Introducción a la Programación Dinámica: Parte 1 – Investigación de Operaciones

Roger Z. Ríos

División de Posgrado en Ing. de Sistemas
Universidad Autónoma de Nuevo León

http://yalma.fime.uanl.mx/~roger

Congreso Annual de la Sociedad Matemática Mexicana

F C F M – U A N L

24-25 Octubre 2019

¿Qué es la Investigación de Operaciones?

- Ciencia que brinda de soporte científico a la toma de decisiones
- Campo entre matemáticas aplicadas y ciencias de la computación
- Aplicaciones reales de tremendo impacto económico
- Evita el costosisímo ENSAYO y ERROR
- Colaboración multidisciplinaria

Aplicaciones Industriales

- Transportación y logística: cadena de abastecimiento, inventarios, fletes
- Manufactura: Secuenciación de operaciones, diseño
- Aviación: Asignación de vuelos y tripulaciones, determinación de tarifas, operaciones irregulares
- Servicios: Secuenciación de personal/turnos
- Recursos naturales: Gestión forestal, prevención de incendios, uso de agua, agricultura
- Sector salud: Localización de servicios médicos de emergencia, trasplantes renales cruzados

UANL
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

Importancia y Relevancia

- Aplicaciones en diversas áreas/ramas
- Decisiones avaladas científicamente
- Tremendo impacto económico / social

UANL
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

Metodología

- Modelaje matemático
- Análisis
- Derivación/desarrollo de método de solución
- Implementación computacional
- Evaluación experimental

UANL
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

Clasificación

- Investigación Operativa
  - Modelos estocásticos
  - Modelos Deterministas (Optimización)

Clasificación

Modelos Deterministas (Optimización)

- Programación lineal
- Programación entera
- Programación no lineal
- Programación dinámica
- Optimización combinatoria
- etc., etc.

UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

Problemas de Optimización

- **Características**

  - Cada decisión tiene un "costo" o "beneficio".

  - Cada decisión NO es libre, esta sujeta a restricciones tecnológicas o requerimientos empresariales o del sistema.

  - Se busca encontrar de entre TODAS las soluciones factibles, la que de el "mejor" rendimiento (valor óptimo de la función de desempeño).

  - Son "difíciles" de resolver.

UANL
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

¿Qué es Optimización?

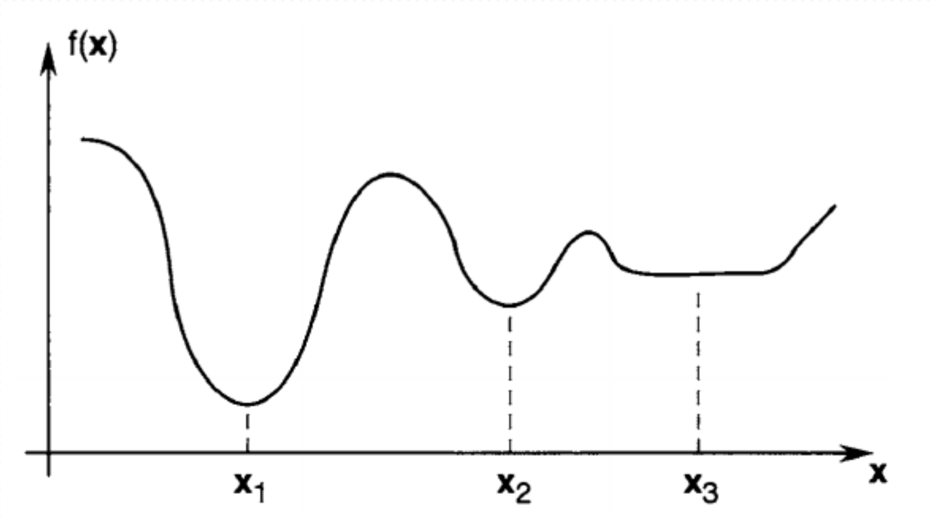
- **Optimización:** Disciplina de las matemáticas que involucra el encontrar (o buscar) puntos máximos y mínimos de funciones (de varias variables) sujetas a restricciones.
- Formalmente: Dado un vector de variables $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$
- Se busca:

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimizar} & z = f(x) \\
\text{sujeta a:} & g_i(x) \le b_i \qquad i = 1, \ldots, m \\
 & x \;\; \text{son variables continuas/enteras}
\end{array}
$$

