UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA
POSGRADO EN INGENIERÍA DE SISTEMAS

Examen de Calificación Doctoral de Probabilidad Agosto 2007

Resolver al menos cinco problemas completos de los siguientes ocho, justificando todas las respuestas.

1. Una caja con N focos contiene r unidades con filamentos rotos.

   (a) Estas se prueban uno por uno hasta encontrar un defectuoso.

   (b) Se prueban uno por uno hasta encontrar todos los defectuosos.

   Describir los espacios muestrales en (a) y (b).

2. Un estudiante debe contestar 8 de 10 preguntas en un examen.

   (a) ¿Cuántas maneras de escoger tiene?

   (b) ¿Cuántas maneras si las primeras tres preguntas son obligatorias?

   (c) ¿Cuántas, si tiene que contestar 4 de las primeras 5 preguntas?

3. A una persona se le dan 5 cartas rojas de una baraja de 52 cartas. ¿Cuál es la probabilidad de que todas sean del mismo palo?

4. Se tiene un paciente que necesita una transfusión de sangre y la transfusión debe concluir antes de los 20 minutos para que el paciente no muera. Hay disponibilidad de un médico y de 6 donadores voluntarios. Se conoce el tipo de sangre del paciente, se desconoce el tipo de sangre de los donadores y si el paciente recibe una transfusión de sangre que no sea la de su tipo morirá a causa de la conmoción que le provoque. Supongamos que el médico tarda 4 minutos en hacer el análisis de sangre de cada donador voluntario y 6 minutos en hacer la transfusión. Si bien el procedimiento usual para hacer la transfusión consiste en analizar la sangre y en caso de que sea del mismo tipo se procede a hacer la transfusión, el médico tomará la decisión que sea necesaria para que la probabilidad de que el paciente se salve sea máxima. Si la probabilidad de que un donador tenga el mismo tipo de sangre que el paciente es p ¿cuál es la probabilidad de que el paciente se salve?

5. Supongamos que una fuente radiactiva emite partículas y que el número de las mismas emitida durante un período de una hora tiene una distribución de Poisson con parámetro λ. Consideremos que el instrumento para contar esas emisiones falla ocasionalmente en anotar una partícula emitida. Supóngase, específicamente, que cualquier partícula emitida tiene una probabilidad p de ser anotada. Calcular $\mathrm{P}[Y = 4]$.

6. La jornada próxima se enfrentarán en un partido de futbol los equipos de Cruz Azul y Atlas. Se sabe que el Cruz Azul tiene una tasa de 2 goles por partido, mientras que el Atlas tiene una tasa de 1.7 goles por partido. Supongamos que el número de goles que anote un equipo en el partido es independiente del número de goles del otro y que tienen distribución de Poisson.

   (a) ¿Cuál es la probabilidad de que el Atlas gane el partido sin que el Cruz Azul anote gol?

   (b) Dar una serie que exprese la probabilidad de que el partido quede empatado.

   (c) Usar lo anterior para estimar con un error de menos de una milésima la probabilidad de que el partido quede empatado.

   (d) Dar un valor aproximado de la probabilidad de que el Cruz Azul gane.

7. Si una v.a. X tiene una f.g.m. dada por $\mathrm{M}_X(t) = \frac{1}{1-t^2}$, obtener la media y desviación estándar de X.

8. Supongamos que una partícula se mueve en el espacio en el cual se establece un sistema de coordenadas y parte del punto inicial $(0,0,0)$. Supongamos además que (X_t, Y_t, Z_t) representa la posición de la partícula en un tiempo $t > 0$ y su función de densidad conjunta f está dada por

$$f(x,y,z) = \frac{1}{(2\pi t)^{\frac{3}{2}}}\, \mathrm{e}^{-(x^2+y^2+z^2)/2t}\,.$$

   (a) Hallar al densidad marginal de X_t, su media y su varianza.

   (b) Demostrar que para cada t las variables aleatorias X_t, Y_t y Z_t son independientes e idénticamente distribuidas.