-15.

Al igual que en la Figura 2, la Figura 3 presenta una comparación gráfica entre las dos soluciones óptimas correspondientes a cada uno de los modelos estudiados para una instancia en particular. En la parte izquierda se muestra la solución óptima para la instancia utilizando el modelo TDPM. Dentro de esta gráfica se aprecia los nodos distribuidos en cinco territorios de tal forma que se cumple con la conectividad entre cada uno de los nodos pertenecientes al territorio al igual que el balance del éste. Como se aprecia en la gráfica, se ha

señalado con una flecha a la mayor de estas distancias con un valor de 239.15. En la parte derecha de la Figura 3 se muestra la gráfica correspondiente a la solución óptima del modelo TDPC y asimismo se ha indicado con una flecha la distancia del centro del territorio al nodo más alejado, la cual le corresponde un valor de 158.22. Como se contempla en la Figura 3, la distancia respecto el centro del territorio al nodo más alejado para la solución del modelo TDPM es mayor que la distancia del centro al nodo más alejado del modelo diseñado con métrica TDPC.

Tabla 4. Resultados 100 nodos, 6 territorios y 5% de tolerancia.

Nombre instancia	xm		xc		DR _M (%)	DR _C (%)
	fm(xm)	fc(xm)	fm(xc)	fc(xc)		
DU100-06-05-01	7370.14	191.15	8309.21	144.85	12.74	31.96
DU100-06-05-02	7278.42	164.07	8782.35	145.59	20.66	12.70
DU100-06-05-03	7508.51	189.95	8426.37	139.96	12.22	35.72
DU100-06-05-04	7581.56	171.51	8168.55	145.77	7.74	17.66
DU100-06-10-05*	7609.49	154.91	8362.21	139.45	9.89	11.09
DU100-06-05-06	7242.99	215.87	8409.74	145.38	16.11	48.48
DU100-06-05-07	7432.68	167.94	8649.67	137.24	16.37	22.37
DU100-06-05-08	7052.89	193.20	7622.25	139.78	8.07	38.22
DU100-06-10-09*	7181.50	186.67	8077.48	130.65	11.76	37.88
DU100-06-05-10	7432.88	155.24	8026.26	135.38	4.65	19.08
DU100-06-05-11	6829.47	166.54	7778.81	130.36	13.90	27.75
DU100-06-05-12	7461.20	184.80	8269.36	139.79	10.83	32.20
DU100-06-05-13	7061.61	178.02	8556.59	145.10	21.17	22.69
DU100-06-05-14	7825.61	150.44	8172.43	142.82	4.43	5.34
DU100-06-05-15	7158.74	153.46	7780.01	134.11	8.68	14.43
DU100-06-05-16	7653.15	246.00	8103.65	137.25	5.89	79.24
DU100-06-05-17	6880.47	157.11	7799.50	139.10	13.36	12.94
DU100-06-05-18	7438.50	260.75	8517.43	141.00	14.50	85.12
DU100-06-05-19	7152.04	186.88	8158.47	139.97	14.07	33.51
DU100-06-05-20	7590.09	222.65	8236.56	149.78	8.52	48.65
Media					11.78	31.85