UANL

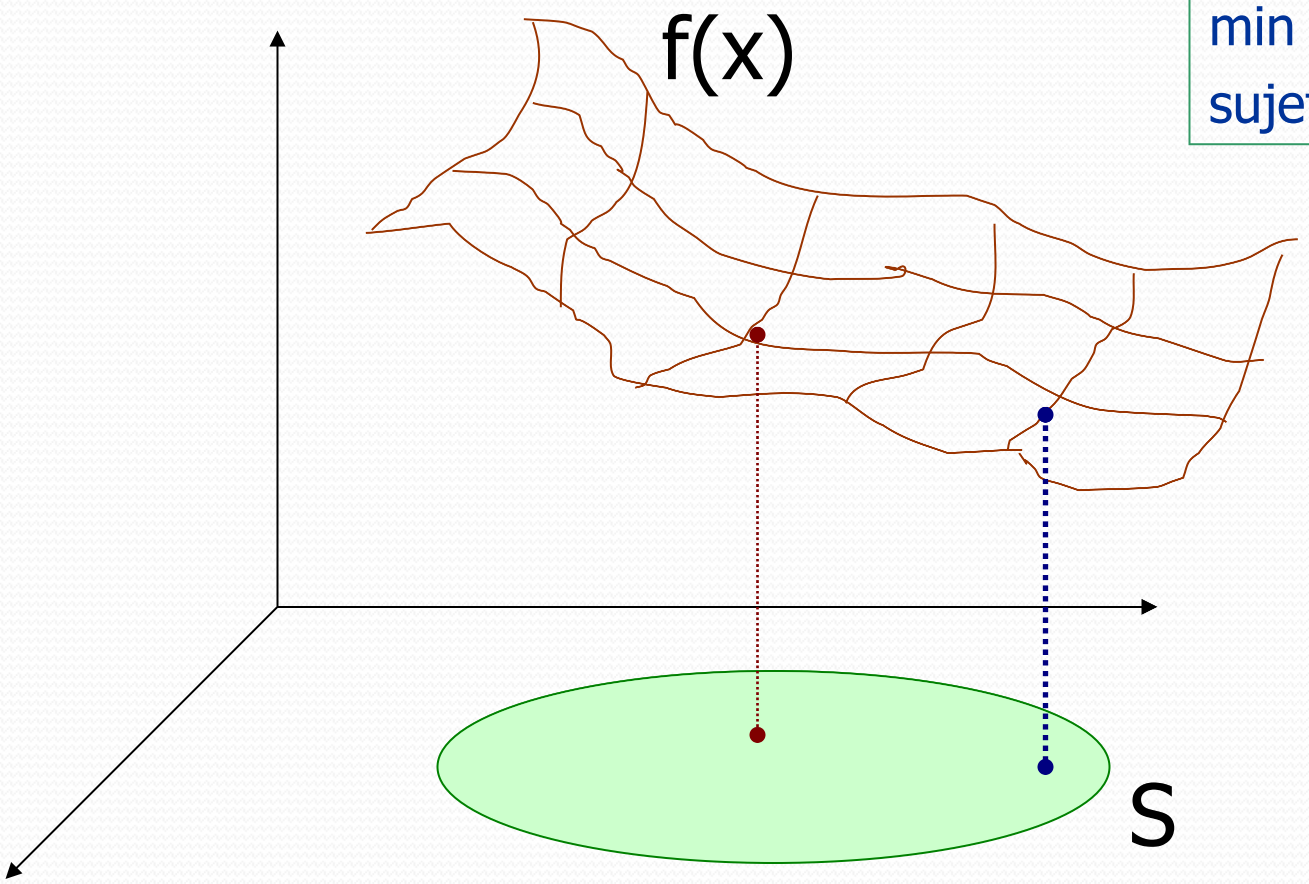
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

Optimización



x_1 : mínimo global (estricto)
x_2: : mínimo local (estricto)
x_3: : mínimo local

Problema de Optimización



min f(x)

