

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA
DIVISIÓN DE POSGRADO EN INGENIERÍA DE SISTEMAS

Examen de Admisión al Programa de
Doctorado en Ciencias en Ingeniería de Sistemas

Junio 2008

Nombre: _____

ÁLGEBRA LINEAL

1. (3 puntos) Pruebe que la matriz H es la inversa de M

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

2. (4 puntos) Dadas las matrices A y C abajo, determine la matriz B tal que $A \times B \times C = I$, donde I es la matriz identidad de orden 2.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 10 & -10 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$$

3. (4 puntos) Calcular el rango de la matriz

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

4. (4 puntos) Dadas las matrices A y B abajo, determine la matriz C tal que $A \times C = B$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

5. (5 puntos) Dado el sistema abajo. ¿Puede afirmarse que es compatible?

$$\begin{array}{rccccrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ & & x_2 & - & 5x_3 & + & 6x_4 & = & 2 \\ x_1 & + & 3x_2 & - & 8x_3 & + & 7x_4 & = & 3 \\ x_1 & + & 4x_2 & - & 13x_3 & + & 13x_4 & = & 5 \end{array}$$

6. (3 puntos) Dado el siguiente sistema de desigualdades, determine cuál es el valor máximo que puede tomar w y que satisfaga todas las desigualdades. ¿Cuál sería el valor mínimo de w que satisface todas las desigualdades? Justifique su respuesta.

$$\begin{array}{rccr} 2 & + & 3w & \leq & 20 \\ 36 & - & 4w & \geq & 0 \\ 10 & + & 5w & \leq & 0 \end{array}$$

CÁLCULO

1. (5 puntos) Halle los puntos que maximizan la función $f(x, y) = x^2 + y^2$ para $1 \leq x \leq 2$, $0.5 \leq y \leq 1$.
2. (2 puntos) Halle la suma $1 + 2 + 3 + \dots + n$ para $n = 2008$.
3. (3 puntos) Dado el punto A con coordenados (5,5) y una esfera con radio $R=2$ con el centro en el punto C con coordenados (0,0). Calcular la distancia entre el punto A y el punto más cercano de la esfera.
4. (2 puntos) Hállese el gradiente de la función $f(x, y) = (x + y)^2$ en el punto $x = 1$, $y = 2$.
5. (3 puntos) Encuentre dos números cuyo producto sea -12 y la suma de sus cuadrados sea mínima
6. (5 puntos) Hállese el punto de la parábola $\{(x,y) \mid x^2 = 4y\}$ más cercano al punto (0,1)
7. (3 puntos) Respóndase a la siguiente pregunta y justifíquese la respuesta. ¿Qué número es mayor 10000^{1000} ó 1000^{10000} ?

PROGRAMACIÓN LINEAL

1. (5 puntos) Resolver el problema de programación lineal

$$\begin{aligned} \max & 6x_1 + 4x_2 + x_3 \\ \text{sujeto a} & \quad x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 5 \\ & 0 \leq x_i \leq 2, \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

2. (6 puntos) Verificar si el vector dado $x_0 = (8, 0)$ es la solución óptima de la siguiente problema de programación lineal:

$$\begin{aligned} \max & 3x_1 + 2x_2 \\ & -2x_1 + x_2 \leq 2, \\ & x_1 + 2x_2 \leq 8, \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

3. (5 puntos) Resolver el problema de programación lineal

$$\begin{aligned} \min & x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 \\ & x_1 + x_2 \leq 3 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ & 2x_3 + x_4 \leq 6 \\ & x_3 - x_4 \leq 9 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

PROGRAMACIÓN DE FLUJO EN REDES

1. (10 puntos) El grafo siguiente muestra el sistema de caminos entre la entrada O de cierto parque y diversas instalaciones de servicio (demás letras). El parque contiene un mirador a un hermoso paisaje en la estación T. Unos cuantos tranvías transportan a los visitantes desde la entrada a la estación T. El administrador del parque se enfrenta a los siguientes problemas:
- (a) El primer problema consiste en determinar qué ruta, desde la entrada del parque hasta el mirador T es la que tiene la distancia total más corta para la operación de los tranvías (figura 1). En este caso, los números mostrados en cada arco indican distancia (km).

- (b) El segundo problema es que durante la temporada pico hay más personas que quieren tomar el tranvía a la estación T de las que se pueden acomodar. Para evitar la perturbación indebida de la ecología y de la vida silvestre de la región, se ha impuesto un racionamiento estricto en el número de viajes al día que pueden hacer los tranvías en cada camino. Así, durante la temporada pico, se pueden seguir varias rutas, sin tomar en cuenta la distancia, para aumentar el número de viajes diarios de los tranvías. La pregunta es cómo determinar las rutas para los distintos viajes de manera que se maximice el número total de viajes que se pueden hacer al día sin violar los límites impuestos en cada camino (figura 2). En este caso, los números mostrados en cada arco denotan el número máximo de viajes en ese arco.