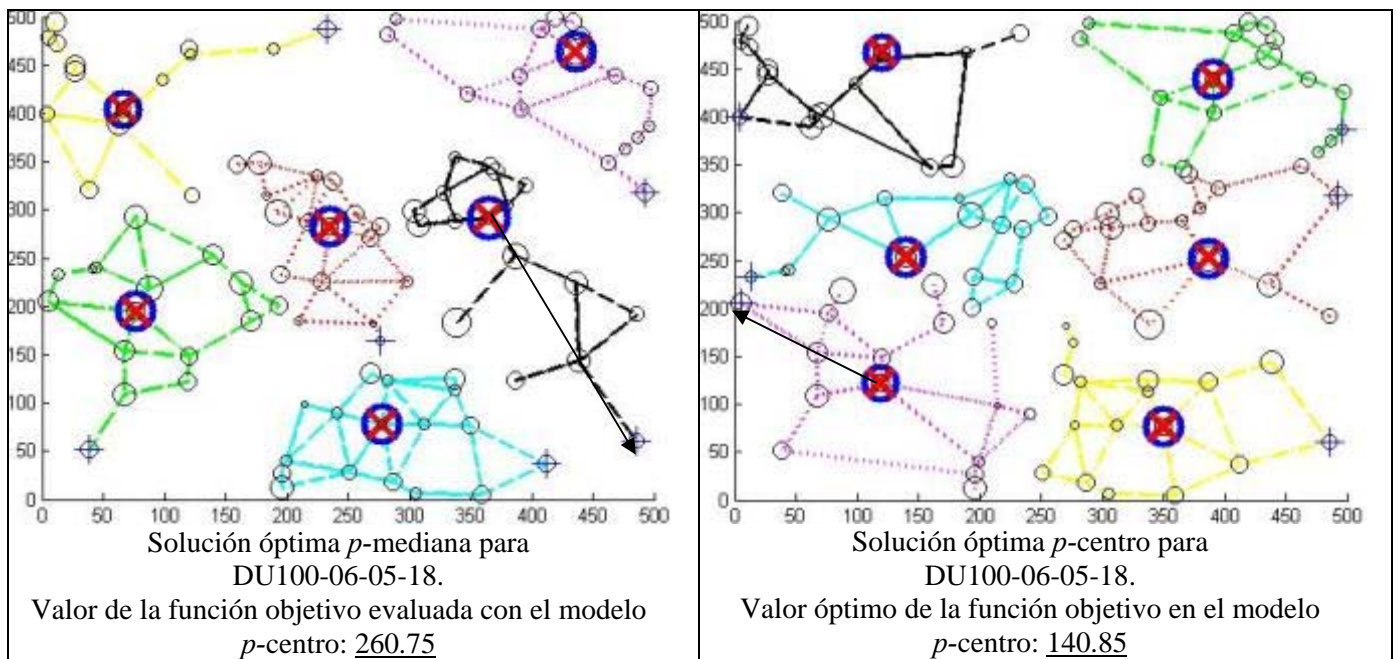


Figura 4. Comparación soluciones óptimas para DU100-06-05-18.

En la Tabla 4 se muestran los resultados obtenidos para instancias de 100 nodos, 6 territorios y 5% de tolerancia. En la Figura 4 se muestra una comparación gráfica entre las dos soluciones óptimas correspondientes a cada uno de los modelos estudiados para la instancia DU100-06-05-18. En el lado izquierdo se muestra la solución óptima para la instancia utilizando el modelo TDPM. Dentro de esta gráfica se aprecia los nodos distribuidos en seis territorios. Como se puede observar, se ha señalado con una flecha a la mayor de estas distancias con un valor de 260.75. En la parte derecha se muestra la gráfica correspondiente a la solución óptima del modelo TDPC y asimismo se ha indicado con una flecha la distancia del centro del territorio al nodo más alejado, la cual le corresponde un valor de 140.85. Como se observa en la Figura 4, la distancia respecto al centro del territorio al nodo más alejado para la solución del modelo TDPM es mayor que la distancia del centro al nodo más alejado del modelo diseñado con métrica TDPC. Es decir, que el valor de la solución óptima del modelo TDPM evaluada en la función objetivo del modelo TDPC tiene un valor aceptable, pero no óptimo.

En la Tabla 5 se muestra el tiempo empleado, en segundos, para resolver cada una de las instancias. La primera columna indica el nombre de la instancia, seguido por la columna que indica el tiempo de solución del modelo TDPM y por último la columna en donde se observa el tiempo requerido para solucionar el modelo TDPC. Como se aprecia, existe una diferencia considerable entre los tiempos de un modelo y otro, ya que el tiempo de solución promedio del modelo TDPM es de 97.6 segundos, en cambio para el modelo TDPC se estima un tiempo promedio de 30974.45 segundos.

Tabla 5. Tiempos de solución para instancias de 100 nodos, 6 territorios y 5% de tolerancia

nombre instancia	Tiempos de solución (seg)	
	TDPM	TDPC
DU100-06-05-01	444	31084
DU100-06-05-02	138	13520
DU100-06-05-03	72	10394
DU100-06-05-04	25	76985
DU100-06-10-05*	144	11871
DU100-06-05-06	62	16548
DU100-06-05-07	19	28889
DU100-06-05-08	18	61194
DU100-06-10-09*	43	76113
DU100-06-05-10	45	12663
DU100-06-05-11	21	19713
DU100-06-05-12	22	22894
DU100-06-05-13	19	13779
DU100-06-05-14	19	64787
DU100-06-05-15	155	76161
DU100-06-05-16	423	21519
DU100-06-05-17	111	12208
DU100-06-05-18	52	11845
DU100-06-05-19	20	17639
DU100-06-05-20	100	19683
Media	97.6	30974.45

Conclusiones

Como se vio en los resultados anteriores, el análisis realizado nos da una perspectiva clara en la que se sabe con seguridad que el modelo de dispersión TDPC muestra resultados superiores a los obtenidos con el modelo