sujeta a: $x \in S$

Tipos de Problemas

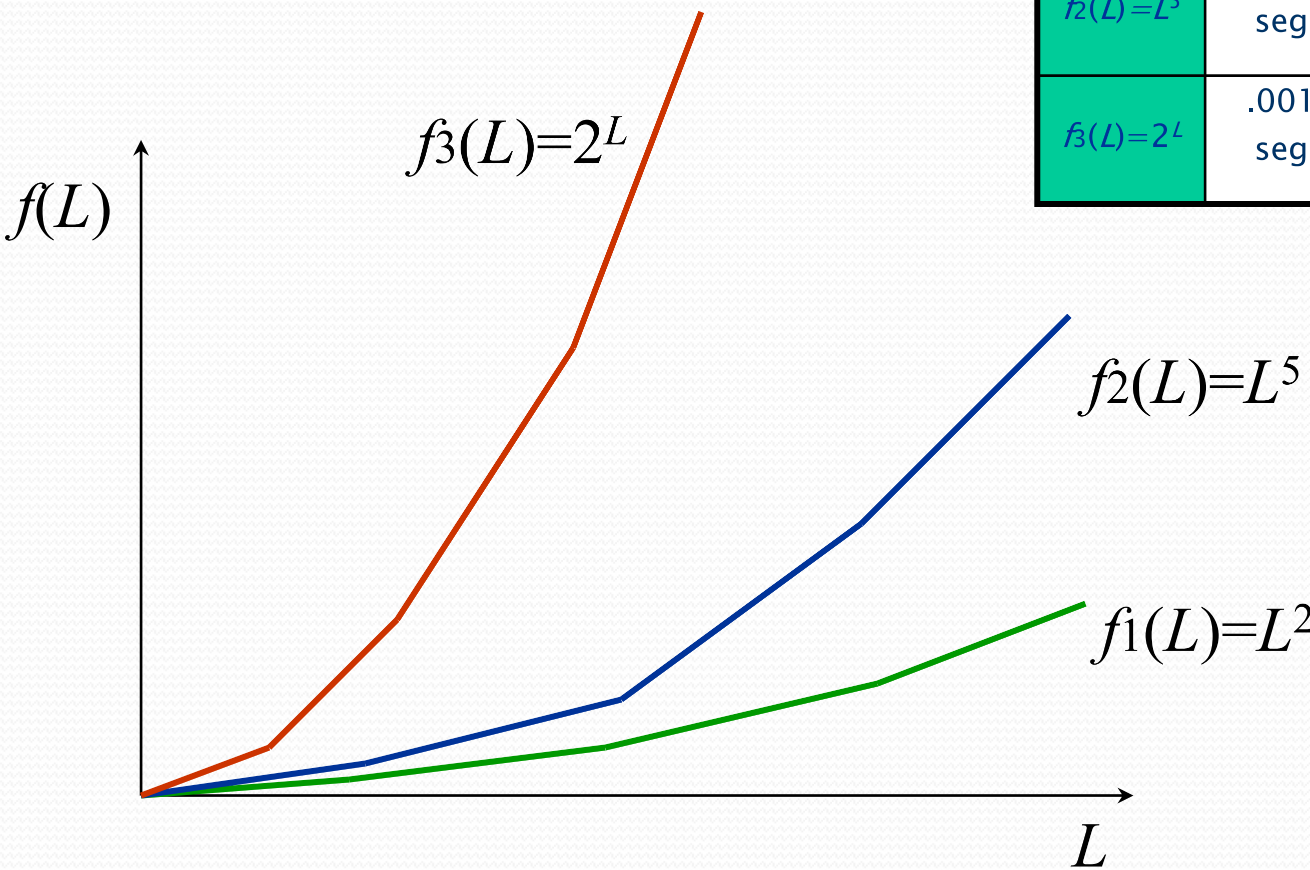
Variables / funciones	Lineales	No lineales
Continuas	LP	NLP
Enteras (discretas)	MILP	MINLP

LPs son "fáciles"
NLPs convexos son "fáciles"
NLPs no convexos son "difíciles"
MILPs son casi todos "difíciles"
MINLPs son casi todos "difíciles"

UANL
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

Complejidad Computacional: Problemas "fáciles" vs. "difíciles"

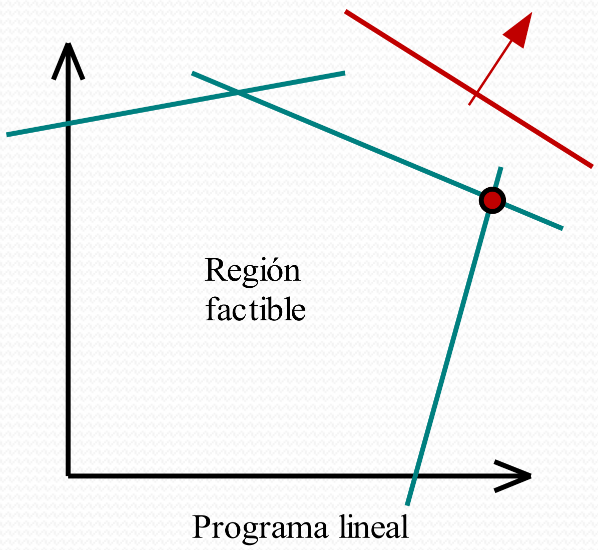
Tiempo de CPU (1 mflops/seg)			
$L =$	10	30	50
$f_1(L)=L^2$	.0001 seg	.0009 seg	.0025 seg
$f_2(L)=L^5$	.1 seg	24.3 seg	5.2 min
$f_3(L)=2^L$	.001 seg	17.9 min	35.7 años

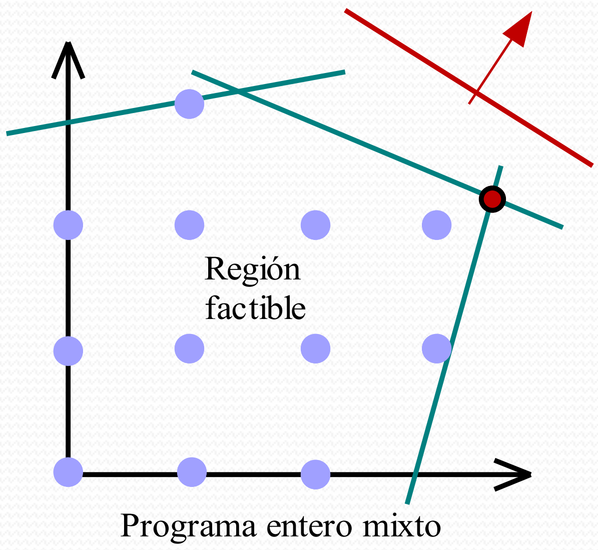


UANL

Problemas “difíciles”: Caso de variables enteras

¿Porqué es difícil de resolver?