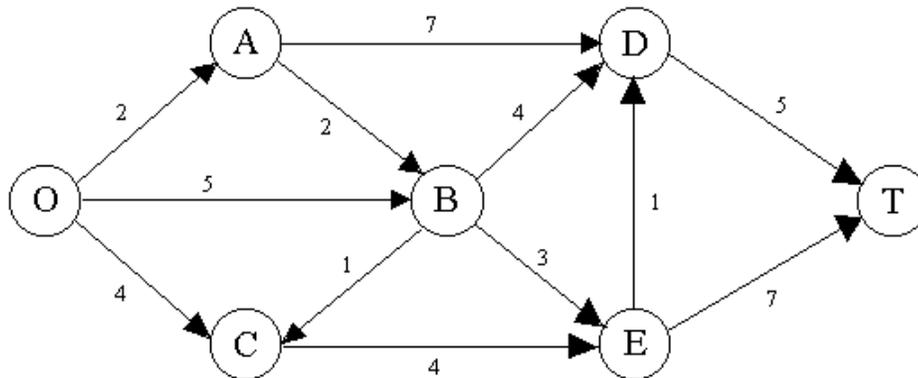


Figura 1

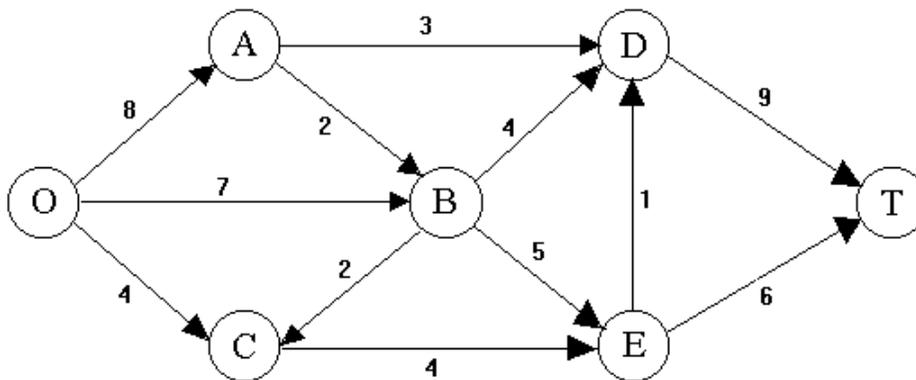


Figura 2

2. (10 puntos) Un convoy de guerra formado por 4 camiones que cargan suministros militares debe despacharse desde el depósito (vértice d) hacia las tropas (vértice t) (figura 3). Los caminos que conectan el depósito de suministros con las tropas constituyen los arcos del grafo de la figura 1 y las intersecciones de esos caminos constituyen los vértices. Por razones de seguridad se limita la cantidad de camiones que pueden viajar por cada camino, siendo

esta la capacidad asignada a los arcos.

- Determine si es posible realizar el envío completo.
- En caso negativo, diga cuántos camiones pueden ser enviados y por qué rutas.
- Además indique por qué no podrían enviarse los 4 camiones y qué podría hacerse para lograrlo.

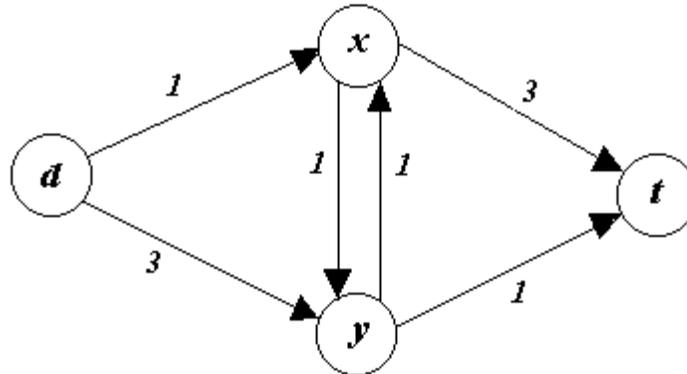


Figura 3

- (5 puntos) Modele cada problema siguiente a través de un grafo, explicando la interpretación de nodos, arcos flujos, así como números asociados a nodos y/o arcos. Así mismo diga qué algoritmo debe utilizarse para su resolución.
 - Un pasajero visita una aerolínea porque desea viajar desde Springfield, Illinois, hasta Ankara, Turkey. Aunque no hay vuelo directo, él solicita que el tiempo en el aire sea el menor posible porque teme volar. ¿Cómo debe la aerolínea seleccionar la ruta del pasajero?
 - Suponga que la aerolínea ha sido contactada por un grupo de 75 personas que desean hacer el mismo viaje (no necesariamente juntas), pero que el costo total del viaje de todo el grupo sea el menor posible.

PROGRAMACIÓN

- (10 puntos) Un número primo es aquel número entero que únicamente es divisible por sí mismo y por la unidad, por consiguiente un número no primo es aquel número entero que puede ser divisible por un número entero distinto a sí mismo y a la unidad. Por ejemplo, 5 es un número primo porque únicamente puede ser divisible por 1 ó por 5, pero 12 no es primo porque es divisible, por ejemplo, por 2. Escriba un programa o conjunto de pasos que tomen como input o entrada un número entero arbitrario n , y reporte como salida si el número es primo o no.

-
2. (10 puntos) Dada una sucesión finita (a_1, a_2, \dots, a_n) de n números reales (con posibles repeticiones), desarrolle un algoritmo que obtenga una sucesión no decreciente (ordenada de menor a mayor), con las mismas n componentes de la sucesión dada.