TDPM. En los tres tamaños de instancias utilizados se demuestra que una transición del modelo TDPC al modelo TDPM es preferible a un cambio del modelo TDPM a TDPC. Es decir, si se toma una solución hallada con el modelo TDPC y se evalúa en el TDPM se tendrá una menor desviación relativa. Conforme se incrementa el tamaño de las instancias, se advierte como hay un incremento en la diferencia entre los intervalos de optimalidad relativa calculados para ambos modelos matemáticos. Esto quiere decir que se tiene una superioridad en el modelo de p -centro con respecto al modelo diseñado con la métrica de p -mediana. Pero también se observa cómo los tiempos de solución se vuelven cada vez más grandes, esto es que mientras se va aumentando el tamaño del territorio el tiempo de solución se ve afectado. En conclusión, el modelo TDPC es más robusto que el TDPM pero con tiempos de solución significativamente mayores para instancias de 100 nodos.

De tal modo se concluye que, si se selecciona la solución del modelo TDPM y al final resulta que el modelo TDPC fuera el más apropiado, las soluciones obtenidas con el modelo TDPM se desviarán en promedio 20.66%, 27.18% y 31.85% para las instancias de 60, 80 y 100 nodos, respectivamente, del óptimo del modelo TDPC. Por otra parte, si se selecciona la solución del modelo TDPC y posteriormente resulta que el modelo de dispersión TDPM es más conveniente, las soluciones obtenidas con el modelo TDPC se desviarán del óptimo del modelo TDPM en promedio un 12.66%, 11.13% y 11.78% para las instancias de 60, 80 y 100 nodos, respectivamente, es decir que el modelo TDPC resulta ser más robusto. Al mismo tiempo es de suma importancia declarar que los tiempos de solución del modelo denominado TDPC son considerablemente mayores a los del modelo TDPM, es decir, que se cuenta con un beneficio por ser más robusto pero con mayores tiempos de solución.

Agradecimientos: Este trabajo ha sido apoyado por el PAICYT de la UANL (apoyo IT511-10) y por el CONACYT (apoyos CB05-01-48499-Y y CB11-01-166397). El primer autor fue apoyado por una beca de Verano Científico del PROVERICYT de la UANL.

Referencias

1. S. I. Caballero Hernández. *Un procedimiento de búsqueda voraz, aleatorizado y adaptativo para el diseño eficiente de territorios de atención comercial con requerimientos de asignación conjunta*. Tesis de maestría, FIME, UANL, San Nicolás de los Garza, México, Mayo 2008.
2. Fleischmann y J. N. Paraschis. Solving a large scale districting problem: A case report. *Computers and Operations Research*, 15(6):521-533, 1988.
3. A. A. Zoltners y P. Sinha. Sales territory alignment: A review and model. *Management Science*, 29(11):1237-1256, 1983.
4. B. Bozkaya, E. Erkut y G. Laporte. A tabu search heuristic and adaptive memory procedure for political districting. *European Journal of Operational Research*, 144(1):12-26, 2003.
5. J. A. George, B. W. Lamar y C. A. Wallace. Political district determination using large-scale network optimization. *Socio-Economic Planning Sciences*, 31(1):11-28, 1997.
6. P. Grilli di Cortona, C. Manzi, A. Pennisi, F. Ricca y B. Simeone. *Evaluation and Optimization of Electoral Systems*. SIAM Monographs on Discrete Mathematics and Applications. SIAM, Philadelphia, EUA, 1999.
7. J. C. Williams Jr. Political redistricting: A review. *Papers in Regional Science*, 74(1):13-40, 1995.
8. J. A. Segura Ramiro. *Un algoritmo de localización-asignación para el diseño eficiente de planes territoriales de uso comercial*. Tesis de maestría, FIME, UANL, San Nicolás de los Garza, México, Junio 2008.
9. E. Erkut y S. Neuman. Comparison of models for dispersing facilities. *INFOR*, 29(2):68-83, 1990.
10. M. A. Salazar-Aguilar, R. Z. Ríos-Mercado y M. Cabrera-Ríos. New models for commercial territory design. *Networks and Spatial Economics*, 11(3):487-507, 2011.
11. T. H. Cormen, C. E. Leiserson, R. L. Rivest y C. Stein. *Introduction to Algorithms*. 2a Edición. McGraw-Hill, Cambridge, EUA, 2001.
12. ILOG, S.A. CPLEX 11.2 Online documentation, 2003. ftp://ftp.software.ibm.com/software/websphere/ilog/docs/optimization/cplex/ps_usrmanplex.pdf

13. B. A. Peña Cantú. *Evaluación de métricas de dispersión en sistemas territoriales*. Tesis de licenciatura. FIME, UANL, San Nicolás de los Garza, México, Octubre 2011.