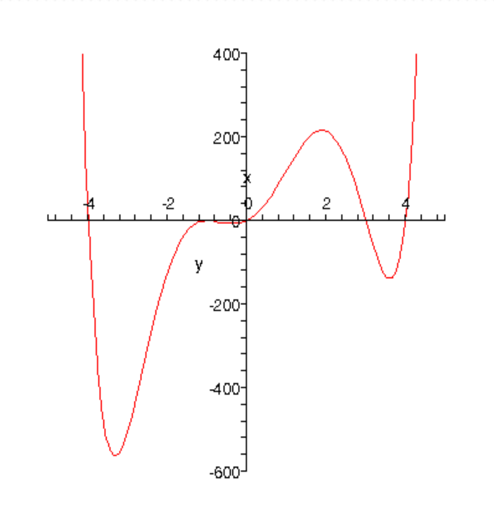
Problemas "difíciles": Caso de variables continuas

¿Porqué es difícil de resolver?

Condiciones de optimalidad

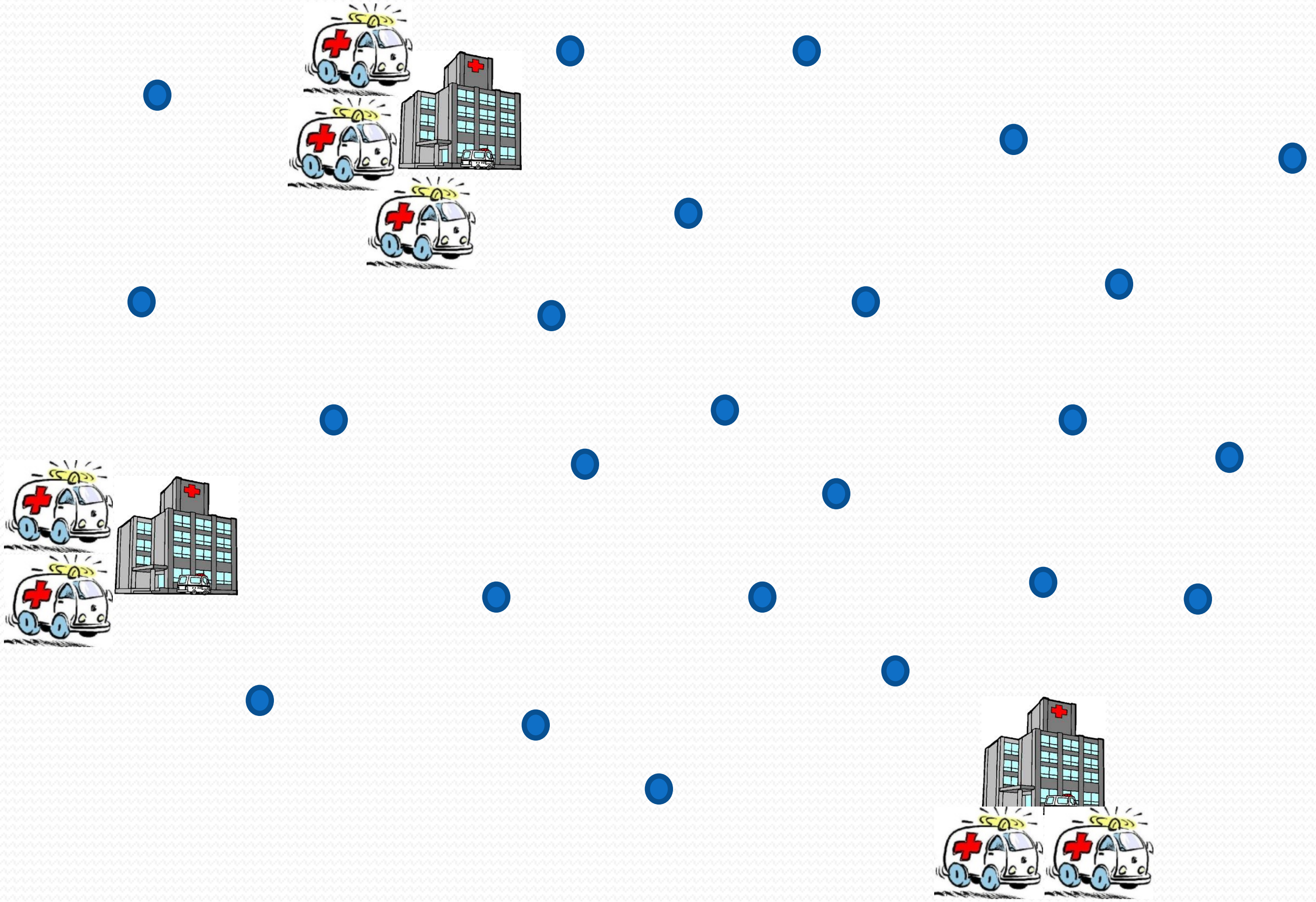
1er orden: $\nabla f(x^*) = 0$

2o orden: $H(x^*)$ debe ser positivo definido $(x^T H(x^*) x > 0)$

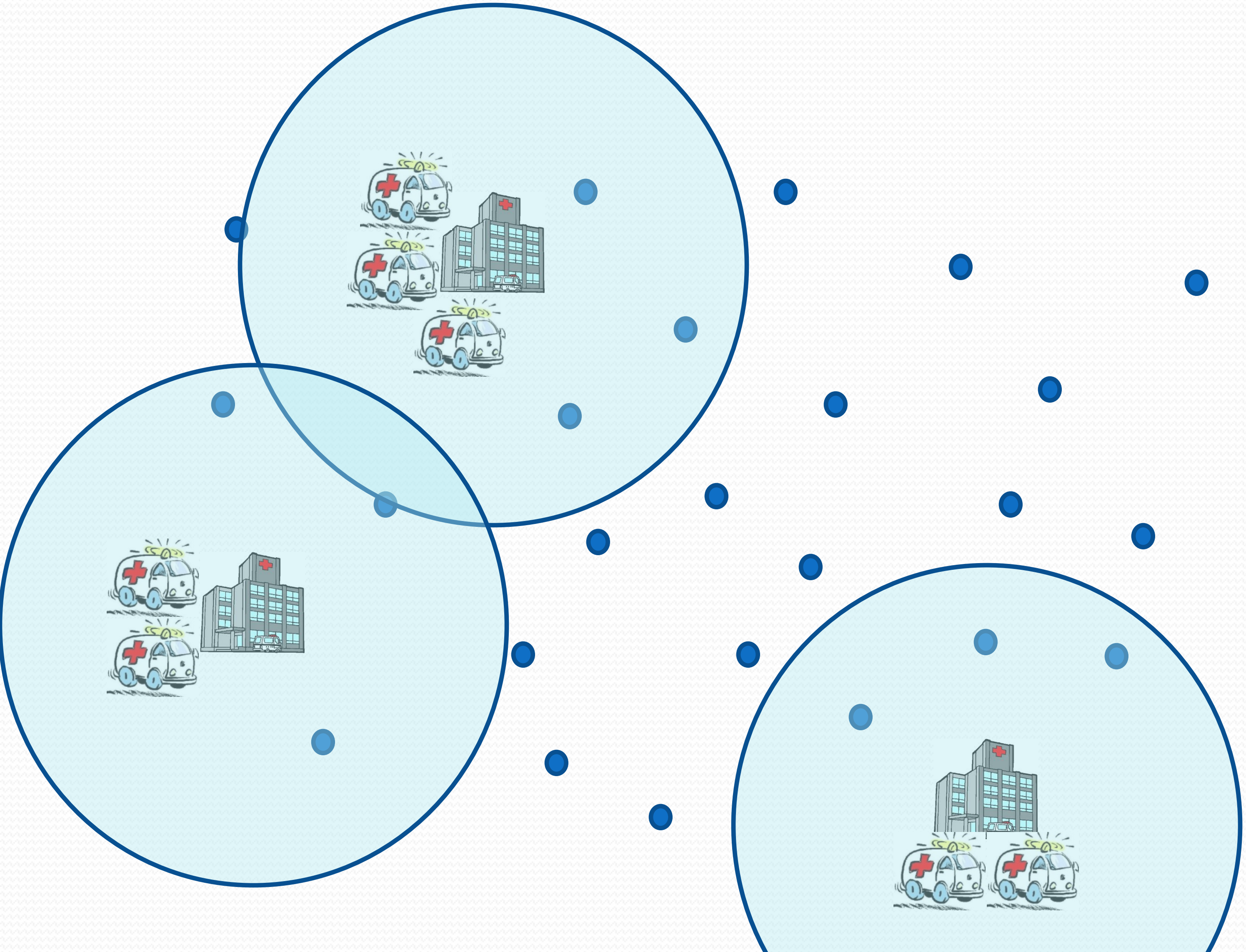


