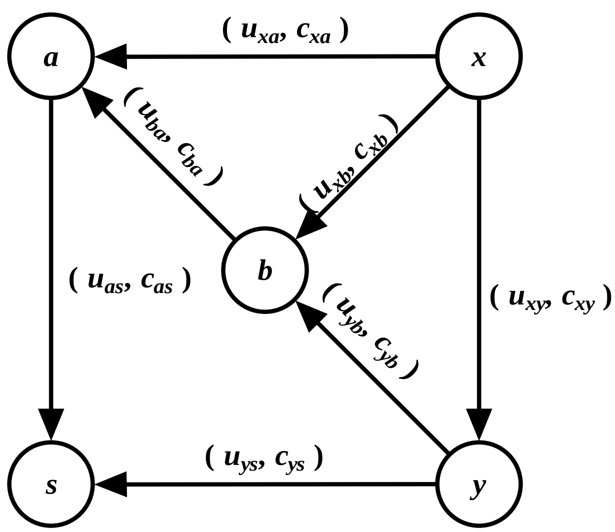
1. Considere la siguiente red, donde los números mostrados en cada arco (i, j) representan capacidad (u_{ij}) y costo unitario (c_{ij}), respectivamente. Una firma comercial posee un centro de ventas al público de un cierto tipo de artículos ubicada en el nodo ***s***. Esta firma tiene una demanda de al menos V unidades por mes que debe ser surtida por parte de sus proveedores (ubicados en los nodos ***x*** y ***y***). La firma vende los artículos al público a un precio unitario de W pesos. La distribución del producto de los proveedores a la firma se lleva a cabo a través de los arcos de la red dada. En este mes, existe el siguiente contrato con cada proveedor i (i = ***x***, ***y***). Primero, la firma se hace totalmente cargo de los costos de transporte. Segundo, cada proveedor i debe enviar a la firma un mínimo de F(i) unidades y un máximo de G(i) unidades a un precio de P(i) pesos/unidad, el cual es pagado naturalmente por la firma. El proveedor i ha acordado, a su vez, aceptar solicitudes por parte de la firma de hasta H(i) unidades adicionales (por arriba de su capacidad G(i)) a un costo mayor (para la firma naturalmente) de Q(i) pesos por unidad (Q(i) > P(i)). Además, la firma puede elegir no satisfacer el pedimento mínimo del proveedor i y por consiguiente comprar un número de unidades menor a F(i) con un costo de penalización de R(i) pesos por cada unidad por debajo de F(i). Esta decisión (de decidir comprar menos de las acordadas) se toma a partir de que se han recibido las unidades, es decir, la firma paga por su costo de transporte y su penalización R(i), mas no por su precio P(i).



Con el objetivo de maximizar su ganancia neta, la firma debe determinar cuántas unidades vender, cómo dividir el pedimento total entre los dos proveedores y cómo transportar la producción destinada desde cada proveedor. Suponga que V, W, F(i), G(i), H(i), P(i), Q(i), R(i) son parámetros conocidos con certeza. Desarrolle una formulación como problema de flujo de costo mínimo para resolver el problema de la firma. Tenga cuidado en dibujar y definir cada nodo con su correspondiente flujo neto y cada arco con su correspondiente capacidad, cota inferior y costo.

2. Sea $\boldsymbol{x}$ el vector solución óptimo de un problema de flujo máximo entre dos nodos dados s y t en una red arbitraria $G = (V, A)$, donde V es el conjunto de nodos, A el conjunto de arcos de la red, y u_{ij} es la capacidad del arco (i, j), para cada (i, j) en A. Suponga, además, que cuesta c_{ij} pesos el incrementar en una unidad la capacidad de cada arco (i, j) en G. Proponga y describa un método eficiente para resolver el problema de aumentar en una unidad el flujo s-t actual $\boldsymbol{x}$ a un costo mínimo, partiendo de esta solución óptima al problema original sin tener que reoptimizar el problema desde cero. Sea muy claro en el planteamiento y modelación de este nuevo problema, así como en el método de solución propuesto.

3. Para un grafo no dirigido cualesquiera $G = (V, E)$, donde V es su conjunto de nodos, E su conjunto de arcos, y d_{ij} es la distancia o costo de la arista (i, j) en G, un árbol de expansión T es aquel subgrafo acíclico y conexo de G que abarca todos los nodos de V. El costo del árbol está dado por la suma del costo de cada uno de las aristas que lo conforman: $c(T) = \sum_{(i,j)\in T} d_{ij}$ El clásico Problema del Árbol de Expansión Mínimo (PAEM) consiste en encontrar el árbol de expansión de mínimo costo total entre todos los posibles árboles de expansión existentes en la red dada. Ahora bien, para un árbol dado, se define su costo cuello de botella $b(T)$ como el máximo de los costos de las aristas que lo conforman $b(T) = \max_{(i,j)\in T}\{d_{ij}\}$. Por consiguiente el Problema del Árbol Expansión de Mínimo Cuello de Botella (PAEMCB) consiste en encontrar el árbol de expansión cuyo costo cuello de botella sea el menor entre todos los posibles. Proponga y derive un método eficiente que resuelva el PAEMCB. Sea claro y preciso en cada paso del algoritmo. Argumente convincentemente que su método es finito y que obtiene como solución el resultado esperado. ¿Cuál es la complejidad computacional de su método?