- Múltiples mínimos/máximos
- Problema no convexo
- Dimensión de x

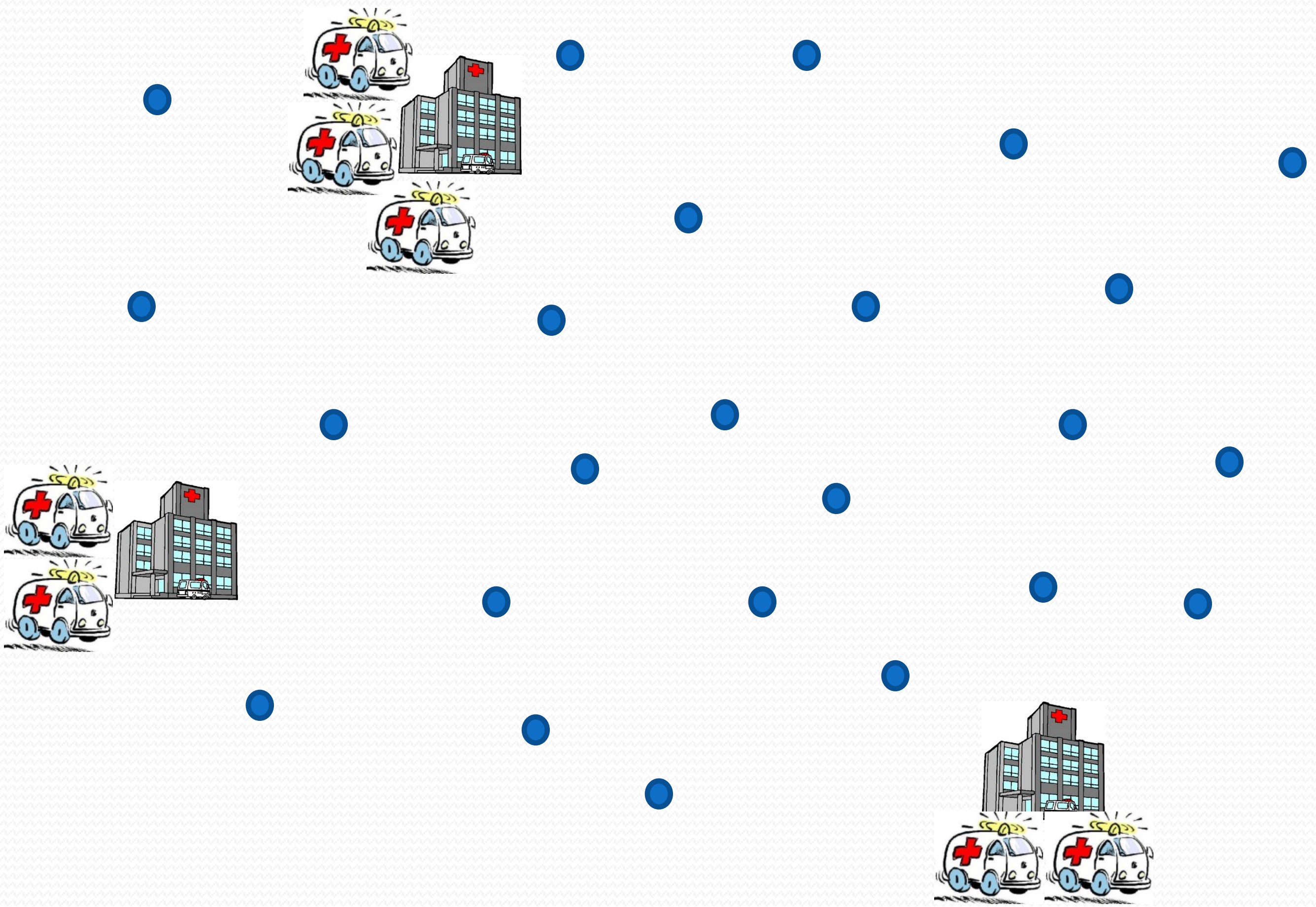
Ejemplo Problema Entero: Localización de ambulancias



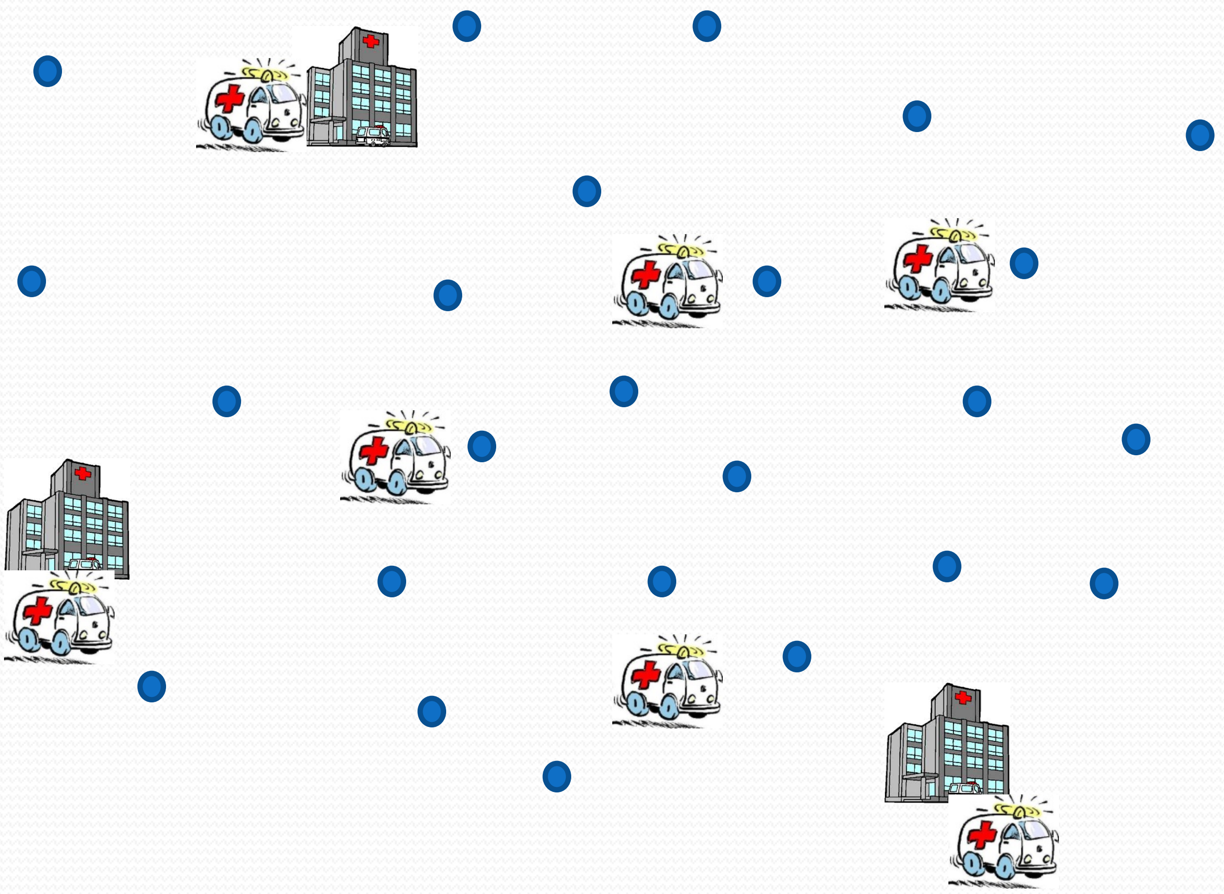
Ejemplo: Localización de ambulancias



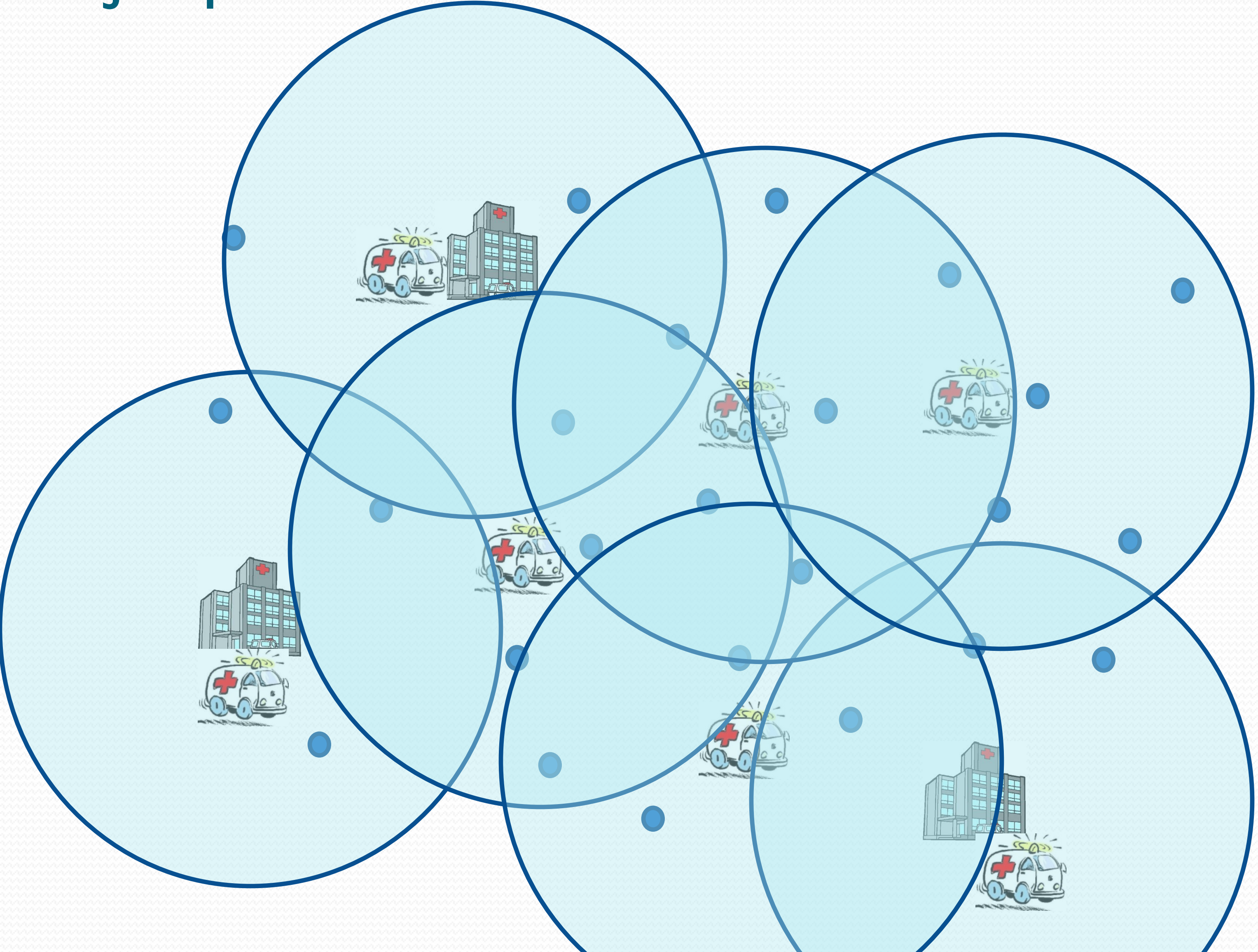
Ejemplo: Localización de ambulancias



Ejemplo: Localización de ambulancias



Ejemplo: Localización de ambulancias



Ejemplo: Localización de ambulancias

Objetivo:

Cómo ubicar las ambulancias para maximizar el número de potenciales clientes que reciben cobertura médica a tiempo en caso de emergencia

Sujeto a:

- Número limitado de *p* ambulancias
- Conjunto dado de sitios potenciales de ubicación

UANL
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

Ejemplo: Localización de ambulancias

- **Conjuntos/índices**
  - $C=\{1,2,\ldots,n\}$:= Conjunto de clientes; $i \in C$
  - $A=\{1,2,\ldots,m\}$:= Conjunto de sitios potenciales de ubicación; $j \in A$
  - N_i := Conjunto de sitios potenciales cuyo tiempo de traslado "cubren" al cliente i $(=\{j \in A : t_{ij} \leq T\})$
  - N_j := Conjunto de clientes que cuyo tiempo de traslado se "cubren" desde el sitio j $(=\{i \in C : t_{ij} \leq T\})$

- **Parámetros**
  - p := Número de ambulancias
  - T := Umbral de traslado crítico
  - t_{ij} := Tiempo de traslado entre cliente i y ambulancia en j

- **Variables de decisión**
  - Y_j := (Binaria 0-1) =1 se se ubica una ambulancia en el sitio j, =0 si no
  - X_i := (Binaria 0-1) =1 si el cliente i se cubre por al menos una ambulancia, =0 si no

UANL
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

Ejemplo: Localización de ambulancias

- **Objetivo**
  - Maximizar cobertura

$$\text{Max} \sum_{i \in C} X_i$$

- **Restricciones**
  - Localización

$$X_i \le \sum_{j \in N_i} Y_j \qquad i \in C$$

  - Cobertura

$$Y_j \le X_i \qquad j \in A, \;\; i \in N_j$$

  - Cota de ambulancias

$$\sum_{j \in A} Y_j = p$$

  - Integralidad

$$X_i, Y_j \in \{0,1\} \qquad i \in C, j \in A$$

Métodos de Solución (Problemas difíciles)

- **Solución Exacta (Algoritmos Enumerativos)**
  - Programación Dinámica
  - Ramificación y Acotamiento (Branch & Bound)
  - Ramificación y Corte (Branch & Cut)
  - Optimización Global

- **Solución Rápida (Heurísticas)**
  - GRASP
  - Búsqueda Tabú (Tabu Search)
  - Búsqueda Dispersa (Scatter Search)
  - Simulado recocido (Simulated Annealing)
  - Algoritmos evolutivos

UANL
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

Métodos Exactos vs. Rápidos

- Soluciones exactas puede tomar toda la vida obtenerlas
- Heurísticas son en general más prácticas en ambientes industriales
- Es necesario análisis de desempeño

Dificultades/Aspectos por enfrentar

- Existencia de solución óptima
- Cómo encontrarla
- Recursos requeridos (tiempo, memoria)
- Métodos de solución exacta vs. Heurísticas
- Calidad de soluciones
- Incertidumbre en los datos
- Reoptimización
- Explotación de estructura del problema

Colaboración conjunta

- IO es una ciencia multidisciplinaria
- Necesidad de resolver problemas muy complejos
- Uso eficiente de recursos
- Expertos en aplicaciones ←→ Expertos en optimización

UANL
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

Líneas de Investigación del Roger

[http://yalma.fime.uanl.mx/~roger/]

- **Modelado y análisis de problemas de toma de optimización discreta**
  - Modelado
  - Análisis, desarrollo, explotación de propiedades
- **Desarrollo de Algoritmos Eficientes de Solución**
  - Métodos exactos (solución óptima global)
  - Técnicas avanzadas de optimización metaheurística (solución rápida)
- **Aplicaciones**
  - Secuenciación en sistemas de manufactura (EUA)
  - Sistemas de transporte de gas natural (EUA)
  - Optimización de sistemas territoriales (Alemania, España)
  - Uso eficiente de recursos naturales (forestación)
  - Servicios médicos
  - Y lo que se deje…

UANL
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN