

**UMA HEURÍSTICA GRASP PARA MINIMIZAÇÃO DO CUSTO DE  
COMBUSTÍVEL NO TRANSPORTE DE GÁS NATURAL POR  
GASODUTOS**

**POLIANA FIGUEIREDO CARDOSO RODRIGUES**

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE – UENF**

**CAMPOS DOS GOYTACAZES – RJ  
FEVEREIRO DE 2010**

# **UMA HEURÍSTICA GRASP PARA MINIMIZAÇÃO DO CUSTO DE COMBUSTÍVEL NO TRANSPORTE DE GÁS NATURAL POR GASODUTOS**

**POLIANA FIGUEIREDO CARDOSO RODRIGUES**

Dissertação apresentada ao Centro de Ciências e Tecnologia, da Universidade Estadual do Norte Fluminense, como parte das exigências para obtenção do título de Mestre em Engenharia de Produção.

Orientador: Prof. José Ramón Arica Chávez – D.Sc.

CAMPOS DOS GOYTACAZES – RJ  
FEVEREIRO DE 2010

## FICHA CATALOGRÁFICA

Preparada pela Biblioteca do CCT / UENF

25/2010

Rodrigues, Poliana Figueiredo Cardoso

Uma heurística GRASP para minimização do custo de combustível no transporte de gás natural por gasodutos / Poliana Figueiredo Cardoso Rodrigues. – Campos dos Goytacazes, 2010. x, 77 f. : il.

Dissertação (Mestrado em Engenharia de Produção) -- Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro. Centro de Ciência e Tecnologia. Laboratório de Engenharia de Produção. Campos dos Goytacazes, 2010.

Orientador: José Ramón Arica Chávez.

Área de concentração: Pesquisa Operacional.

Bibliografia: f. 70-72.

1. Gás natural 2. GRASP 3. Gasodutos 4. Custo de combustível I. Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro. Centro de Ciência e Tecnologia. Laboratório de

# **UMA HEURÍSTICA GRASP PARA MINIMIZAÇÃO DO CUSTO DE COMBUSTÍVEL NO TRANSPORTE DE GÁS NATURAL POR GASODUTOS**

**POLIANA FIGUEIREDO CARDOSO RODRIGUES**

Dissertação apresentada ao Centro de Ciências e Tecnologia, da Universidade Estadual do Norte Fluminense, como parte das exigências para obtenção do título de Mestre em Engenharia de Produção.

Aprovada em 25 de Fevereiro de 2010

Comissão Examinadora:

---

Prof. Edson Kenji Iamashita, D.Sc.,  
Eng. de Petróleo – PETROBRÁS

---

Prof. Geraldo Galdino de Paula Junior, D.Sc. -  
LEPROD/UENF

---

Profa. Gudelia Guillermina Morales de Arica, D.Sc. -  
LEPROD/UENF

---

Prof. José Ramón Arica Chávez D.Sc.- UENF –  
Orientador - LEPROD/UENF

## AGRADECIMENTOS

A Deus pela força que tem me dado em todos os momentos da minha vida;

A Luiz Carlos, meu pai, e Terezinha, minha mãe, que estiveram sempre ao meu lado me apoiando e incentivando em todas as decisões e me enchendo de carinho e amor;

Aos meus irmãos, João Victor e Viviane, pela paciência, estímulo e atenção. Em especial a minha irmã pelo “português” sempre presente;

Ao meu marido, Waidson, pelo apoio nos momentos difíceis, pela paciência, estímulo e incentivo ao crescimento acadêmico e pessoal e pelo amor incondicional que me deu força para concluir este trabalho;

Aos familiares, avós, tios, tias e primos, por todo apoio e atenção dado durante a elaboração deste trabalho;

Ao Professor José Ramón Arica Chávez pela orientação, amizade, incentivo, apoio, credibilidade e confiança na concretização deste trabalho;

Aos professores e funcionários do Laboratório de Engenharia de Produção – LEPROD - pelo apoio na minha formação profissional, em especial a Professora Gudelia Guillermina Morales de Arica que sempre esteve disposta a me ajudar e me encorajou durante grandes conquistas. E aos meus colegas e amigos que fiz durante este tempo;

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES - pelo apoio financeiro;

A todos que de forma direta ou indireta contribuíram para realização desta dissertação.

# SUMÁRIO

Lista de Figuras.....	vi
Lista de Tabelas.....	viii
Resumo.....	ix
Abstract.....	x
CAPÍTULO I – INTRODUÇÃO.....	1
CAPÍTULO II – MODELAGEM DO PROBLEMA.....	7
2.1 Modelo Clássico.....	7
2.2 Modelo Generalizado.....	13
CAPÍTULO III – DOMÍNIO VIÁVEL DE UMA ESTAÇÃO DE COMPRESSÃO E FUNÇÃO CUSTO DE COMBUSTÍVEL.....	16
3.1 Domínio Viável do Modelo Clássico.....	16
3.1.1 Domínio Viável para um Único Compressor.....	16
3.1.2 Domínio Viável para uma Estação de Compressão Clássica.....	22
3.1.3 Aproximação para o Domínio $D$ da Estação Clássica.....	24
3.2 Domínio de uma Estação Generalizada.....	27
3.2.1 Aproximação do Domínio Viável de Modelo Generalizado.....	32
3.3 Função Custo de Combustível do Modelo Clássico.....	34
3.3.1 Função Custo de Combustível para um Compressor.....	34
3.3.2 Função Custo para uma Estação de Compressão.....	36
3.4 Função Custo de Combustível para uma Estação Generalizada.....	37
3.4.1 Aproximação para a Função Custo de Combustível.....	39
CAPÍTULO IV – METAHEURÍSTICA GRASP E EXEMPLOS NUMÉRICOS.....	41
4.1 Heurística GRASP.....	41
4.2 Domínio de uma Estação de Compressão.....	45
4.3 Cálculo da Função Custo de uma Estação de Compressão Generalizada.....	49
4.4 Testes Numéricos.....	56
CAPÍTULO V – CONCLUSÕES.....	67
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	70
ANEXO A.....	73

## LISTA DE FIGURAS

<b>Figura 2.1:</b> Equilíbrio de fluxo para um nó.....	8
<b>Figura 2.2:</b> Exemplo de uma rede simples.....	10
<b>Figura 3.1:</b> Relação entre $Q, S$ e $H$ em um compressor.....	18
<b>Figura 3.2:</b> Eficiência como uma função de $\frac{Q}{S}$ .....	19
<b>Figura 3.3:</b> Domínio viável $D^{unit}$ para um compressor.....	20
<b>Figura 3.4:</b> Perfil do domínio $D^{unit}$ para $p_s$ fixo.....	21
<b>Figura 3.5:</b> Domínio $D$ de uma estação com quatro compressores idênticos e em paralelo.....	23
<b>Figura 3.6:</b> Perfil do domínio $D$ de uma estação com quatro compressores idênticos e em paralelo.....	23
<b>Figura 3.7:</b> Aproximação linear externa do contorno (arco ABCD).....	25
<b>Figura 3.8:</b> Superconjunto $\bar{D}$ do domínio viável $D$ (estação com quatro compressores em paralelo).....	26
<b>Figura 3.9:</b> Perfil de $\bar{D}$ e $D$ (estação com quatro compressores em paralelo).....	27
<b>Figura 3.10:</b> Eficiência $\eta$ para os compressores de tipo A e B.....	29
<b>Figura 3.11:</b> Perfil dos domínios unitários de dois tipos diferentes de compressores ( $p_s = 500$ (psia)).....	32
<b>Figura 3.12:</b> Aproximação inteira para os perfis dos domínios unitários dos compressores do tipo A e tipo B.....	33
<b>Figura 3.13:</b> Aproximação linear externa para os perfis dos domínios unitários dos compressores do tipo A e tipo B.....	34
<b>Figura 3.14:</b> Função custo $g^{unit}(v, p_s, p_d)$ para $p_s$ fixo.....	35
<b>Figura 3.15:</b> Custo de combustível para diferentes números de compressores funcionando em uma estação com quatro compressores idênticos em paralelo.....	37
<b>Figura 4.1:</b> Exemplo de uma rede de distribuição de gás natural.....	43
<b>Figura 4.2:</b> Rede reduzida da Figura 4.1.....	43
<b>Figura 4.3:</b> Aproximação linear externa do contorno (arco ABCD).....	47
<b>Figura 4.4:</b> Rede do exemplo 1.....	57
<b>Figura 4.5:</b> Rede do exemplo 4.....	60
<b>Figura 4.6:</b> Rede do exemplo 6.....	61

<b>Figura 4.7:</b> Rede do exemplo 7.....	63
<b>Figura 4.8:</b> Rede do exemplo 8.....	64



## LISTA DE TABELAS

<b>Tabela 3.1:</b> Exemplo de divisão da taxa de fluxo de massa $v$ para compressores do tipo A e tipo B.....	30
<b>Tabela 3.2:</b> Erro máximo relativo das funções aproximadas.....	40
<b>Tabela 4.1:</b> Resultado final dos exemplos.....	65
<b>Tabela A.1:</b> Pressões da rede – Exemplo 1.....	73
<b>Tabela A.2:</b> Custo das estações de compressão - Exemplo 1.....	73
<b>Tabela A.3:</b> Pressões da rede - Exemplo 2.....	73
<b>Tabela A.4:</b> Custo das estações de compressão - Exemplo 2.....	73
<b>Tabela A.5:</b> Pressões da rede - Exemplo 3.....	73
<b>Tabela A.6:</b> Custo das estações de compressão - Exemplo 3.....	73
<b>Tabela A.7:</b> Pressões da rede - Exemplo 4.....	74
<b>Tabela A.8:</b> Custo das estações de compressão - Exemplo 4.....	74
<b>Tabela A.9:</b> Pressões da rede - Exemplo 5.....	74
<b>Tabela A.10:</b> Custo das estações de compressão - Exemplo 5.....	74
<b>Tabela A.11:</b> Pressões da rede - Exemplo 6.....	74
<b>Tabela A.12:</b> Custo das estações de compressão - Exemplo 6.....	74
<b>Tabela A.13:</b> Pressões da rede - Exemplo 7.....	75
<b>Tabela A.14:</b> Custo das estações de compressão - Exemplo 7.....	75
<b>Tabela A.15:</b> Fontes da Rede – Exemplo 8.....	75
<b>Tabela A.16:</b> Dados dos dutos – Exemplo 8.....	76
<b>Tabela A.17:</b> Pressões da rede – Exemplo 8.....	76
<b>Tabela A.18:</b> Custo das estações de compressão – Exemplo 8.....	77

## RESUMO

O transporte do gás natural em gasodutos se realiza por diferença de pressões. Devido a diversos fatores físicos, essa pressão se perde na medida em que o gás flui, devendo ser recomprimido a cada certo trecho por dispositivos do gasoduto denominados estações de compressão. Estas estações de compressão estão compostas por baterias de compressores que consomem parte significativa do gás transportado como combustível. Sendo importante, portanto, determinar configurações de operação dos compressores das estações, de forma a minimizar o custo do combustível usado para manter em operação o gasoduto.

Neste trabalho, aborda-se esse problema, conhecido como problema de minimização do custo de combustível em uma rede de transporte de gás natural, os modelos são não lineares, não convexos, de grande porte e não diferenciáveis, dificultando ainda mais a sua resolução. O problema que envolve a movimentação do gás natural utilizando uma rede complexa de dutos é *NP-Completo*, (i.e., o número de operações para a solução exata do problema aumenta exponencialmente com o tamanho do problema). O modelo de transporte proposto corresponde ao estado contínuo da rede e as variáveis do problema são as pressões nos nós, as vazões de gás nos dutos e as decisões de operação ou não dos compressores nas estações de compressão. A função que representa o custo de combustível é uma função complicada, pois é tipicamente não linear, descontínua e não está dada explicitamente. Além disso, o conjunto de soluções viáveis é não convexo.

Assume-se, aqui, a diferença de trabalhos anteriores, que as estações de compressão estão compostas por compressores não necessariamente idênticos e introduzem-se aproximações para a função custo e o domínio de viabilidade das estações de compressão, sabidamente complicadores do modelo estudado. Formula-se uma modificação de um algoritmo GRASP, que permite melhoras em relação a uma proposta inicial. Experimentos computacionais e comparações apresentadas ao final deste trabalho mostram resultados muito satisfatórios do algoritmo proposto.

Palavras – chave: Gás natural, GRASP, gasodutos, custo de combustível.

## ABSTRACT

The transportation of natural gas pipeline is realized by pressure difference. Due to various physical factors, that pressure is lost as the gas flows and should be recompressed each distance by devices called pipeline compressor stations. These compression stations are made up of batteries compressors that consume significant part of the transported gas as fuel. As important, therefore, to determine operation settings of the compressor stations, to minimize the cost of fuel used to keep operating the pipeline.

This work, broaches this problem, known as fuel cost minimization of natural gas pipeline networks, the models are nonlinear, non-convex, large and non-differentiable, making more difficult its resolution. The problem involves the movement of natural gas using a complex network of pipelines is NP-Complete, (i.e., the number of operations for the exact solution of the problem increases exponentially with the size of the problem). The transport model proposed corresponds to the steady-state of the network and the variables of the problem are the nodes pressures, the gas flow in pipelines and operating decisions or not of the compressors in the compressor stations. The function that represents the fuel cost is a complicated function, it is typically nonlinear, discontinuous and is not given explicitly. Besides, the set of feasible solutions is not convex.

It is assumed here, the difference from previous works, that compressor stations are not composed of identical compressors necessarily and approaches are introduced to the function cost and feasibility of field compressor stations, known complicating the model studied. It formulates a modification of a GRASP algorithm, which allows improvements in relation to an initial proposal. Computational experiments and comparisons presented at the end of this work show very satisfactory results of the proposed algorithm.

Keywords: Natural gas, GRASP, pipelines, fuel cost.

# **CAPÍTULO 1**

## **Introdução**

Nas últimas décadas o gás natural vem conquistando um papel fundamental no suprimento mundial de energia, como se pode observar, pois a participação do gás natural na demanda mundial de energia primária aumentou de 17% para 23% (PETROBRAS, 1998). As principais motivações que justificam esta tendência podem ser resumidas em:

- o gás natural apresenta maior volume e dispersão das reservas existentes no mundo, quando comparadas ao petróleo; e
- a crescente pressão de uma política ambiental favorável a utilização de uma fonte energética mais limpa e polivalente, que possa substituir a eletricidade nos estabelecimentos comerciais e residências, o óleo combustível no setor industrial, a gasolina e o diesel no setor de transportes e o carvão para geração termelétrica.

No Brasil esse crescimento acelerado de consumo de gás natural também tem sido observado, prevendo-se a passagem de 2,7%, em 1988, para aproximadamente 12% em 2010 (PETROBRAS, 1998).

Um dos motivos que tem contribuído para o aumento da necessidade de oferta de gás natural no país é o aumento da necessidade de energia elétrica. Com

a privatização do setor elétrico, iniciada em meados da década passada e a consequente crise de energia elétrica, o governo brasileiro começou a estimular a expansão da potência de usinas termelétricas a gás natural. Como justificativa para esta expansão tem-se que a construção de novas usinas hidrelétricas de grande porte se dificulta por razões ambientais e de financiamento, devido aos altos investimentos iniciais envolvidos (IAMASHITA, 2002).

O gás natural é produzido, muitas vezes juntamente com o petróleo (gás natural associado), através da extração nas bacias sedimentares da crosta terrestre. Ao chegar à superfície ele é tratado para remoção de impurezas, como água e outros gases. A seguir ele é transportado por gasodutos para as zonas de consumo e refino.

Plantas elétricas e algumas indústrias podem utilizar o gás natural diretamente, captado dos gasodutos. Residências e pequenas indústrias adquirem o gás de empresas distribuidoras. As empresas distribuidoras adicionam substância odorante ao gás por medida de segurança, para facilitar a identificação de vazamentos.

Segundo Vaz et al (2008), de acordo com as definições na Portaria ANP n. 104, a cadeia produtiva de gás natural é um conjunto de atividades de produção, transporte, comercialização, processamento, distribuição e utilização do gás natural que funcionam de forma integrada com um sequenciamento lógico de atividades, como em uma rede dividida em fases distintas. As fases são apresentadas a seguir:

- **Fase de exploração** – o processo exploratório está baseado em pesquisa sísmica e interpretação de resultados, em que os conceitos da geologia e da geofísica são amplamente utilizados. A exploração é a etapa inicial do processo e consiste no reconhecimento e estudo das estruturas propícias ao acúmulo de petróleo ou gás natural. Essa fase conduz a descobertas de reservatórios.

- **Fase de perfuração** – uma vez identificados os fatores que determinam a possibilidade de existência de hidrocarbonetos, é feita a perfuração de poços exploradores (primeiros poços em uma área produtora para confirmar a presença de acúmulo de hidrocarbonetos). Após a confirmação da existência e havendo viabilidade econômica, mais poços são perfurados para delimitar e desenvolver a formação produtora, permitindo a extração e o escoamento dos produtos.

- **Fase de desenvolvimento e produção** – depois de confirmada a existência de acumulação de hidrocarbonetos, inicia-se a fase de desenvolvimento e produção do campo produtor. Até esse ponto as indústrias de petróleo e gás natural caminham juntas. Nas áreas de produção, o gás é consumido internamente na geração de eletricidade e vapor, parte da produção é utilizada com gás *lift* (gás de elevação) para reduzir a densidade do petróleo e parte é reinjetada com objetivo de aumentar a recuperação do reservatório. O restante do gás é exportado para centros de tratamento ou pode ser queimado em tochas, caso não haja infra-estrutura suficiente que permita seu escoamento até um centro consumidor.

- **Fase de condicionamento** – o gás, para ser escoado para as Unidades de Processamento de Gás Natural (UPGNs) ou diretamente consumido, precisa antes passar pelas etapas de condicionamento, visando garantir a sua adequação à especificação requerida para consumo no próprio campo produtor e/ou para a sua transferência aos centros processadores.

- **Fase de processamento** – o gás natural condicionado é transferido por gasodutos até as UPGNs, onde é beneficiado e separado em produtos especificados para atendimento a clientes finais. Durante o processamento ocorre a separação dos componentes mais pesados do gás natural, gerando produtos de mais valor agregado e garantindo a especificação técnica adequada para comercialização do gás disponibilizado para venda.

- **Fase de transporte** – das UPGNs, o gás especificado para venda ao consumidor final é transportado até os Pontos de Entrega (PEs), para a efetiva transferência de custódia às companhias distribuidoras estaduais ou, de modo eventual, diretamente a um grande consumidor.

- **Fase de armazenamento** – embora ainda não seja uma etapa muito utilizada no Brasil, o gás natural pode ser normalmente armazenado, em poços de petróleo já exauridos ou em cavernas adaptadas para esse fim, de forma a garantir o suprimento dos fornecedores, em caso de aumento sazonal de consumo ou falha de entrega dos produtores por paradas não programadas dos sistemas de produção.

- **Fase de distribuição** – é nessa fase que o gás é entregue ao consumidor final. Essa etapa é realizada pelas companhias distribuidoras estaduais, as quais detêm a concessora do Estado para a realização dessa tarefa.

Neste trabalho o foco está no transporte de gás natural por rede de gasodutos, pois esta parte do processo é de grande importância financeira. Como destacam Almeida e Bicalho (2000), o desenvolvimento da atividade de transporte gera as seguintes implicações: custo de investimento elevado, baixa flexibilidade e grandes economias de escala. Tais economias, elucidadas por Laureano (2005), estão associadas a pesados custos fixos, custos de construção dos dutos, custos de compressores e menor queda de pressão com o aumento do diâmetro.

Para ser transportado em redes de gasodutos e distribuído em pontos de entrega, o gás natural passa por diversos dispositivos, como: gasodutos, reguladores, válvulas e compressores. Quando o gás flui através de uma rede de gasodutos, ocorre uma perda de energia e pressão devido à fricção que existe entre o gás e as paredes internas do gasoduto e a transferência de calor que existe entre o gás e o meio ambiente (AZEREDO, 2008). Assim, é necessário que seja comprimido ou recomprimido a altas pressões nas estações de compressão que fazem parte da rede de transmissão de gás (IAMASHITA et al., 2005). Entretanto, o custo de operação do sistema é altamente dependente do custo operacional das estações compressoras da rede (representa entre 25% e 50% do orçamento operacional total da empresa, segundo Luongo et al (1989)), que por sua vez, têm seus custos governados pelo número de compressores em operação durante o transporte (fundamentalmente pela quantidade de combustível gasto na compressão). Portanto, é de grande importância configurar os compressores existentes na estação de forma a minimizar o custo operacional das estações compressoras.

Vale destacar que cada estação de compressão tem *objetivos próprios* que precisam ser atendidos. Em uma rede de transporte de gás natural, além do gerenciamento de cada estação de compressão, precisa-se planejar a movimentação de forma global, pois assim, pode-se definir uma melhor estratégia para todo o sistema, levando em consideração a compatibilidade entre a oferta e a demanda, bem como as taxas de fluxos e os limites de pressão (JUBINI, 2008).

Assim, o problema de minimizar os custos de combustível usado para a compressão do gás natural durante seu transporte por gasodutos é um problema que vem merecendo a atenção de diversos pesquisadores (WU et al, 2000; RÍOS-

MERCADO et al 2000-2002; IAMASHITA, 2006; IAMASHITA et al, 2008; e, AZEREDO, 2008; entre outros).

Este problema foi modelado recentemente como um problema de programação não linear contínua (WU et al, 2000; RÍOS-MERCADO et al 2000-2002), onde a hipótese básica é que as estações de compressão estão formadas por compressores idênticos, dos quais um número determinado será selecionado para comprimir um dado fluxo de gás, dividindo por igual esse fluxo entre eles. Desta maneira evita-se a dificuldade de determinar *quais* compressores deverão entrar em operação em cada estação, reduzindo o problema a estabelecer *quantos* deverão operar.

Iamashita (2006) estudou um caso particular desse problema, no que o gasoduto conta com estações de compressão unicamente nos pontos de injeção de gás (não contendo estações de compressão intermediárias), mas permitindo que as estações contassem com compressores não necessariamente idênticos. Azeredo (2008) generalizou essa proposta, considerando estações de compressão intermediárias com compressores não necessariamente idênticos. Em ambos os casos o modelo que resulta é um modelo de programação misto-inteiro quadrático, não convexo, não diferenciável. Adicionalmente, os modelos contêm função objetivo e restrições estabelecidas implicitamente, o que dificulta enormemente a solução do problema. Por essa razão, para efeitos algorítmicos, os diversos autores desenvolvem propostas de aproximação explícita das funções dadas implicitamente. Neste caso devido ao fato de não usar métodos exatos, mas heurísticos, não se precisa de continuidade das funções e nem da convexidade dos domínios. Consequentemente, usar-se-ão a função custo e o domínio dos compressores originais, como propostos em Wu et al (2000).

Portanto, propõe-se com este estudo, abordar o problema de minimizar o custo de distribuição de gás natural por gasodutos que denominaremos de *generalizados* (para diferenciá-los dos que denominaremos de *clássicos*, onde as estações de compressão estão compostas por compressores não idênticos e idênticos, respectivamente), introduzindo modificações no algoritmo GRASP apresentado pelos autores mencionados, bem como verificar seu comportamento.

No Capítulo 2, apresenta-se o modelo matemático clássico e o generalizado, que busca minimizar o custo global de combustível das estações de compressão.



Já no Capítulo 3 apresentam-se os conceitos relacionados ao domínio *clássico* de uma estação de compressão (isto é, considera que as estações possuem compressores idênticos dispostos em paralelo de acordo com Wu *et al.* (2000), que aqui são denominadas “estações de compressão *clássicas*”). Por outro lado, apresentam-se, também, os conceitos relacionados ao domínio *generalizado* (isto é, consideram-se compressores não necessariamente idênticos, de acordo com Azeredo (2008) e Jubini (2008)). Discute-se, também, o conceito da função custo de combustível *clássico* e da função custo *generalizado*.

No Capítulo 4 se apresentam os algoritmos para o cálculo do domínio de uma estação de compressão e para a função custo, bem como experimentos numéricos realizados. Foram realizados oito experimentos numéricos, onde os dados foram retirados da literatura de Wu *et al.* (2000) e Borraz-Sánchez (2009), deve-se destacar que para os sete primeiros exemplos foram considerados estações de compressão compostas por três compressores de um único tipo e no último exemplo, isto é, o exemplo 8, considera-se estações com três compressores Tipo A e dois compressores Tipo B, ressaltando que somente os dados do compressor Tipo A correspondem ao exemplo original, pois os do Tipo B foram introduzidos para simular o caso de estações com compressores não idênticos com o algoritmo aqui proposto.

No Capítulo 5 estão as principais conclusões.

## CAPÍTULO 2

### Modelagem do Problema

Neste capítulo, apresenta-se um modelo matemático que busca minimizar o custo global de combustível das estações de compressão. Com esse objetivo, primeiro será apresentado o modelo desenvolvido por Rios-Mercado *et al.* (2000), aqui chamado de *modelo clássico*. Logo será apresentado o modelo desenvolvido por Jubini (2008) com algumas adaptações, visando melhor generalização do problema proposto, aqui chamado de *modelo generalizado*.

#### 2.1 Modelo Clássico

Considera-se aqui que uma rede de gasodutos que pode ser representada por um *grafo direcionado*  $G = (V; E)$  onde  $V$  é o conjunto de *vértices* ou *nós* e  $E \subset V \times V$  é o conjunto de *arcos* (representando os dutos e estações de compressão, com sentido de percurso). Eventualmente irá ser associado ao grafo direcionado  $G$  um grafo não direcionado (onde os arcos não direcionados se denominam *arestas*), denotando-o, também, por  $G$  (WU *et al.*, 2000).

No modelo clássico, Rios-Mercado *et al.* (2002) consideram estações de compressão compostas por compressores idênticos, sendo as restrições determinadas por:

- (i) equilíbrio de fluxos em cada nó;
- (ii) relação de fluxos e pressões de gás em cada duto;
- (iii) limites de pressão em cada nó; e,
- (iv) limites de operação para cada estação compressora de compressão.

As equações da restrição (i), equilíbrio de fluxos, são lineares; já as equações da restrição (ii), relação de fluxos e pressões, são não lineares.

Associa-se a cada nó  $i$ , uma vazão líquida, denotada por  $s_i$ . Se o nó  $i$  for nó fonte,  $s_i > 0$ ; se o nó  $i$  for nó de entrega,  $s_i < 0$ ; e, se o nó  $i$  for nó de transbordo,  $s_i = 0$ . Por razões de balanço de fluxos, a seguinte *condição de soma zero* deve ser satisfeita:

$$\sum_{j=1}^n s_j = 0 \quad (2.1)$$

O equilíbrio de fluxos em cada nó  $j$  determina que a vazão que entra num nó é igual à vazão que sai. Se  $u_{ij}$  é a vazão massa de gás na aresta  $(i,j)$ , o duto que vai do nó  $i$  ao nó  $j$ , a equação está dada como segue abaixo, representada na Figura 2.1.

$$\sum_{k:(i,k)=\text{arco}} u_{ik} - \sum_{j:(j,i)=\text{arco}} u_{ji} = s_j \quad (2.2)$$

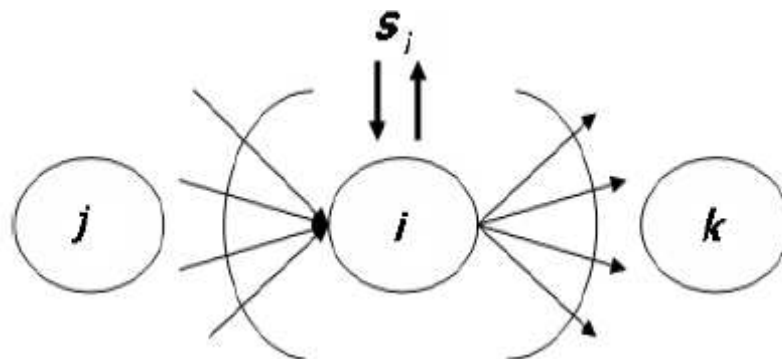


Figura 2.1: Equilíbrio de fluxo para um nó. (Fonte: Jubini, 2008)

A relação que representa o balanço de vazões e pressões nos dutos é não linear e não diferenciável, dada por:

$$p_1^2 - p_2^2 = cu|u|^\alpha \quad (2.3)$$

onde  $p_1$  e  $p_2$  são pressões dos nós referentes a cada extremidade do duto,  $u$  é a vazão massa de gás natural no duto,  $\alpha$  é uma constante (assume-se  $\alpha = 1$ ) e  $c$  é uma quantidade positiva determinada de acordo com os atributos físicos do duto e do gás natural, dada por (WU *et al.*, 2000):

$$c = K \frac{fL}{d^5} \quad (2.4)$$

onde  $K = (1,3305 \times 10^5)ZS_gT$ , sendo:

$Z$  – fator de compressibilidade do gás;

$S_g$  – gravidade específica do gás (ou densidade relativa);

$T$  – temperatura média do gás (°R), assumida constante;

$f$  – fator de fricção;

$L$  – comprimento do gasoduto (milhas);

$d$  – diâmetro interno do gasoduto (polegadas).

As variáveis principais da rede de gasoduto que modelam o problema são:

- $w_{ij}$ : taxa de vazão massa no arco  $(i, j)$ , (lbm/min);
- $p_i$ : pressão do gás no nó  $i$  (psia).

Para cada arco  $(i, j)$  existem três variáveis associadas:  $w_{ij}$ ,  $p_i$  e  $p_j$ , vazão massa de gás no arco e pressões nos extremos, respectivamente. Quando o arco  $(i, j)$  é uma estação de compressão,  $p_i$  e  $p_j$  são chamados de *pressão de sucção* ( $p_s$ ) e *pressão de descarga* ( $p_d$ ), respectivamente.

Considere uma rede de gasodutos com  $l$  dutos,  $n$  nós e  $m$  estações de compressão. Para cada duto se considera uma direção que, pode ou não, coincidir com o sentido do fluxo de gás no duto (caso o sentido do fluxo coincida com a direção considerada, o fluxo resultará positivo; caso contrário, resultará negativo).

Define-se  $A_l$  matriz de incidência nó-duto ( $n \times l$ ), cujos elementos estão dados por:

$$a_{ij}^l = \begin{cases} 1, & \text{se o duto } j \text{ sai do nó } i \\ -1, & \text{se o duto } j \text{ entra do nó } i \\ 0, & \text{em outro caso} \end{cases}$$

Analogamente, define-se  $A_m$  matriz de incidência nó-estação ( $n \times m$ ), cujos elementos estão dados por:

$$a_{ik}^m = \begin{cases} 1, & \text{se o nó } i \text{ é um nó de sucção da estação } k \\ -1, & \text{se o nó } i \text{ é um nó de descarga da estação } k \\ 0, & \text{em outro caso} \end{cases}$$

A partir de  $A_l$  e  $A_m$ , define-se a matriz  $A = (A_l \ A_m)$ , isto é, colocando  $A_m$  ao lado direito de  $A_l$ , resultando uma matriz  $n \times (l + m)$ .

A maneira de ilustração, na Figura 2.2, tem-se uma rede com  $n = 10$  (nós),  $l = 6$  (dutos) e  $m = 3$  (estações).

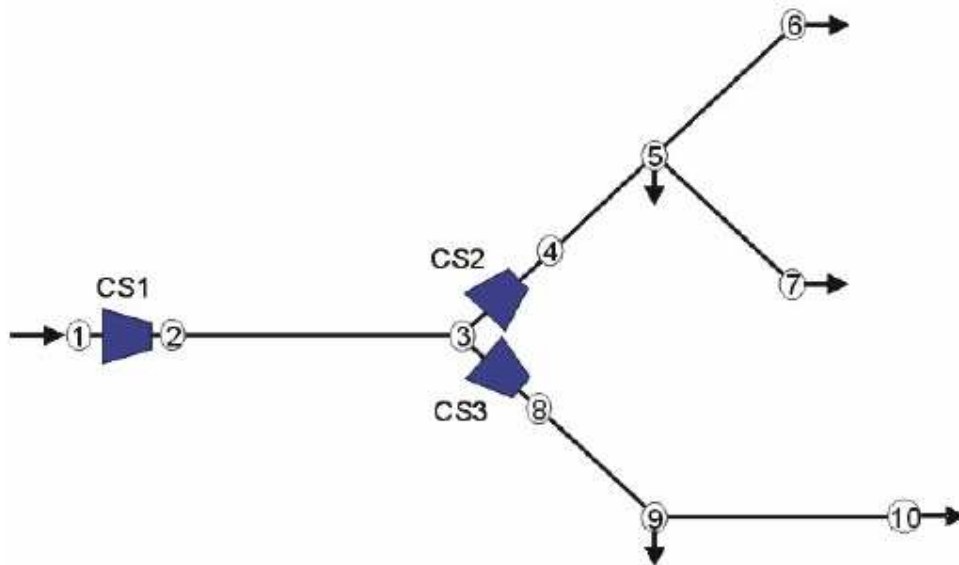


Figura 2.2: Exemplo de uma rede simples. (Fonte: WU *et al.*, 2000)

Assim,  $A_l$  e  $A_m$  para o exemplo de rede apresentado anteriormente são:

$$A_l = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad A_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

As equações de equilíbrio de fluxo podem ser escritas matricialmente da seguinte forma:

$$A_l u + A_m v = [A_l A_m] \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = A w = s \quad (2.5)$$

onde  $u^T = (u_1, \dots, u_l)$  e  $v^T = (v_1, \dots, v_m)$  representam as vazões massa através dos dutos e das estações, respectivamente;  $w^T = (u^T, v^T)$ , para  $u_j$  positiva se o sentido do fluxo coincidir com a direção atribuída ao duto e negativa caso contrário; e,  $s^T = (s_1, \dots, s_n)$  é o vetor de vazões líquidas.

A equação (2.3) pode ser escrita matricialmente da seguinte forma:

$$A_l^T p^2 = \phi(u) \quad (2.6)$$

onde  $(p^2)^T = (p_1^2, \dots, p_n^2)$ , para  $p_i$  a pressão no  $i$ -ésimo nó e  $\phi(u)^T = (\phi_1(u_1), \dots, \phi_l(u_l))$ , com  $\phi_j(u_j) = c_j u_j |u_j|^\alpha$ . Assim o conjunto de restrições de balanço do problema pode ser escrito pelo sistema como:

$$\begin{cases} A w = s \\ A_l^T p^2 = \phi(u) \end{cases}$$

Assume-se conhecido o vetor  $s$ , que atende a condição de soma zero (2.1). Logo, o problema consiste em determinar o vetor pressão  $p$ , o vetor vazão massa  $w$  e as pressões de cada nó, tal que o consumo total de combustível seja mínimo.

Assim, o modelo se formula da seguinte forma:

$$\text{Minimize } F(w, p) = \sum_{k=1}^m g_k(v_k, p_{ks}, p_{kd}) \quad (2.7)$$

$$\text{sujeito a } Aw = s \quad (2.8)$$

$$A_j^T p^2 = \phi(u) \quad (2.9)$$

$$p \in [p^L, p^U] \quad (2.10)$$

$$(v_k, p_{ks}, p_{kd}) \in D_k, k = 1, 2, \dots, m \quad (2.11)$$

onde os vetores  $p^L$  e  $p^U$  determinam limites inferiores e superiores para as pressões nos vértices e  $v_k$ ,  $p_{ks}$  e  $p_{kd}$  são, respectivamente, vazão massa a ser comprimida, pressão de sucção e pressão de descarga na estação  $k$ . A função  $g_k$  e o conjunto  $D_k$  correspondem ao consumo de combustível e ao domínio viável da estação  $k$ , respectivamente.

Devem-se ressaltar as seguintes propriedades (WU *et al.*, 2000):

1. O domínio viável  $D_k$  é não convexo e não é dado algebricamente de forma explícita.
2. As funções de consumo de combustível  $g_k$  são não lineares, não convexas e descontínuas.
3. As equações (2.9) são não diferenciáveis e definem um conjunto de restrições não convexo.
4. Trata-se de um problema de grande porte.

Devido à complexidade do problema (NP-completo, Ríos – Mercado *et al.*, 2000), com o objetivo de aplicar métodos de Programação Matemática Wu *et al.* (2000) e Rios-Mercado *et al.* (2004) desenvolvem aproximações polinomiais para a função custo, aproximações convexas para os domínios e supõem compressores idênticos nas estações. Já Azeredo (2008), Jubini (2008) e Christo (2008) generalizam o modelo anterior supondo compressores não necessariamente

idênticos e abordam o problema por uma técnica GRASP. Neste trabalho trata-se o modelo generalizado, introduzindo modificações no algoritmo GRASP proposto.

## 2.2 Modelo Generalizado

Trataremos agora do modelo para o problema de estado estacionário (ou contínuo), apresentado por Jubini (2008).

Para o modelo proposto por Jubini (2008) tratou-se o problema conforme Rios-Mercado *et al.* (2004), considerando um gasoduto como um grafo dirigido, sendo  $G = (N, L, M)$ , onde  $N$  representa o conjunto de  $n$  nós,  $L$  o conjunto de  $l$  dutos e  $M$  o conjunto de  $m$  estações de compressão, onde o conjunto de arcos associado a  $G$  é o conjunto  $A = L \cup M$ , com  $L \cap M = \emptyset$ .

Trata-se com as seguintes variáveis: vazão massa  $W_{ab}$ , variável de decisão em cada arco  $(a,b) \in A$  e  $p_a$  pressão do gás em cada nó  $a \in N$ . Considera-se ainda, que para cada nó  $a \in N$ , existe um parâmetro conhecido  $S_a$  chamado de vazão líquida, onde, se  $S_a \geq 0$  indica que o nó  $a$  é fonte, se  $S_a \leq 0$ ,  $a$  é nó de entrega e se  $S_a = 0$ ,  $a$  é nó de transbordo.

Definem-se os vetores  $p^L$ , pressão inferior,  $p^U$ , pressão superior para os nós e  $t_{ab}$  resistência do duto  $(a,b) \in A$ , determinada pelas propriedades físicas do duto e do gás, supostamente conhecidas.

Determinada estação  $(a,b) \in M$ , com  $K_{ab}$  compressores, as variáveis associadas a cada compressor  $k = 1, 2, \dots, K_{ab}$ , são:

- $w_{abk}$  : vazão massa no compressor  $k$ ;
  - $p_{ks}$  : pressão de sucção no compressor;
  - $p_{kd}$  : pressão de descarga no compressor;
  - $x_{abk}$  : variável binária (0, 1) de decisão de operacionalidade do compressor;
- $$x_{abk} = \begin{cases} 0, & \text{indica que o compressor } k \text{ está desligado} \\ 1, & \text{indica que o compressor } k \text{ está ligado} \end{cases}$$
- $g_{abk}(w_{abk}, p_{ks}, p_{kd})$  : função de custo de operacionalidade do compressor.



Tem-se que a vazão massa da estação  $(a, b)$  é igual à soma das vazões massa dos compressores em operação na estação, então:

$$W_{ab} = \sum_{k=1}^{K_{ab}} w_{abk} x_{abk} \quad (2.12)$$

O objetivo é minimizar o consumo global de combustível utilizado pelas estações de compressão em redes de transporte de gás natural, garantindo que as exigências de entrega estabelecidas ao longo de todo o sistema sejam cumpridas, considerando que em cada estação, só pode ser comprimida a vazão massa que for possível, atendendo os limites de pressão. Para o problema proposto, considera-se que não existe custo associado ao transporte de gás natural nos dutos e que a rede está em estado estacionário.

Assim, para uma estação de compressão  $(a, b)$ , com  $K_{ab}$  compressores não necessariamente idênticos, tem-se que o custo operacional é medido pela soma dos custos de cada unidade compressora, isto é,

$$g_{ab}(W_{ab}, p_{ab}^S, p_{ab}^D) = \sum_{k=1}^{K_{ab}} g_{abk}(w_{abk}, p_{abk}^S, p_{abk}^D) \quad (2.13)$$

Portanto uma rede de gás natural tem seu custo operacional medido pela soma dos custos das estações de compressão  $(a, b) \in M$ , isto é,

$$\sum_{(a,b) \in M} g_{ab}(W_{ab}, p_{ab}^S, p_{ab}^D) \quad (2.14)$$

A seguir tem-se o modelo matemático que tem como objetivo minimizar os custos operacionais de uma rede de transporte de gás natural, de acordo ao estabelecido. Esta formulação matemática foi elaborada para ser aplicada em uma rede com topologia cíclica, que sem modificações pode ser aplicada em uma rede acíclica.

O modelo matemático está dado por (JUBINI, 2008):

$$\text{minimizar } \sum_{(a,b) \in M} \sum_{k=1}^{K_{ab}} g_{abk}(w_{abk}, p_{abk}^S, p_{abk}^D) \quad (2.15)$$

$$\text{sujeito a } \sum_{b:(a,b) \in A} W_{ab} - \sum_{b:(b,a) \in A} W_{ba} = s_a, a \in N \quad (2.16)$$

$$W_{ab} = \sum_{k=1}^{K_{ab}} x_{abk} w_{abk}, (a,b) \in M \quad (2.17)$$

$$p_a^2 - p_b^2 = t_{ab} W_{ab} |W_{ab}|, (a,b) \in L \quad (2.18)$$

$$p_a \in [p_a^L, p_a^U], a \in N \quad (2.19)$$

$$(W_{ab}, p_{ab}^S, p_{ab}^D) \in D_{ab} \subset \mathbb{R}^3, (a,b) \in M \quad (2.20)$$

onde  $D_{ab}$  é o domínio operacional da estação de compressão  $(a,b) \in M$  definido em função dos domínios  $D_{abk}$  que corresponde ao domínio do compressor  $k$  da respectiva estação, para  $k = 1, 2, \dots, K_{ab}$ .

A vazão massa através da estação de compressão  $(a,b) \in M$  é igual a vazão de gás comprimido pelos  $k$  compressores que estão em operação, onde  $k = 1, \dots, K_{ab}$  está representada pela relação (2.17).

Na relação (2.19) se estabelecem os limites de pressão em cada nó  $a \in N$  e a restrição (2.20) representa o conjunto do domínio viável de operacionalidade de cada estação de compressão  $(a,b) \in M$ .

## **CAPÍTULO 3**

### **O Domínio Viável de uma estação de compressão e a Função Custo de Combustível**

Neste capítulo apresentam-se os conceitos relacionados ao domínio de uma estação de compressão. Wu *et al.* (2000) consideram que as estações possuem compressores idênticos dispostos em paralelo. Por outro lado, Azeredo (2008) e Jubini (2008) generalizam o conceito de estação de compressão, considerando compressores não necessariamente idênticos. Associado a esses conceitos, discute-se, também, o conceito da “função custo de combustível clássico”. Neste trabalho, quando se fizer referência ao domínio ou à função custo introduzidos por Wu *et al.* (2000), serão classificados como *clássicos*, já o domínio ou a função custo introduzidos por Azeredo (2008) e Jubini (2008), como *generalizados*.

#### **3.1. Domínio Viável do Modelo Clássico**

##### **3.1.1. Domínio Viável para um Único Compressor**

Para abordar os conceitos sobre o domínio clássico de uma estação, faz-se necessário apresentar as variáveis que estão relacionadas a um único compressor centrífugo (WU *et al.*, 2000):

$Q$ : vazão volume de fluxo de entrada no compressor, ( $ft^3 / min$ );

$S$ : velocidade de rotação do compressor, ( $ft / min$ );

$H$ : carga adiabática do compressor ("adiabatic head"), ( $lbf - ft / lbm$ );

$\eta$ : eficiência do compressor.

onde  $ft = \text{pés}$ ,  $min = \text{minutos}$ ,  $lbf = \text{libra força}$ ,  $lbm = \text{libra massa}$ .

Essas variáveis se relacionam da seguinte forma:

$$\frac{H}{S^2} = A_H + B_H \left( \frac{Q}{S} \right) + C_H \left( \frac{Q}{S} \right)^2 + D_H \left( \frac{Q}{S} \right)^3, \quad (3.1)$$

$$\eta = A_E + B_E \left( \frac{Q}{S} \right) + C_E \left( \frac{Q}{S} \right)^2 + D_E \left( \frac{Q}{S} \right)^3, \quad (3.2)$$

onde  $A_H, B_H, C_H, D_H, A_E, B_E, C_E$  e  $D_E$  são constantes do compressor, estimadas pelo método de mínimos quadrados.

Adicionalmente, tem-se que a velocidade  $S$  varia no intervalo  $S_{\min}$  e  $S_{\max}$ :

$$S_{\min} \leq S \leq S_{\max} \quad (3.3)$$

e que a razão  $\frac{Q}{S}$  está limitada a limites superior e inferior, *surge* e *stonewall*:

$$\text{surge} \leq \frac{Q}{S} \leq \text{stonewall} \quad (3.4)$$

A relação entre as variáveis  $Q, S$  e  $H$ , apresentada na equação (3.1), pode ser observada na Figura 3.1 a partir de dados coletados de um compressor.

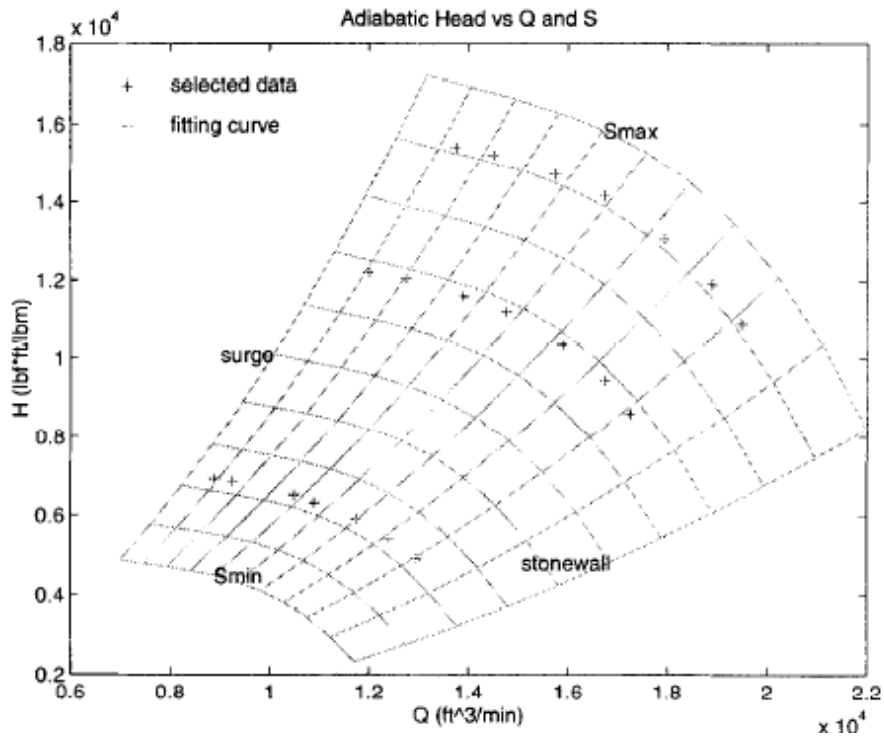


Figura 3.1: Relação entre  $Q$ ,  $S$  e  $H$  em um compressor (Fonte: Wu *et al.*,2000)

Para encontrar os respectivos valores de  $H$  basta fixar valores para  $S$  entre um  $S_{\min}$  e um  $S_{\max}$ , fazendo variar  $\frac{Q}{S}$  entre *surge* e *stonewall*. Assim, por ajuste de mínimos quadrados é possível determinar as constantes  $A_H, B_H, C_H$  e  $D_H$ .

Na Figura 3.2 representa-se a equação (3.2), que estabelece a eficiência  $\eta$  como uma função de  $\frac{Q}{S}$ , obtida a partir de dados coletados de um compressor.

As variáveis vazão massa ( $v$ ), pressão de sucção ( $p_s$ ) e pressão de descarga ( $p_d$ ) do gasoduto se relacionam com as variáveis do compressor da seguinte forma:

$$H = \frac{ZRT_s}{m} \left[ \left( \frac{p_d}{p_s} \right)^m - 1 \right] \quad (3.5)$$

$$Q = ZRT_s \frac{v}{p_s} \quad (3.6)$$

onde  $m = \frac{k-1}{k}$ ,  $k$  é o calor específico,  $Z$  é o fator de compressibilidade do gás,  $R$  é a constante do gás e  $T_s$  é a temperatura de sucção (assumida constante).

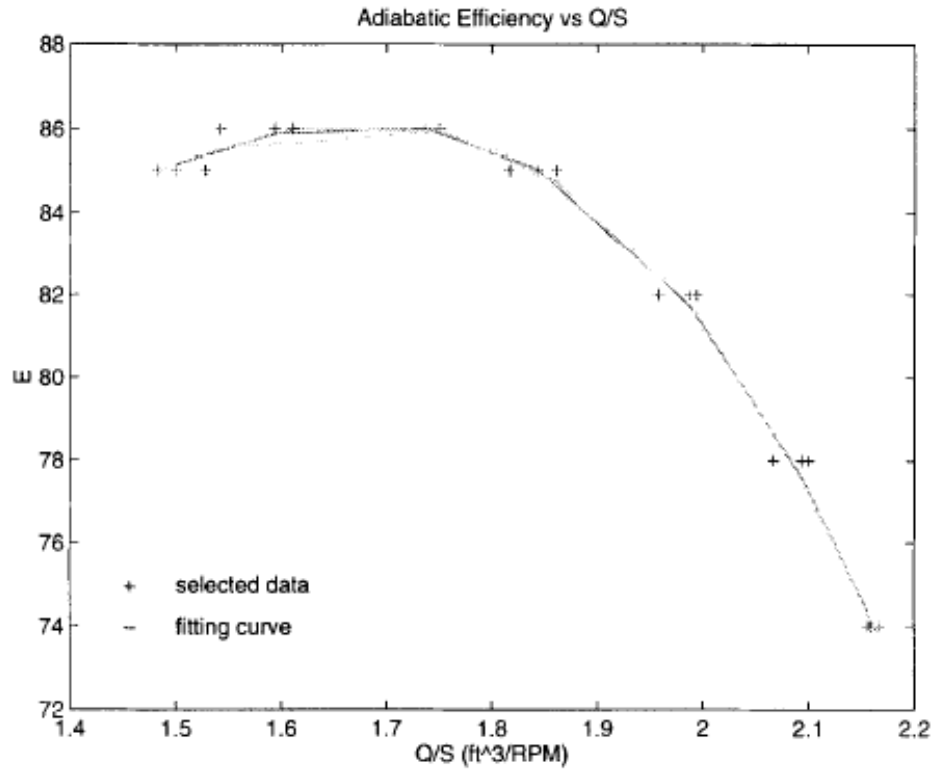


Figura 3.2: Eficiência como uma função de  $\frac{Q}{S}$  (Fonte: Wu *et al.*, 2000)

Pelas equações (3.3) e (3.4), segue-se que a vazão volume  $Q$  deve satisfazer:

$$Q^L \leq Q \leq Q^U \quad (3.7)$$

onde  $Q^L = S_{\min} \times surge$  e  $Q^U = S_{\max} \times stonewall$ .

A partir da Figura 3.1, tem-se que  $H$  é limitado inferiormente por  $S_{\min}$  ou *stonewall* e limitado superiormente por  $S_{\max}$  ou *surge*. Assim  $H^L(Q)$  e  $H^U(Q)$  são, respectivamente, o limite inferior e superior de  $H$ :

$$H^L(Q) \leq H \leq H^U(Q) \quad (3.8)$$

O domínio viável clássico para um único compressor, denotado por  $D_{unit}$ , está definido por:

$$D^{unit} = \left\{ (v, p_s, p_d) : p_s^L \leq p_s \leq p_s^U, v^L \leq \frac{v}{p_s} \leq v^U, G^L \left( \frac{v}{p_s} \right) \leq \frac{p_d}{p_s} \leq G^U \left( \frac{v}{p_s} \right) \right\} \quad (3.9)$$

onde:

$$V^L = \frac{Q^L}{ZRT_s} \quad (3.10)$$

$$V^U = \frac{Q^U}{ZRT_s} \quad (3.11)$$

$$G^L(q) = \left[ 1 + \frac{m}{ZRT_s} H^L(ZRT_s q) \right]^{\frac{1}{m}} \quad (3.12)$$

$$G^U(q) = \left[ 1 + \frac{m}{ZRT_s} H^U(ZRT_s q) \right]^{\frac{1}{m}} \quad (3.13)$$

o domínio  $D^{unit}$  ilustra-se na Figura 3.3, onde a faixa sombreada corresponde ao perfil do domínio para um  $p_s$  fixo. Este perfil pode ser visto na Figura 3.4.

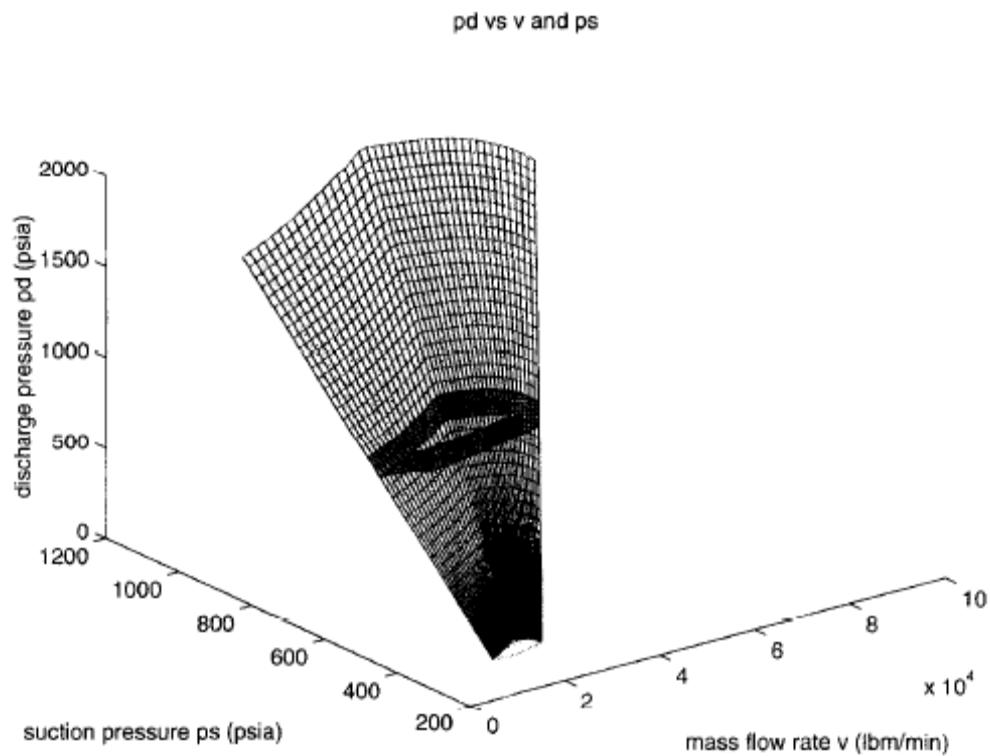


Figura 3.3: Domínio viável  $D^{unit}$  para um compressor. (Fonte: Wu *et al.*, 2000)

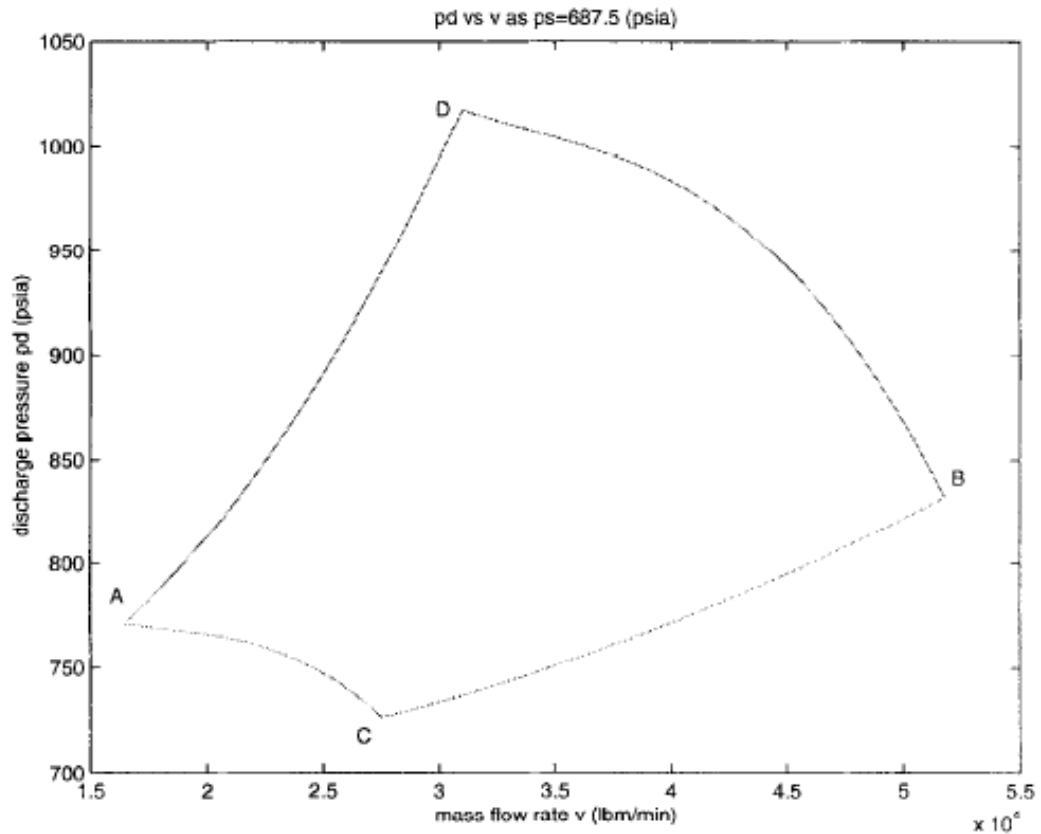


Figura 3.4: Perfil do domínio  $D^{unit}$  para  $p_s$  fixo. (Fonte: Wu *et al.*, 2000)

Nota-se, na Figura 3.4, que  $D^{unit}$  é um conjunto não convexo, e que os arcos  $AD$  e  $BC$  são convexos, enquanto  $DB$  e  $AC$  são côncavos. Em compressores centrífugos essa propriedade de não convexidade é característica.

De acordo com a Figura 3.3 e da relação (3.9), tem-se que o domínio  $D^{unit}$  é limitado. A superfície que limita superiormente o domínio é:

$$\left\{ (v(t, x), p_s(t, x), p_d(t, x)) = (tx, t, G^U(x)t) : p_s^L \leq t \leq p_s^U, V^L \leq x \leq V^U \right\} \quad (3.14)$$

Fixando um  $x$ , tem-se um segmento de reta dado por:

$$\left\{ (v(t), p_s(t), p_d(t)) = (tx, t, G^U(x)t) : p_s^L \leq t \leq p_s^U \right\} \quad (3.15)$$

Para todo  $x$ , temos  $(v(0), p_s(0), p_d(0)) = (0, 0, 0)$ , ou seja, todos os segmentos de reta de (3.15), se prolongados passam através da origem.

Portanto, o domínio  $D^{unit}$  da Figura 3.3, corresponde a um sólido cônico truncado.



### 3.1.2 Domínio Viável para uma Estação de Compressão Clássica

Considere-se uma estação de compressão com  $N$  compressores idênticos em paralelo, onde a vazão massa  $v$ , a ser comprimida na estação, é dividida igualmente entre os compressores ativos (em operação) e as pressões de sucção e descarga são as mesmas para os compressores da estação. Portanto, ao selecionar apenas um compressor para operar a estação o domínio viável corresponde ao domínio unitário de um compressor  $D^1 = D^{unit}$ , representado pela relação (3.9). Por outro lado, ao selecionar  $r$  compressores para operar,  $1 \leq r \leq N$ , tem-se que o domínio viável para cada compressor selecionado corresponde a  $D^r$ , dado por:

$$D^r = \left\{ (v, p_s, p_d) : \left( \frac{v}{r}, p_s, p_d \right) \in D^1 \right\} \quad (3.16)$$

Tem-se então que  $(v, p_s, p_d) \in D^r$  se, e somente se,  $\left( \frac{v}{r}, p_s, p_d \right) \in D^1$ , isto é, em cada compressor que estiver ativo passará um fluxo  $\frac{v}{r}$ . Assim sendo, o domínio viável da estação clássica está dado por:

$$D = \bigcup_{r=1}^N D^r \quad (3.17)$$

Na Figura 3.5 tem-se o gráfico do domínio  $D$  para uma estação com quatro compressores idênticos e em paralelo. Na figura o perfil do domínio para um  $p_s$  fixo é representado pela área mais escura.

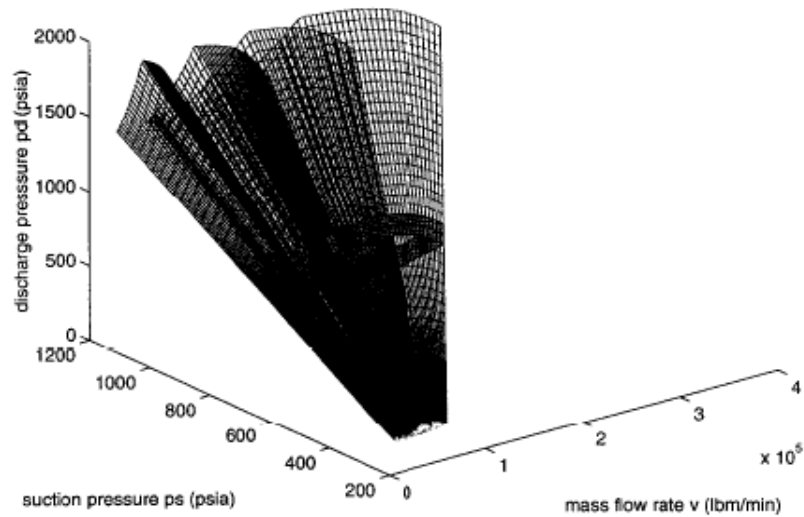


Figura 3.5: Domínio  $D$  de uma estação com quatro compressores idênticos e em paralelo. (Fonte: Wu *et al.* (2000))

Na Figura 3.6, pode-se observar o perfil do domínio  $D$ , onde se mostram os domínios  $D^1$ ,  $D^2$ ,  $D^3$  e  $D^4$ . Observa-se que o domínio  $D^r$  se obtêm a partir da expansão em  $r$  vezes do domínio  $D^1$  na direção de  $v$ .

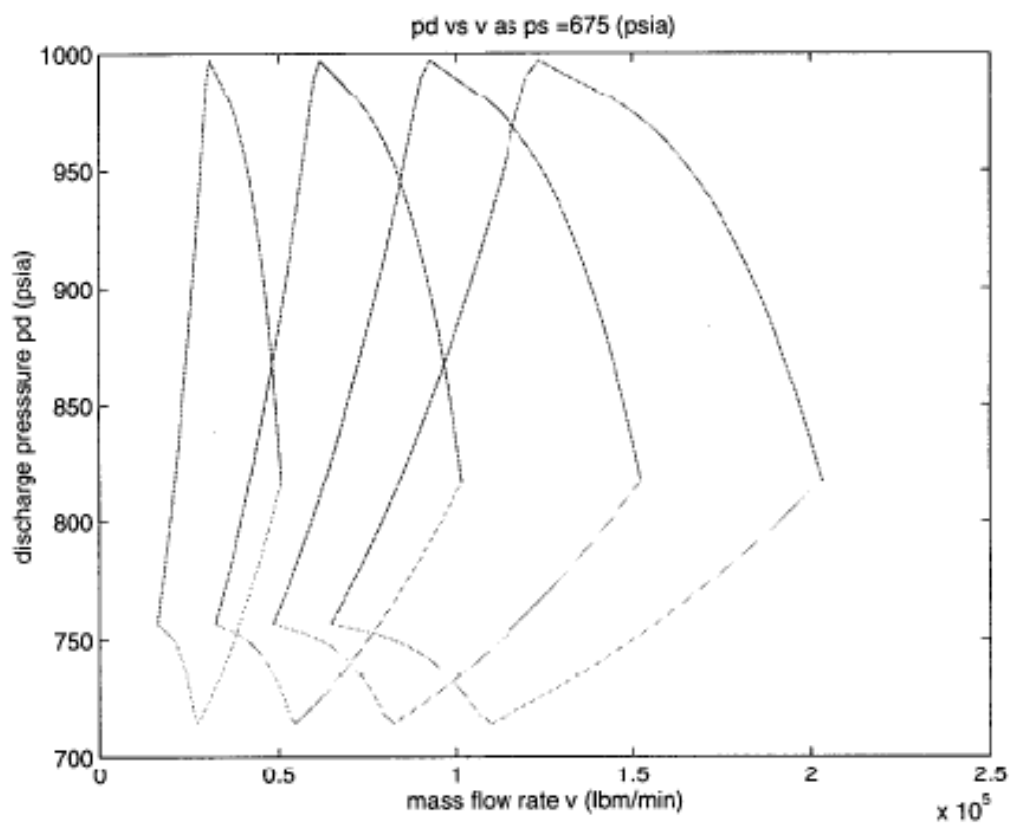


Figura 3.6: Perfil do domínio  $D$  de uma estação com quatro compressores idênticos e em paralelo. (Fonte: Wu *et al.* (2000))

Tem-se que o domínio  $D$  é conexo, apesar de o domínio depender das características dos compressores nele instalado. Uma condição necessária para que o domínio  $D$  seja conexo é:

**Lema 3.1.** (Wu et al, 2000) *Se o domínio viável  $D$  de uma estação com unidades paralelas idênticos for conexo, então*

$$\frac{Q^U}{Q^L} \geq 2$$

onde  $Q^L$  e  $Q^U$  são taxas volumétricas de fluxo mínimo e máximo, respectivamente.

### 3.1.3 Aproximação para o Domínio $D$ da Estação Clássica

Devido à dificuldade de trabalho com domínios não convexos para aplicação de métodos de Programação Matemática, Wu et al. (2000) propõem uma aproximação convexa (poliedral) para o domínio  $D$  da estação clássica. A partir, da

relação (3.17),  $D = \bigcup_{r=1}^N D^r$ , os autores propõem uma aproximação exterior poliedral

convexa para  $D^1$  que se estende na direção de  $v$ , obtendo um superconjunto  $\bar{D}$  para o domínio  $D$ .

Para determinar o superconjunto para  $D^1$  inicialmente se faz uma aproximação linear externa para o contorno ABCD (Figura 3.4) e, então, conecta-se o contorno linear externo com a origem.

O trabalho de Wu et al. (2000) utiliza esta aproximação linear que consiste em seis hiperplanos. O objetivo principal parece ser o de manter o modelo pequeno e simples. Testes computacionais verificaram que esta aproximação é boa o suficiente.

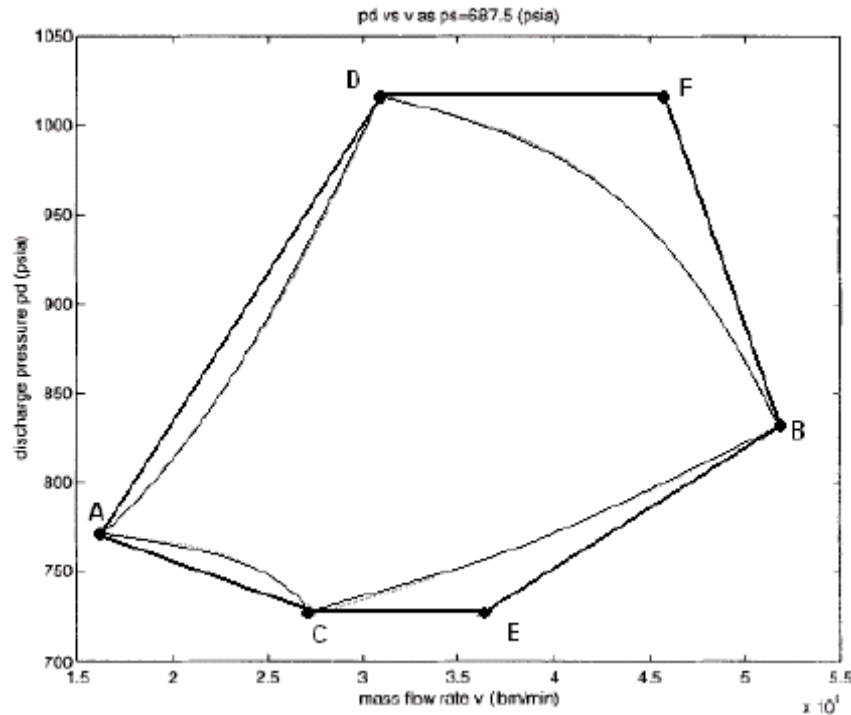


Figura 3.7: Aproximação linear externa do contorno (arco ACBD) (Fonte: Wu *et al.*, (2000))

Para formar a aproximação linear externa para contorno ACBD, têm-se os seis segmentos de retas:  $AD$ ,  $DF$ ,  $FB$ ,  $AC$ ,  $CE$ , e  $EB$ , mostrados na Figura 3.7, que conectados com a origem gera seis planos. Esses planos juntamente com  $p_s = p_s^L$  e  $p_s = p_s^U$  formam um superconjunto linear do domínio  $D^1$ . As equações desses planos que corresponde aos segmentos de reta:  $AD$ ,  $DF$ ,  $FB$ ,  $AC$ ,  $CE$ , e  $EB$ , têm a seguinte forma:

$$p_d = a_i v + b_i p_s, \quad i = 1, \dots, 6 \quad (3.18)$$

onde  $a_i, b_i$  são constantes que podem ser calculadas pelos valores das funções  $G^L$  e  $G^U$  nos pontos A, B, C, D, e as derivadas no ponto B.

Numa estação de compressão com  $N$  compressores idênticos em paralelo, o superconjunto linear  $\bar{D}$  do domínio  $D$  pode ser construído baseado no superconjunto linear  $D^1$ . Para fazer isso se movem os dois planos correspondentes aos segmentos de reta  $BE$  e  $BF$  na direção de  $v$  até o novo valor de  $v$  para que cada ponto seja exatamente  $N$  vezes o valor original de  $v$ . Assim,  $D$  consiste de todos os pontos  $(v, p_s, p_d)$  que satisfazem:

$$p_s^L \leq p_s \leq p_s^U \quad (3.19)$$

$$p_d \leq a_1 v + b_1 p_s \quad (3.20)$$

$$p_d \leq b_2 p_s \quad (3.21)$$

$$p_d \leq \frac{a_3 v}{N} + b_3 p_s \quad (3.22)$$

$$p_d \geq a_4 v + b_4 p_s \quad (3.23)$$

$$p_d \geq b_5 p_s \quad (3.24)$$

$$p_d \geq \frac{a_5 v}{N} + b_6 p_s \quad (3.25)$$

O superconjunto  $\bar{D}$  junto com o domínio  $D$  para uma estação com quatro unidades idênticas em paralelo, pode ser visto na Figura 3.8. Na Figura 3.9 observa-se o perfil do domínio  $D$  junto com o perfil da aproximação de  $D$ , o  $\bar{D}$ .

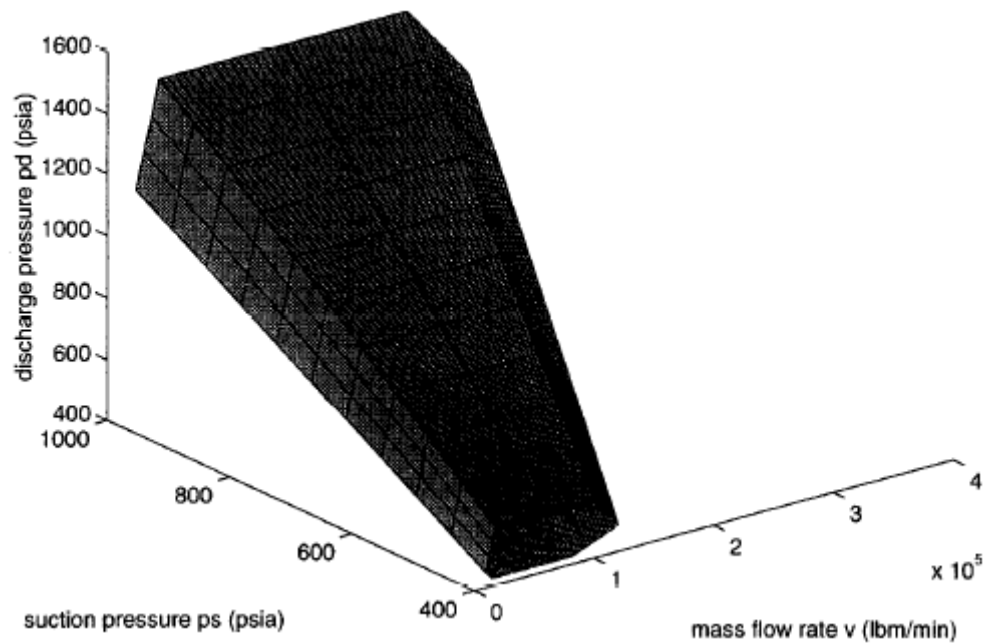


Figura 3.8: Superconjunto  $\bar{D}$  do domínio viável  $D$  (estação com quatro compressores em paralelo) (Fonte: Wu *et al.*, (2000))

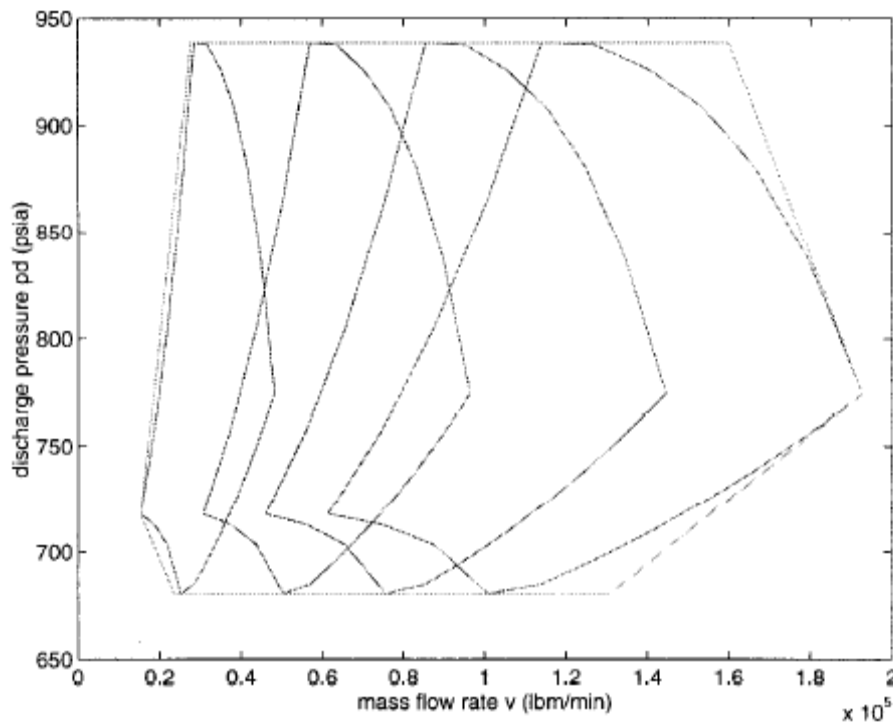


Figura 3.9: Perfil de  $\bar{D}$  e  $D$  (estação com quatro compressores em paralelo) (Fonte: Wu *et al.*, (2000))

### 3.2 Domínio de uma Estação Generalizada

Para a estação generalizada se considera uma estação de compressão composta por  $N$  compressores não necessariamente idênticos. Tem-se que para um dado compressor  $i \in \{1, \dots, N\}$  as relações entre as variáveis  $Q$ ,  $S$ ,  $H$  e  $\eta$  satisfazem as equações:

$$\frac{H}{S^2} = A_{H_i} + B_{H_i} \left( \frac{Q}{S} \right) + C_{H_i} \left( \frac{Q}{S} \right)^2 + D_{H_i} \left( \frac{Q}{S} \right)^3, \quad (3.26)$$

$$\eta = A_{E_i} + B_{E_i} \left( \frac{Q}{S} \right) + C_{E_i} \left( \frac{Q}{S} \right)^2 + D_{E_i} \left( \frac{Q}{S} \right)^3, \quad (3.27)$$

onde  $A_{H_i}, B_{H_i}, C_{H_i}, D_{H_i}, A_{E_i}, B_{E_i}, C_{E_i}$  e  $D_{E_i}$  são constantes que dependem do compressor. Satisfaz-se, ainda, que:

$$(S_i)_{\min} \leq S \leq (S_i)_{\max} \quad (3.28)$$

$$surge_i \leq \frac{Q}{S} \leq stonewall_i \quad (3.29)$$

e, como anteriormente, as variáveis  $H$  e  $S$  estão relacionadas por:

$$Q^{L_i} \leq Q \leq Q^{U_i} \quad (3.30)$$

$$H^{L_i}(Q) \leq H \leq H^{U_i}(Q) \quad (3.31)$$

onde  $Q^{L_i} = (S_i)_{\min} \times surge_i$  e  $Q^{U_i} = (S_i)_{\max} \times stonewall_j$ .

Portanto o domínio do compressor  $i$  é dado por:

$$D_i = \left\{ (v, p_s, p_d) : p_s^{L_i} \leq p_s \leq p_s^{U_i}, V_s^{L_i} \leq \frac{v}{\rho_s} \leq V_s^{U_i}, G^{L_i} \left( \frac{v}{\rho_s} \right) \leq \frac{p_d}{p_s} \leq G^{U_i} \left( \frac{v}{\rho_s} \right) \right\} \quad (3.32)$$

onde:

$$V^{L_i} = \frac{Q^{L_i}}{ZRT_s}, \quad V^{U_i} = \frac{Q^{U_i}}{ZRT_s}$$

$$G^{L_i}(q) = \left[ 1 + \frac{m}{ZRT_s} H^{L_i}(ZRT_s q) \right]^{\frac{1}{m}}, \quad G^{U_i}(q) = \left[ 1 + \frac{m}{ZRT_s} H^{U_i}(ZRT_s q) \right]^{\frac{1}{m}}$$

Se a vazão massa  $v$  chega a uma estação com  $N$  compressores para ser comprimida pela estação, utilizando quaisquer  $r \in \{1, \dots, N\}$  compressores, sendo que as pressões de sucção e descarga estão dadas, temos que:

$$v = v_{i_1} + \dots + v_{i_r} \quad (3.33)$$

onde  $v_{i_k}$  é a vazão massa no compressor  $i_k, \forall i_k \in \{1, \dots, N\}$  e  $k = 1, \dots, r$ , considerando  $i_j \neq i_l$  se  $j \neq l$ . A seguinte condição deve que satisfeita:

$$(v_{i_k}, p_s, p_d) \in D_{i_k} \quad (3.34)$$

Portanto, o domínio viável de uma estação com  $N$  compressores não necessariamente idênticos está dado por:

$$D = \left\{ (v, p_s, p_d) : v = v_{i_1} + \dots + v_{i_r}, r \in \{1, \dots, N\}, (v_{i_k}, p_s, p_d) \in D_{i_k}, \right. \\ \left. i_k \in \{1, \dots, N\}, k = 1, \dots, r, i_j \neq i_l \text{ se } j \neq l \right\} \quad (3.35)$$

A eficiência  $\eta$ , mostrada na equação (3.27) como função de  $Q/S$ , está graficada para dois tipos de compressores A e B na Figura 3.10.

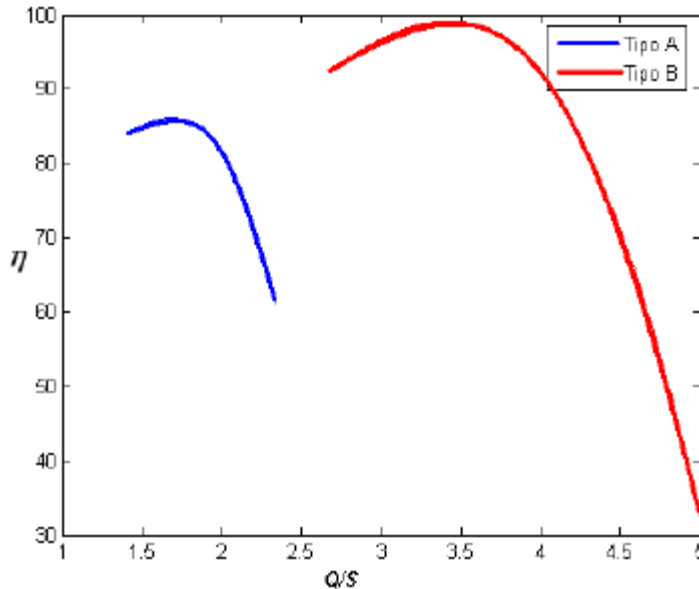


Figura 3.10: Eficiência  $\eta$  para os compressores de tipo A e B. (Fonte: Azeredo, 2008)

Para representar o número de compressores do tipo A e B, que poderão ser ativos, tem-se  $rA$  e  $rB$ , respectivamente. Logo, o número máximo de compressores ativados é  $rA + rB$ . Observe que  $rA$  e  $rB$  satisfazem:

$$0 \leq rA \leq 3, \quad 0 \leq rB \leq 2, \quad 1 \leq rA + rB \leq 5$$

Note ainda que, informado  $rA$  e  $rB$ , define-se os compressores que poderão ser usados para processar a vazão massa, isto é, define-se uma configuração dos compressores da estação.

Por exemplo, para  $rA = 1$  e  $rB = 2$ , fica determinada a configuração como  $r = (1, 0, 0, 1, 1)$ , isto é, cada vetor  $r \in \{0, 1\}^5$  define de maneira única uma configuração da estação e, reciprocamente, cada  $0 \leq rA \leq 3$  e  $0 \leq rB \leq 2$  define de maneira única um vetor  $r \in \{0, 1\}^5$ . Nesse sentido,  $rA$  e  $rB$  são equivalentes ao respectivo  $r \in \{0, 1\}^5$ .

Portanto ao se considerar que em uma estação entra uma vazão massa  $v$ , esta poderá ser dividida entre os dois tipos de compressores A e B. Para realizar a divisão, devem-se considerar as seguintes condições:



(i) a vazão massa total  $v$  será dividida entre os compressores tipo A e tipo B em parcelas  $\frac{v}{ativados}$  (onde  $ativados = rA + rB$ );

Por exemplo, para a estação de cinco compressores se considerarmos,  $rA = 3$  e  $rB = 2$ , teremos definido  $r = (1,1,1,1,1)$  e a divisão será feita tomando parcelas de  $v=5$  de acordo com a Tabela 3.1.

Tipo de compressores	Parcela de $v$ alocada					
A	$0 \times \frac{v}{5}$	$1 \times \frac{v}{5}$	$2 \times \frac{v}{5}$	$3 \times \frac{v}{5}$	$4 \times \frac{v}{5}$	$5 \times \frac{v}{5}$
B	$5 \times \frac{v}{5}$	$4 \times \frac{v}{5}$	$3 \times \frac{v}{5}$	$2 \times \frac{v}{5}$	$1 \times \frac{v}{5}$	$0 \times \frac{v}{5}$

Tabela 3.1: Exemplo de divisão da taxa de fluxo de massa  $v$  para compressores do tipo A e tipo B. (Fonte: Azeredo, 2008)

Observe que ainda não está definido o número de compressores que serão efetivamente usados dentre os  $rA = 3$  do tipo A e  $rB = 2$  do tipo B. Além disso não está definido de que maneira será distribuída a vazão massa entre esses compressores selecionados. Aqui consideraremos que uma vez definida a alocação  $(a,b)$  de parcelas de  $\frac{v}{ativados}$  para os compressores tipo A e tipo B (isto é,  $a \times \frac{v}{ativados}$  para tipo A e  $b \times \frac{v}{ativados}$  para tipo B), essas parcelas poderão ser subalocadas entre os  $rA$  compressores tipo A e  $rB$  compressores tipo B, em parcelas de sextas partes e quartas partes respectivamente.

Assim define-se as matrizes  $AlocaA$ , para o compressor tipo A, que irá armazenar todas as formas possíveis de distribuir a vazão massa entre os compressores do tipo A e, analogamente, a matriz  $AlocaB$  que irá armazenar as possíveis distribuições da vazão massa entre os compressores do tipo B. Neste trabalho, essas matrizes estão dadas por:

$$\begin{aligned}
 AlocaA &= \begin{pmatrix} \frac{6}{6} & 0 & 0 \\ \frac{5}{6} & \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{4}{6} & \frac{2}{6} & 0 \\ \frac{3}{6} & \frac{3}{6} & 0 \\ \frac{2}{6} & \frac{2}{6} & \frac{2}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} & AlocaB &= \begin{pmatrix} \frac{4}{4} & 0 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{2}{4} & \frac{2}{4} \end{pmatrix} & (3.36)
 \end{aligned}$$

Portanto, ao considerarmos  $rA = 3$  e  $rB = 2$ , a vazão massa  $v$  que entra na estação, poderá ser alocada segundo as seguintes alternativas:

(i) Escolher uma alocação para compressores tipo A e tipo B, segundo a Tabela 3.1.

(ii) Escolher uma forma de subalocar as quantias correspondentes à alocação (a ; b), determinada no item anterior, definindo uma linha de *AlocaA* e uma linha de *AlocaB*.

Por exemplo, se escolhermos a alocação (3 ; 2) para os compressores tipo A e tipo B na Tabela 3.1, então serão distribuídos para os compressores tipo A,  $\frac{3v}{5}$  e para os do tipo B,  $\frac{2v}{5}$ . Além disso, se escolhermos para subalocar as quantias de (3 ; 2) a linha 4 de *AlocaA* e a linha 3 de *AlocaB*, teremos a seguinte distribuição entre os compressores da estação:

$$v_{parcial}^{(3,2)} = \left( \frac{3}{6} \times \frac{3v}{5}, \frac{3}{6} \times \frac{3v}{5}, 0, \frac{2}{4} \times \frac{2v}{5}, \frac{2}{4} \times \frac{2v}{5} \right)$$

$$\text{Observe que } \sum_{i=1}^5 v_{parcial}_i^{(3,2)} = v$$

Após definido o vetor  $v_{parcial}^{(3,2)}$ , estará no domínio  $D$  da estação se, e somente se,  $(v_{parcial}_i^{(3,2)}, p_s, p_d) \in D_i, i = 1, \dots, 5$ , podendo assim calcular o seu custo.

### 3.2.1 Aproximação do Domínio Viável de Modelo Generalizado

Apresentam-se aqui as idéias introduzidas por Azeredo (2008). Considera-se, como exemplo, uma estação com dois tipos de compressores: A e B. A Figura 3.11 mostra os domínios unitários para estes compressores.

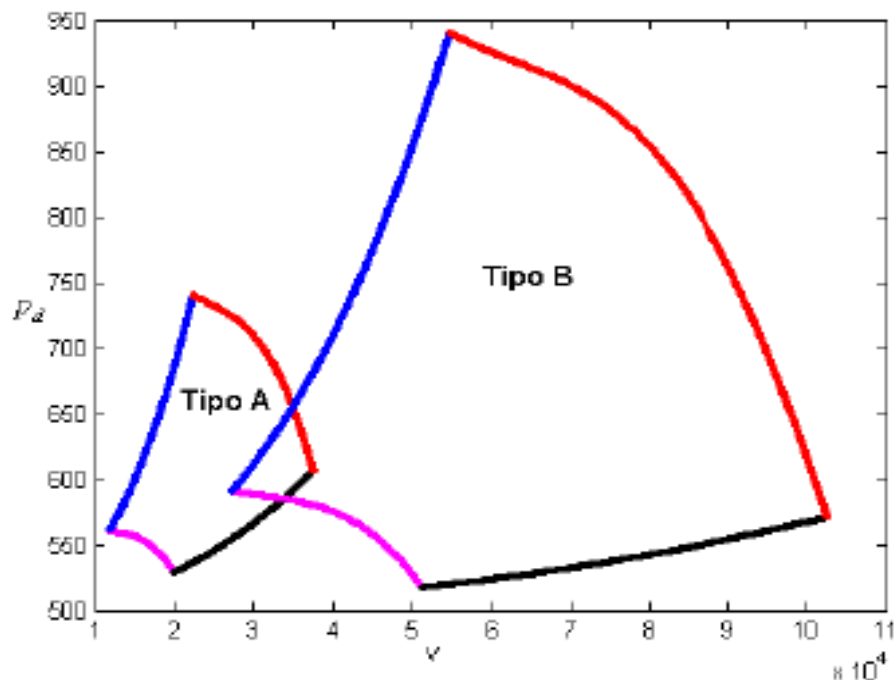


Figura 3.11: Perfil dos domínios unitários de dois tipos diferentes de compressores ( $p_s = 500$  (psia)) (Fonte: Azeredo, (2008))

Observa-se que ao tentar seguir a idéia de encontrar uma aproximação como sugerida por Wu *et al.* (2000), discutida na Seção 3.1.3, que envolva todos os domínios dos compressores da estação, isso poderia fornecer um conjunto não convexo, como mostra a Figura 3.12. Com isso, não se encontrará uma aproximação poliedral que envolva o domínio unitário de todos os compressores.

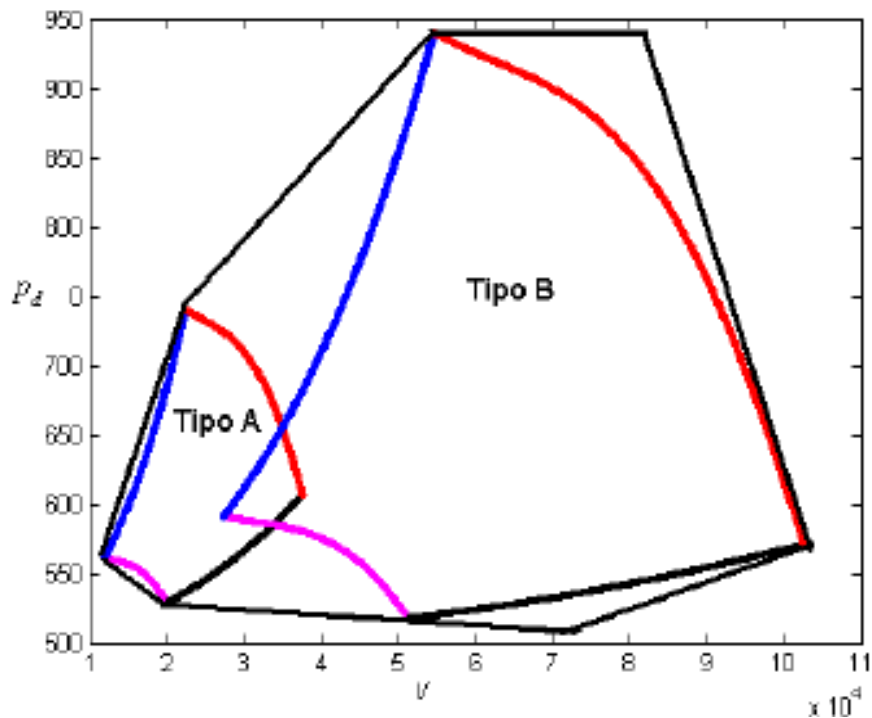


Figura 3.12: Aproximação inteira para os perfis dos domínios unitários dos compressores do tipo A e tipo B. (Fonte: Azeredo, (2008))

Portanto, para cada unidade compressora se faz uma aproximação poliedral. Para isso procede-se similarmente à Seção 3.1.3. Inicialmente se faz uma aproximação linear externa para o contorno do perfil do domínio unitário do compressor tipo A e então basta conectar o contorno linear externo com a origem. O mesmo procedimento é realizado para o compressor tipo B.

Assim a aproximação linear externa para o contorno do perfil do domínio é composta por seis segmentos de reta, que ao serem conectados a origem formam seis planos, que juntos com outros dois planos  $p_s = p_s^L$  e  $p_s = p_s^U$  formam um superconjunto linear do domínio unitário. Os seis planos podem ser obtidos com as equações (3.18).

A aproximação linear externa para o perfil dos dois tipos de compressores como A e B, como foi descrita acima é representado pela Figura 3.13. Neste caso não existe preocupação com a convexidade dos conjuntos, pois serão desenvolvidos algoritmos heurísticos para tratar este problema.

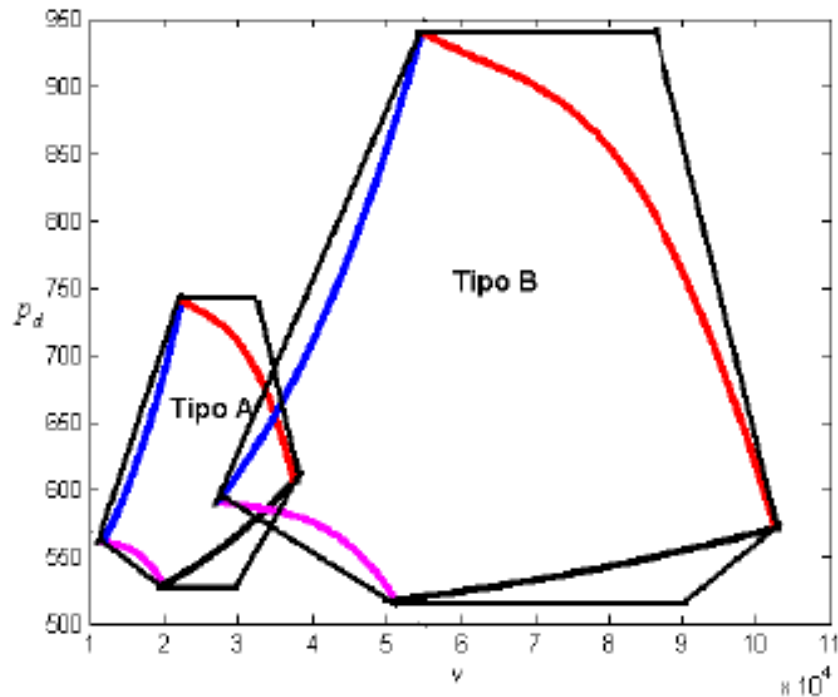


Figura 3.13: Aproximação linear externa para os perfis dos domínios unitários dos compressores do tipo A e tipo B. (Fonte: Azeredo, (2008))

### 3.3 Função Custo de Combustível do Modelo Clássico

Como colocado anteriormente, o modelo clássico considera a estação de compressão com compressores idênticos em paralelo. Para determinar o custo de uma estação de compressão, primeiramente, se apresentará o custo de um compressor.

#### 3.3.1 Função Custo de Combustível para um Compressor

A função custo de combustível para um único compressor se denotada por  $g^{unit}$  e está dada por:

$$g^{unit}(v, p_s, p_d) = \alpha \frac{vH}{\eta}, \forall (v, p_s, p_d) \in D^{unit} \quad (3.37)$$

onde  $\alpha$  é uma constante positiva, considerada aqui igual a 1 (Wu *et al.*, 2000).

Nota-se que a função  $g^{unit}$  não é explícita, pois para avaliá-la, conhecendo  $(v, p_s, p_d) \in D^{unit}$ , primeiro deve encontrar-se  $H$  e  $Q$  diretamente das equações (3.5) e (3.6), para logo da relação (3.1), determinar o valor de  $S$  e, finalmente, determinar  $\eta$  da relação (3.2).

Portanto, para cada avaliação de  $g^{unit}(v, p_s, p_d)$  se faz necessário resolver as equações não lineares (3.1) e (3.2). Como dentro de uma estrutura algorítmica, a avaliação desta função ocorre muitas vezes, não é desejável a utilização desta função. Sugerem-se, então, algumas aproximações para a função  $g^{unit}$  como forma de simplificar o problema.

A função custo de um compressor  $g^{unit}$  depende das características do compressor, entretanto, sabe-se que ela aumenta quando a razão  $\frac{p_d}{p_s}$  e a taxa de fluxo volumétrica  $Q$  (ou  $\frac{v}{p_s}$ ) aumentam e diminui, quando a pressão de sucção  $p_s$  diminui.

A superfície correspondente ao gráfico da função  $g^{unit}(v, p_s, p_d)$  quando  $p_s$  está fixo, mostra-se na Figura 3.14.

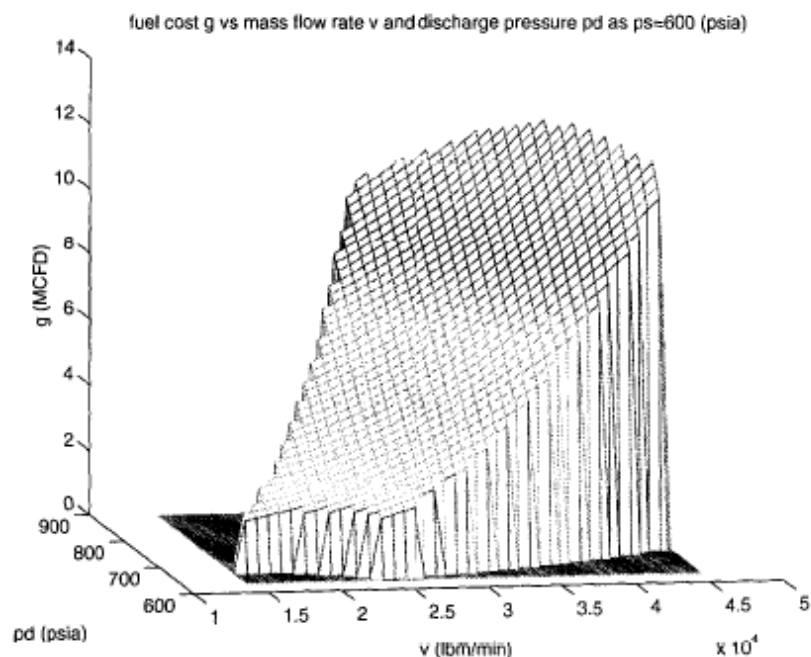


Figura 3.14: Função custo  $g^{unit}(v, p_s, p_d)$  para  $p_s$  fixo (Fonte: Wu *et al.*, (2000))

### 3.3.2 Função Custo para uma Estação de Compressão

Dado um  $(v, p_s, p_d) \in D$ , a Figura 3.9 mostra que a estação pode funcionar ou não com um, dois, três ou quatro compressores. Porém, o custo de combustível está diretamente relacionado ao número de compressores em operação, pois ao se alterar o número de compressores em operação, altera-se também a vazão massa de entrada e a eficiência adiabática de cada compressor.

Portanto, se em uma estação com  $N$  compressores se tem que  $(v, p_s, p_d) \in D$  pode ser operado por  $r$  compressores, então  $(v, p_s, p_d) \in D^r$  e por consequência  $\left(\frac{v}{r}, p_s, p_d\right) \in D^1$ . Isto é, o custo total da estação será  $rg^{unit}$ . Sendo, que  $r$  poderá assumir vários valores diferentes, dentre,  $1 \leq r \leq N$ . Logo, o custo mínimo de combustível total da estação para um  $(v, p_s, p_d)$  está dado por:

$$g(v, p_s, p_d) = \min_{r \in R} \left\{ rg^{unit} \left( \frac{v}{r}, p_s, p_d \right) \right\} \quad (3.38)$$

onde  $R$  é o conjunto de valores viáveis de  $r$  para um dado  $(v, p_s, p_d)$ , isto é

$$R_{(v, p_s, p_d)} = \left\{ r : r \text{ inteiro}, 1 \leq r \leq N, (v, p_s, p_d) \in D^r \right\}$$

**Proposição 3.1.** (Wu et al., 2000) Para qualquer  $(v, p_s, p_d) \in D$ , se  $r_1, r_2 \in R$ , então, para qualquer  $r$  inteiro com  $r_1 \leq r \leq r_2$  tem-se  $r \in R_{(v, p_s, p_d)}$ . Isto é, para qualquer  $(v, p_s, p_d) \in D$ , o conjunto  $R$  é um intervalo de inteiros.

Na Figura 3.15 tem-se a representação do custo de combustível de uma estação com quatro unidades compressoras idênticas, obtidas com o funcionamento de um, dois, três e quatro compressores separadamente. Deve-se ressaltar que a função custo de combustível, neste caso, é não explícita, descontínua e não diferenciável.

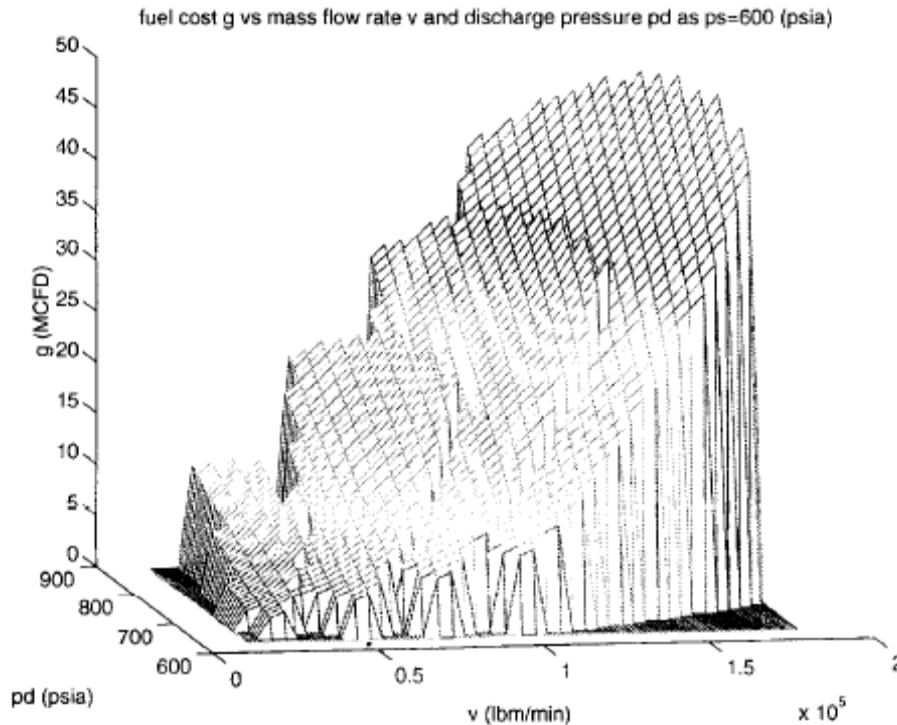


Figura 3.15: Custo de combustível para diferentes números de compressores funcionando em uma estação com quatro compressores idênticos em paralelo. (Fonte: Wu *et al.*, (2000))

### 3.4 Função Custo de Combustível para uma Estação Generalizada

Nesta seção parte-se dos princípios das generalizações feitas anteriormente, quando se considerava estações de compressão com compressores idênticos e dispostos em paralelo (WU *et al.*, 2000), sendo que o estudo apresentado a seguir estende esses conceitos para os casos de uma estação de compressão que possui  $K$  compressores não necessariamente idênticos (AZEREDO, 2008).

Note que dada uma vazão massa  $v$  a ser comprimida numa estação com  $K$  compressores não necessariamente idênticos, pode ser comprimida utilizando quaisquer  $r \in \{1, \dots, K\}$  compressores da estação, desde que  $v = v_{i_1} + \dots + v_{i_r}$ , com  $v_{i_r}$  esteja no domínio do compressor  $i_k, \forall i_k \in \{1, \dots, K\}$  e  $k = 1, \dots, K$ . Logo, diferentes combinações de compressores da estação poderiam ser usadas para alguns valores de  $(v, p_s, p_d) \in D$ , mas provavelmente o custo de uso de combustível seria diferente.

Assim, Azeredo (2008) define o domínio  $D$  de uma estação de compressão generalizada com  $N$  compressores, como:



$$D = \{(v, p_s, p_d) : v = v_{i_1} + \dots + v_{i_r}, (i_1, \dots, i_k) \in C(K, r), (v_{i_k}, p_s, p_d) \in D_{i_k}, \forall i_k\}, \quad (3.39a)$$

onde  $C(N, r)$  é o conjunto de combinações de  $N$  elementos em grupos de  $r$  e  $D_{i_k}$  é o domínio do  $i_k$ -ésimo compressor da estação. Observe que dada  $v = (v_{i_1}, \dots, v_{i_r}) \in D$ , como em (3.39a), fica estabelecida de maneira única um vetor  $\bar{r} = (\bar{r}_A, \bar{r}_B, \dots) \in \{0,1\}^K$  de configuração de funcionamento da estação, contabilizando o número de vezes que cada tipo de compressor da estação é usado para definir  $v$ . Assim, se a estação tiver *Tipo A* compressores A e se usam  $n_A \leq \text{TipoA}$  para definir  $v = (v_{i_1}, \dots, v_{i_r}) \in D$ , então  $\bar{r}_A = \{\underbrace{1, \dots, 1}_{n_A}, 0, \dots, 0\}^{\text{TipoA}}$ , analogamente  $\bar{r}_B = \{\underbrace{1, \dots, 1}_{n_B}, 0, \dots, 0\}^{\text{TipoB}}$ , para  $n_B \leq \text{TipoB}$  compressores B usados e assim sucessivamente. Reciprocamente, cada vetor  $\bar{r} = (\bar{r}_A, \bar{r}_B, \dots) \in \{0,1\}^K$  determina uma possível configuração dos compressores da estação.

Logo, considerando dado o vetor  $(v, p_s, p_d) \in D$ , a autora define o conjunto associado de configurações viáveis da estação,  $R_v$ , como o conjunto de vetores  $\bar{r} \in \{0,1\}^K$ , determinados pelas partições  $v = (v_{i_1}, \dots, v_{i_r}) \in D$ . Assim, associando a partição  $v = (v_{i_1}, \dots, v_{i_r})$  a  $\bar{r} = (\bar{r}_A, \bar{r}_B, \dots) \in \{0,1\}^K$ , denotado por

$$(v_{i_1}, \dots, v_{i_r}) \approx (\bar{r}_A, \bar{r}_B, \dots) \in \{0,1\}^K,$$

Podemos definir

$$R_v = \{\bar{r} = (\bar{r}_A, \bar{r}_B, \dots) \in \{0,1\}^K : v = (v_{i_1}, \dots, v_{i_r}) \approx (\bar{r}_A, \bar{r}_B, \dots), (v_{i_1}, \dots, v_{i_r}, p_s, p_d) \in D\}. \quad (3.39b)$$

Define-se, também, a função custo correspondente para um dado  $(v, p_s, p_d) \in D$ , como:

$$g(v, p_s, p_d) = \min_{r \in R_v} \left\{ \sum_{k=1}^r g_{i_k}^{unit}(v_{i_k}, p_s, p_d) \right\} \quad (3.40)$$

onde  $g_{i_k}^{unit}(v_{i_k}, p_s, p_d)$  é o custo correspondente a comprimir  $(v_{i_k}, p_s, p_d)$  no  $i_k$ -ésimo compressor da estação.

### 3.4.1 Aproximação para a Função Custo de Combustível

Na seção 3.3.1 pode-se observar na Figura 3.14 a função  $g^{unit}$  donde algumas funções simples são sugeridas para aproximá-la. Segundo Wu *et al.*, (2000) as funções usadas mais frequentemente para aproximar  $g^{unit}$  são as polinomiais nas variáveis  $(v, p_s, p_d)$  de grau um ou dois, isto é

$$g_1(v, p_s, p_d) = A_1v + B_1p_s + C_1p_d + D_1 \quad (3.41)$$

$$g_2(v, p_s, p_d) = A_2v^2 + B_2vp_s + C_2vp_d + D_2p_s^2 + E_2p_s p_d + F_2p_d^2 + G_2v + H_2p_s + I_2p_d + J_2 \quad (3.42)$$

Como a função  $g^{unit}$  pode ser vista como uma função de  $v/p_s$  e  $p_d/p_s$ , é muito útil usar as seguintes funções para aproximar a função  $g^{unit}$ . (WU *et al.*, 2000):

$$g_3(v, p_s, p_d) = p_s \left( A_3 \frac{v}{p_s} + B_3 \frac{p_d}{p_s} + C_3 \right) \quad (3.43)$$

$$g_4(v, p_s, p_d) = p_s \left( A_4 \left( \frac{v}{p_s} \right)^2 + B_4 \frac{v}{p_s} \frac{p_d}{p_s} + C_4 \left( \frac{p_d}{p_s} \right)^2 + D_4 \frac{v}{p_s} + E_4 \frac{p_d}{p_s} + F_6 \right) \quad (3.44)$$

$$g_5(v, p_s, p_d) = v \left( A_5 \frac{v}{p_s} + B_5 \frac{p_d}{p_s} + C_5 \right) \quad (3.45)$$

$$g_6(v, p_s, p_d) = v \left( A_6 \left( \frac{v}{p_s} \right)^2 + B_6 \left( \frac{p_d}{p_s} \right)^2 + C_6 \frac{v}{p_s} \frac{p_d}{p_s} + D_6 \frac{v}{p_s} + E_6 \frac{p_d}{p_s} + F_6 \right) \quad (3.46)$$

Wu *et al.* (2000) comparam cada uma dessas funções de aproximação com a função custo  $g^{unit}$ . As aproximações para os erros máximos relativos para a unidade de compressor mostrada nas Figuras 3.1 e 3.2, variando  $p_s$  entre 600-800 (psia), são apresentadas na Tabela 3.2.

Função	Erro Máximo Relativo(%)
$g_1$	66,15
$g_2$	57,60
$g_3$	66,15
$g_4$	5,85
$g_5$	10,06
$g_6$	2,67

Tabela 3.2: Erro máximo relativo das funções aproximadas. ( Fonte: Wu *et al.*, (2000)

Analisando a tabela verifica-se que a função que melhor aproxima a função  $g^{unit}$  é a  $g_6$ . Assim, o modelo clássico quando for aproximar a função custo de combustível da estação de compressão, aproximará a função  $g^{unit}$  pela função  $g_6$ .

## **CAPÍTULO 4**

### **Metaheurística GRASP e Exemplos Numéricos**

Neste capítulo apresentam-se algoritmos que auxiliam na resolução do problema proposto, juntamente com alguns exemplos que foram testados e os resultados obtidos.

#### **4.1 Heurística GRASP**

Desenvolvido por Tom Feo e Mauricio Resende no final da década de 80, a GRASP (sigla em inglês para Procedimento de Busca Adaptativa Aleatória Gulosa) é um método de múltiplos reinícios, onde as soluções iniciais são posteriormente melhoradas através de um algoritmo de busca local (FEO E RESENDE, 1995).

Antes de apresentar a metaheurística, todos os passos serão descritos. Primeiramente tem-se a etapa de construção da solução e da lista de candidatos restrita e sua hierarquização, para finalmente descrever a busca local e o critério de parada.

Como em Wu et al (2000), precisa-se introduzir o conceito de rede reduzida associada a um gasoduto. Dado um gasoduto e seu respectivo grafo, se forem

eliminados os arcos correspondentes às estações de compressão, geram-se sub-redes desconectadas. Se estas sub-redes forem representadas por nós e as estações de compressão por arcos, tem-se a *rede reduzida* correspondente ao gasoduto original. A Figura 4.1 e Figura 4.2 ilustram, respectivamente, uma rede de distribuição de gás natural e sua respectiva rede reduzida.

Para gerar a lista de candidatos restrita, parte-se da seguinte condição: quando a rede reduzida é acíclica (isto é, uma árvore) existe uma única forma de distribuir o vetor  $v$  entre os compressores, já quando a rede reduzida possui ciclos, existem infinitas soluções  $v$  para o sistema  $Av = s$ .

Dada uma solução  $v$  do sistema  $Av = s$ , essa solução determinará uma distribuição de vazões massa  $u_h$  para cada sub-rede  $h$  da rede reduzida. Desta maneira, para um vetor  $v$  de vazões massa nos compressores, determina-se um vetor  $u^T = (u_1^T, \dots, u_r^T)$  de distribuição de vazão massa no interior de cada sub-rede  $h = 1, \dots, r$ .

Tem-se, então, que o vetor  $(v^T, u^T)$  satisfaz o sistema  $A_l u + A_m v = s$ , sendo respectivamente,  $A_l$  e  $A_m$  as matrizes de incidência nó-duto e de incidência estação-duto da rede original. Portanto, após a determinação de uma distribuição de vazões massa na rede, basta determinar se existe um vetor de pressões  $p$  que permite escoar essas vazões pela rede.

Tem-se, então, uma solução viável  $(v^T, u^T, p^T)$  para atender as demandas da rede.

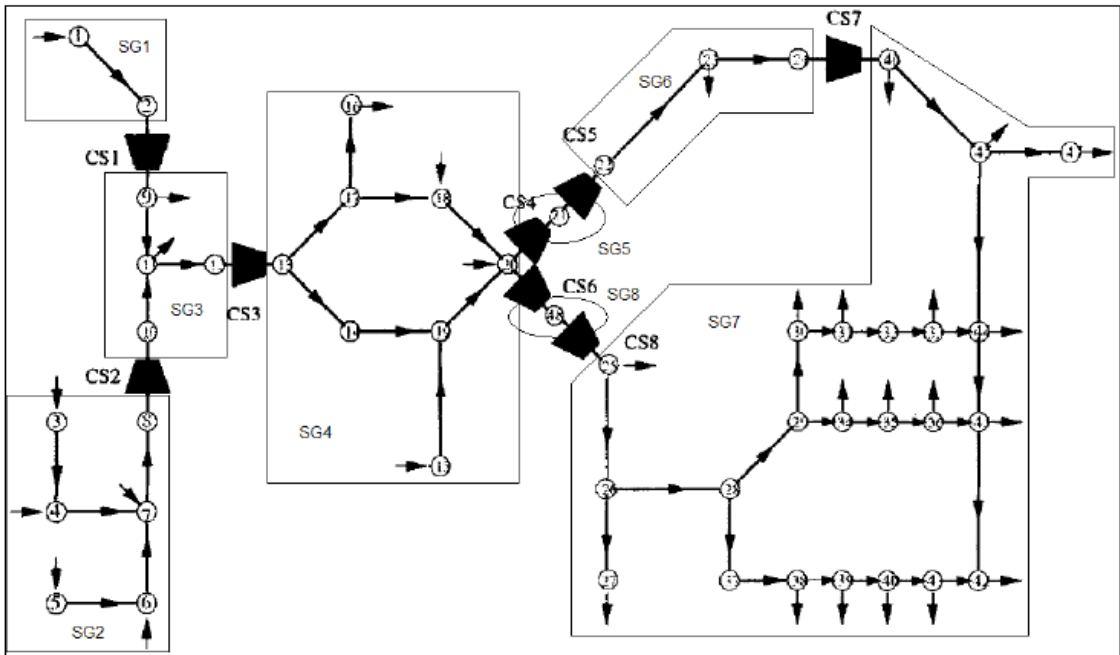


Figura 4.1: Exemplo de uma rede de distribuição de gás natural. (Fonte: Christo, (2008))

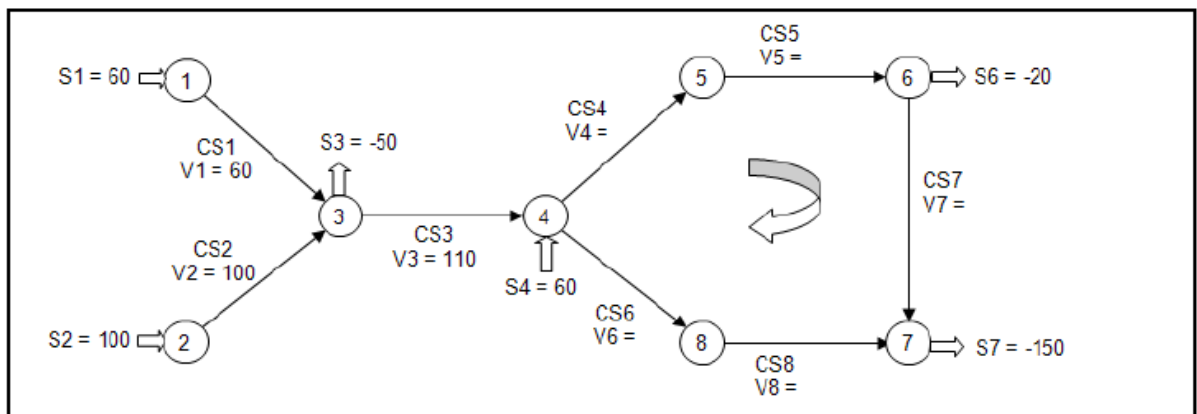


Figura 4.2: Rede reduzida da Figura 4.1. (Fonte: Christo, (2008))

Observe que as sub-redes  $SG4$ ,  $SG5$ ,  $SG6$ ,  $SG7$  e  $SG8$ , constituem um ciclo na rede reduzida e que o vetor  $v$  está composto por oito componentes  $v = (v_1, \dots, v_8)$ . Além disso, tem-se que para cada par de vazões massa  $(v_4, v_6)$  o vetor  $v$  fica completamente determinado.

Portanto, fixando cada possível par  $(v_4, v_6)$  que satisfaz  $Av = s$ , define-se o vetor  $v = (v_1, \dots, v_8)$ .

Logo, a estratégia para construir a lista de candidatos restrita é montar todos os pares  $(v_4, v_6)$  que satisfazem  $Av = s$ . Determinados esses pares, deve-se

associar um custo a cada par considerando a mesma pressão de sucção e qualquer pressão de descarga, de forma que se possa formar uma lista de candidatos hierarquizada crescente para os mencionados pares. A partir daí, usando o parâmetro  $\alpha$  que controla o nível de gulosidade e aleatoriedade do procedimento de construção do GRASP (onde,  $\alpha = 0$  gera soluções puramente gulosas e  $\alpha = 1$  gera soluções aleatórias em sua totalidade), poder-se-á montar a lista de candidatos restrita, onde se escolherão os candidatos da fase de construção do GRASP.

Assim, escolhido  $(v_4, v_6)$  da lista de candidato restrita e determinando o vetor  $v = (v_1, \dots, v_8)$ , se distribuem as vazões  $u^T = (u_1^T, \dots, u_r^T)$  entre todas as sub-redes e se tenta encontrar o vetor de pressões  $p$ , a partir da sub-rede de referência. Desta forma determinam-se nessa sub-rede as pressões correspondentes a todos os vértices. Deve-se destacar que para os problemas aqui tratados a sub-rede de referência, isto é, onde existe um vértice com uma pressão de referencia fixada, considera-se a partir da esquerda, isto é, considera-se a *primeira* sub-rede da esquerda,  $SG_1$ , sendo o *primeiro* nó da esquerda o nó de referência, nó 1. Este fato difere do trabalho de Azeredo (2008), Jubini (2008) e Christo (2008) que pesquisam esse tipo de problema, iniciando com a sub-rede da direita (*a última*,  $SG_7$ ) como a sub-rede de referência e o respectivo nó de referência como sendo o *último*, nó 47. De acordo com as características da função custo, espera-se que menores valores das pressões de sucção determinem menores valores dos custos, o que, após testes computacionais foi verificado, conseguindo-se melhores resultados com esta estratégia.

Então, a partir de uma pressão de referência conhecida numa determinada sub-rede, tem-se que a vazão de estação e a pressão de descarga (ou sucção), donde se pode tentar procurar uma pressão de sucção (ou descarga) que permita comprimir a respectiva vazão com as pressões especificadas.

Caso tais pressões existam, dentro dos limites pré-estabelecidos, o vetor  $(v^T, u^T)$  estará viabilizado, construindo, assim, a solução  $(v^T, u^T, p^T)$ . Caso contrário o vetor de vazões  $(v^T, u^T)$  não será possível de ser escoado. Nota-se que ao encontrar o vetor  $(v^T, u^T, p^T)$ , simultaneamente, encontra-se o menor custo para

comprimir  $v = (v_1, \dots, v_8)$  e as respectivas configurações de compressores das estações.

Determinado o ponto  $(v^T, u^T, p^T)$  e seu custo, passa-se a busca local, que consiste em variar o vetor  $v = (v_1, \dots, v_8)$ , considerando as variações de  $(v_4, v_6)$ , da seguinte forma:  $(\hat{v}_4, \hat{v}_6) = (v_4 + \Delta, v_6 - \Delta)$  e  $(\tilde{v}_4, \tilde{v}_6) = (v_4 - \Delta, v_6 + \Delta)$ , para gerar os vizinhos associados  $\hat{v} = (\hat{v}_1, \dots, \hat{v}_8)$  e  $\tilde{v} = (\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_8)$ .

Determinam-se as distribuições de vazão  $\hat{u}^T = (\hat{u}_1^T, \dots, \hat{u}_r^T)$  e  $\tilde{u}^T = (\tilde{u}_1^T, \dots, \tilde{u}_r^T)$ , como também os vetores de pressão de forma a encontrar os vizinhos viáveis  $(\hat{v}^T, \hat{u}^T, \hat{p}^T)$  e  $(\tilde{v}^T, \tilde{u}^T, \tilde{p}^T)$ , de maneira que possuam as mesmas configurações dos compressores.

Portanto, têm-se três pontos viáveis e seus respectivos custos, então, considera-se a solução de menor custo e volta-se a lista de candidatos restrita, para “construir” uma nova solução aleatória.

O critério de parada considerado consiste na não mudança de ponto viável durante três iterações consecutivas. Abaixo tem-se a descrição do algoritmo.

## 4.2 Domínio de uma Estação de Compressão

De acordo com a Seção 3.2, tem-se que para determinar se um vetor  $(v, p_s, p_d)$  é viável para uma estação de compressão devemos decidir se existe alguma forma de alocar a vazão massa  $v$  entre compressores (um ou vários) da estação, de tal forma que cada parcela de  $v$  correspondente aos respectivos compressores ativos seja viável para estes. Considerando que a estação está composta por  $K$  compressores não necessariamente idênticos, de acordo com (3.33) – (3.35),  $(v, p_s, p_d)$  é viável para a estação se existe  $(v_{i_1}, \dots, v_{i_r})$ , tal que



$$v = v_{i_1} + \dots + v_{i_r}, (v_{i_k}, p_s, p_d) \in D_{i_k}, \forall k = 1, \dots, r,$$

onde  $(i_1, \dots, i_r)$  é uma combinação em grupos de  $r$  dos índices  $\{1, \dots, K\}$ , definindo-se a relação  $v = (v_{i_1}, \dots, v_{i_r}) \approx \bar{r} = (\bar{r}_A, \bar{r}_B, \dots) \in \{0,1\}^K$ , como em (3.39b).

Note-se que não se trata unicamente de determinar se  $(v, p_s, p_d)$  é viável ou não para estação, mas de acordo com a definição da função custo, relação (3.40), faz-se necessário determinar uma relação de alocações  $(v_{i_1}, \dots, v_{i_r})$  viáveis que forneça o menor valor, isto é, que atenda (3.33) – (3.35).

Para determinar a viabilidade de um ponto  $(v, p_s, p_d)$  em relação a um dado compressor temos o seguinte algoritmo (AZEREDO, 2008):

### Algoritmo 1 – Viabilidade de $(v, p_s, p_d)$ para um compressor

**Passo 1.** Fornecer os dados de entrada:

- Características do compressor (definindo os coeficientes das relações (3.1) – (3.4) para o compressor, como na Seção 3.1) e limites  $[p_s^L, p_s^U]$  para a pressão de sucção;
- Vazão massa e pressões de sucção e descarga a serem processados.

**Passo 2.** Se  $p_s \notin [p_s^L, p_s^U]$ , Parar! O ponto  $(v, p_s, p_d)$  não é viável para o compressor. Caso contrário, em função das relações (3.1) – (3.8), definir as funções  $H^L(Q)$  e  $H^U(Q)$  (limites inferior e superior de  $H$  em função de  $Q$ , para  $S$  fixo) e definir as relações (3.10) – (3.13) que determinam  $D^{unit}$ , encontrando  $V^L, V^U, G^L(v/p_s)$  e  $G^U(v/p_s)$ ;

**Passo 3.** Se  $V^L \leq \frac{v}{p_s} \leq V^U$  e  $G^L\left(\frac{v}{p_s}\right) \leq \frac{p_d}{p_s} \leq G^U\left(\frac{v}{p_s}\right)$ , o ponto  $(v, p_s, p_d)$  é viável para o compressor. Caso contrário, não é viável. Parar!

Substituindo o Passo 2 e o Passo 3 do Algoritmo 1, adequadamente, este pode ser usado para o cálculo de viabilidade de um ponto  $(v, p_s, p_d)$  em relação ao domínio unitário aproximado poliedralmente, de acordo com a Figura 4.3.

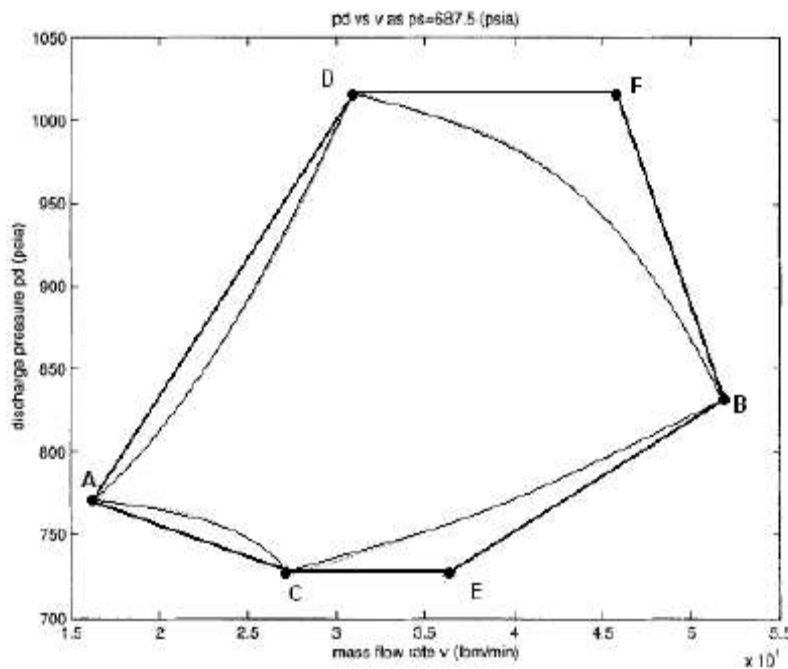


Figura 4.3: Aproximação linear externa do contorno (arco ABCD) (Fonte: Wu *et al.*, (2000))

Observa-se que na Figura 4.3, as curvas  $AC$  e  $CB$  correspondem ao gráfico da função  $G^L(q)$ , sendo  $G_1^L(q)$  e  $G_2^L(q)$ , respectivamente. Analogamente, as curvas  $AD$  e  $DB$  correspondem ao gráfico da função  $G^U(q)$  sendo  $G_1^U(q)$  e  $G_2^U(q)$ , respectivamente. Assim os pontos  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ , e  $F$ , na Figura 4.1 podem ser encontrados determinando as interseções das respectivas curvas.

Posteriormente, apresenta-se o algoritmo implementado para a determinação da viabilidade de um ponto  $(v, p_s, p_d)$  em relação a uma estação. Destaca-se que, a maneira de exemplo, os cálculos se apresentam para o caso de uma estação com dois tipos de compressores, três compressores Tipo A e dois Tipo B.

## Algoritmo 2 – Viabilidade de $(v, p_s, p_d)$ para uma estação de compressão

**Passo 1.** Fornecer os dados de entrada:

- Determinar o número total de compressores,  $K$ , e os diferentes tipos de compressor da estação,  $Tipos\_de\_compressor$ , definindo o número de compressores de cada tipo (*Tipo A*, *Tipo B*, etc.) e as características dos mesmos, por meio dos coeficientes das relações (3.26) – (3.29) para os mesmos, como na Seção 3.2. Estabelecer os limites  $[p_s^L, p_s^U]$  para a pressão de sucção e a vazão massa e pressões de sucção e descarga a serem processadas,  $(v, p_s, p_d)$ .

**Passo 2.** Se  $p_s \notin [p_s^L, p_s^U]$ , Parar! O ponto  $(v, p_s, p_d)$  não é viável para a estação. Caso contrário, estabelecer, em função das matrizes de alocação e da relação (3.39a), uma lista  $L$  de possíveis distribuições de  $v = (v_{i_1}, \dots, v_{i_r})$ , a serem testadas; e, definir a lista  $L_{viáveis} \neq \emptyset$ .

**Passo 3.** Encontrar, em função das características dos compressores de cada tipo, os domínios unitários  $(D_A^{unit}, D_B^{unit}, \text{etc})$ , usando o Algoritmo 1. Definir o domínio da estação,  $D_{estação}$ , de acordo com a relação (3.35).

**Passo 4.** Enquanto  $L \neq \emptyset$

Escolher  $(v_{i_1}, \dots, v_{i_r}) \in L$  e verificar se  $(v_{i_1} + \dots + v_{i_r}, p_s, p_d) \in D_{estação}$ ;

Caso positivo,  $L_{viáveis} = L_{viáveis} \cup \{(v_{i_1}, \dots, v_{i_r})\}$ ;

Fazer  $L = L \setminus \{(v_{i_1}, \dots, v_{i_r})\}$ ;

Fim do Enquanto.

**Passo 5.** Se  $L_{viáveis} \neq \emptyset$ , então  $(v, p_s, p_d)$  é viável para estação, caso contrário,  $(v, p_s, p_d)$  não é viável para estação.

### Observações:

1. Note que no *Passo 4* está sendo verificada a viabilidade do ponto  $(v, p_s, p_d)$  para todas as configurações  $(v_{i_1}, \dots, v_{i_r})$  definidas pela lista  $L$  de possíveis distribuições de  $v$  (*Passo 2*). É simples reformular o algoritmo anterior para determinar se um ponto  $(v, p_s, p_d)$  é viável para uma estação, dada uma certa configuração  $r \in \{0,1\}^K$ .
2. O Algoritmo 2, com algumas modificações, foi usado para os desenhos apresentados em Figura 3.11.
3. É notório que se no Algoritmo 2 fossem alterados os passos correspondentes ao domínio aproximado, de acordo com o Algoritmo 1.1, conseguir-se-ia uma aproximação do domínio da estação composta por aproximação poliedrais dos domínios dos compressores que participam da estação.

### 4.3 Cálculo da Função Custo de uma Estação de Compressão Generalizada

Como foi discutido na Seção 3.4, o custo de uma estação de compressão generalizada para a compressão de um ponto  $(v, p_s, p_d) \in D_{estação}$  está dado por:

$$g(v, p_s, p_d) = \min_{v \in R_v} \left\{ \sum_{k=1}^r g_{i_k}^{unit}(v_{i_k}, p_s, p_d) \right\}$$

onde  $g_{i_k}^{unit}(v_{i_k}, p_s, p_d)$  é o custo do comprimir  $(v, p_s, p_d)$  no compressor  $i_k$  da estação (relação (3.6)).

Pode-se observar que  $(v, p_s, p_d) \in D_{\text{estação}}$  é equivalente a  $(v_{i_k}, p_s, p_d) \in D_{i_k}$  para todo  $k = 1, \dots, r$  onde  $v = v_{i_1} + \dots + v_{i_r}$ . Portanto para  $(v_{i_1} + \dots + v_{i_r}, p_s, p_d) \in D_{\text{estação}}$ , determinado no Passo 4 do Algoritmo 2, deve-se calcular custo de comprimir essa distribuição viável de vazões massa para os compressores, determinando  $\sum_{i_k=1}^r g_{i_k}^{unit}(v_{i_k}, p_s, p_d)$ .

Assim para determinar o custo de processar  $(v, p_s, p_d) \in D_{\text{estação}}$ , com o custo mínimo, formulou-se o algoritmo seguinte.

### Algoritmo 3. Custo de compressão de uma estação generalizada

**Passo 1.** Fornecer os dados de entrada:

- Determinar o número total de compressores,  $K$ , e os diferentes tipos de compressor da estação,  $\text{Tipos\_de\_compressor}$ , definindo o número de compressores de cada tipo (*Tipo A*, *Tipo B*, etc.) e as características dos mesmos, por meio dos coeficientes das relações (3.26) – (3.29) para os mesmos, como na Seção 3.2. Estabelecer os limites  $[p_s^L, p_s^U]$  para a pressão de sucção e a vazão massa e pressões de sucção e descarga a serem processadas,  $(v, p_s, p_d)$ .
- Matrizes de alocação;
- Atribuir  $g = \infty$ .

**Passo 2.** Se  $p_s \notin [p_s^L, p_s^U]$ ,  $g(v, p_s, p_d) = g$  (o ponto  $(v, p_s, p_d)$  não é viável para o compressor). Parar!

**Passo 3.** Quer determinar o custo para uma configuração  $\bar{r} \in [0,1]^K$  definida pelo usuário? Caso positivo, estabelecer, em função das matrizes de

alocação, uma lista  $L$  de possíveis distribuições de  $v, (v_{i_1}, \dots, v_{i_r})$ , a serem testadas onde os compressores identificados com  $\bar{r}_i = 0$  na configuração, não poderão ser usados, isto é, recebem o respectivo  $v_{i_k} = 0$ . Caso contrário (quando se precisa determinar o menor custo correspondente a todas as possíveis alocações de  $v$ ) estabelecer, em função das matrizes de alocação, uma lista  $L$  de possíveis distribuições de  $v, (v_{i_1}, \dots, v_{i_r})$ , a serem testadas;

**Passo 4.** Encontrar, em função das características dos compressores de cada tipo, os domínios unitários  $D_A^{unit}$ ,  $D_B^{unit}$ , etc., para compressores do Tipo A, Tipo B, etc., respectivamente, usando o Algoritmo 1. Definir o domínio da estação,  $D_{estação}$ , de acordo com a relação (3.35);

**Passo 5.** Enquanto  $L \neq \emptyset$ ,

Escolher  $(v_{i_1}, \dots, v_{i_r}) \in L$  e verificar se  $(v_{i_1} + \dots + v_{i_r}, p_s, p_d) \in D_{estação}$ ;

Caso positivo, calcular  $g_1 = \sum_{i_k=1}^r g_{i_k}^{unit}(v_{i_k}, p_s, p_d)$ ;

Se  $g_1 < g$ , fazer  $g_1 = g$ ;

Fazer  $L = L \setminus \{(v_{i_1}, \dots, v_{i_r})\}$ ;

Fim do Caso positivo;

Fim do Enquanto;

**Passo 6.** Fazer  $g(v, p_s, p_d) = g$ . (Se  $g(v, p_s, p_d) = \infty$ , significa que o ponto  $(v, p_s, p_d) \notin D_{estação}$ , isto é, não pode ser processado pelas estações de compressão). Parar!

**Observação:**

O Algoritmo 3 pode ser considerado com a seguinte modificação: ao invés da função  $g_i^{unit}(v_i, p_s, p_d)$ , determinada pela relação (3.37), trabalhar com a função definida pela relação (3.46),  $g_{i_k}^6(v_{i_k}, p_s, p_d)$ . Nesse caso ter-se-ia um algoritmo providenciando o valor da função custo aproximada da estação de compressão.

Portanto o algoritmo GRASP formulado em Christo (2008), para o caso aqui descrito (estações de compressão com dois tipos de compressores, três Tipo A e dois Tipo B), pode ser formulado como segue:

**Algoritmo 4. Algoritmo GRASP - Minimização de custo em um gasoduto**

**Passo 1.** Fornecer os dados de entrada do gasoduto:

- Matrizes de incidência  $A_l$  e  $A_m$ ;
- Características dos dutos e limites de pressão  $[p_s^L, p_s^U]$  nos nós;
- Características das estações de compressão: Número de compressores, tipos de compressor e características de cada tipo de compressor para as estações do gasoduto (como na Seção 3.2). Informar dados necessários para rodar o Algoritmo 3 e um parâmetro  $\alpha \in (0,1)$  para determinação da lista de candidatos restrita com que os algoritmos GRASP trabalham;
- Atribuir custo =  $\infty$ .

**Passo 2.** Pré-processamento do gasoduto:

- Montar a rede reduzida do gasoduto e determinar uma discretização de possíveis vetores  $v^T = (v_1, \dots, v_m)$ , distribuições de vazão massa, a

serem, comprimidas pelas estações de compressão; construir uma lista  $L_{candidatos}$ , formada por todos os vetores  $v$  assim determinados;

- Aplicar o Algoritmo 3 para determinar, se possível, pressões de sucção e custos de compressão para cada estação  $k = 1, \dots, m$  processando a  $k$ -ésima parcela de  $v$ , isto é, calcular

$$(p_s^k, p_d^k) \text{ e } g_k(v^k, p_s^k, p_d^k).$$

Os vetores  $v$  para os quais não seja possível encontrar as pressões  $(p_s^k, p_d^k)$ , necessárias para a compressão, serão declarados inviáveis e retirados da lista  $L_{candidatos}$ ;

- Definir o custo total de compressão para cada vetor  $v$  determinado no Passo 2, como

$$g(v, p_s, p_d) = \sum_{k=1}^m g_k(v^k, p_s^k, p_d^k)$$

onde  $(p_s^T, p_d^T) = (p_s^1, \dots, p_s^m, p_d^1, \dots, p_d^m)$ , ordenar a lista  $L_{candidatos}$  de forma crescente em relação a esses custos e considerar, a partir do parâmetro  $\alpha \in (0,1)$ , a lista de candidatos restrita  $L_{restrita}$ .

**Passo 3.** Escolher aleatoriamente  $v \in L_{restrita}$  e determinar o vetor  $(u, p)$ , com  $u$  sendo a vazão massa que escoar pelos dutos depois da compressão e  $p$  o vetor das correspondentes pressões:

**3.1** Se  $L_{restrita} \neq \emptyset$

**3.1.1** Encontrar um vetor  $u$ , solucionando o sistema (2.5) (como explicado em Jubini (2008)):

$$A_l u = s - A_m v.$$

Se o vetor  $u$  não existir, ir para 3.1.6;



**3.1.2** Determinar o vetor de pressões  $p_m$  na sub-rede correspondente à pressão de referência (pressão referente ao nó contido na sua sub-rede de referência a ser considerada como ponto de partida para a determinação de todas as pressões da rede) solucionando

$$A_l^T p_m^2 = \phi(u_m),$$

onde  $u_m$  é o vetor de vazão massa escoando na respectiva rede (se o vetor  $p_m$  não existir, ir para 3.1.6); fazer  $k = m$ ;

**3.1.3** Calcular, usando o Algoritmo 3, pressões de sucção para as estações associadas à sub-rede  $k$ , calcular o custo de compressão correspondente à respectiva configuração da estação;

**3.1.4** Calcular  $A_l^T p_m^2 = \phi(u_k)$  e voltar a 3.1.3 até esgotar as sub-redes do gasoduto.

**3.1.5** Calcular o custo de processar no gasoduto o ponto viável  $(v, u, p)$ :

$$g(v, u, p) = \sum_{k=1}^m g_k(v^k, p_s^k, p_d^k)$$

Ir para 3.1.7;

**3.1.6** Não existe um vetor  $(v, u, p)$  viável para o gasoduto, fazer

$$L_{restrita} = L_{restrita} - \{v\}$$

Ir para 3.1;

**3.1.7** Fim do Se, 3.1.

**3.2** Se  $L_{restrita} = \emptyset$ , Parar! O gasoduto não pode atender as especificações demandadas.

**Passo 4.** Busca de custos menores na vizinhança do ponto  $(v, u, p)$ :

- Construir uma vizinhança  $Viz$  de  $(v, u, p)$  considerando variações de  $v$  e  $p$ , com as configurações fixas, determinadas no Passo 3, e calcular os respectivos custos dos pontos vizinhos:  $g(v_{viz}, u_{viz}, p_{viz})$  onde  $(v_{viz}, u_{viz}, p_{viz}) \in Viz$ ;

- Fazer

$$g(\hat{v}, \hat{u}, \hat{p}) = \min_{(v_{viz}, u_{viz}, p_{viz}) \in Viz} \{g(v, u, p), g(v_{viz}, u_{viz}, p_{viz})\};$$

- Se não foi atingido o critério de parada do algoritmo, voltar ao Passo 3. Caso contrário, ir ao Passo 5.

**Passo 5.** Busca de melhores pressões para o melhor ponto atual  $(\hat{v}, \hat{u}, \hat{p})$ :

- Mantendo fixo o vetor  $(\hat{v}, \hat{u})$  e as correspondentes configurações, gerar uma vizinhança de  $(\hat{v}, \hat{u}, \hat{p})$ , mudando as pressões em passos pequenos (adequados), a partir de  $\hat{p}$ , a fim de tentar encontrar um  $(\hat{v}, \hat{u}, \tilde{p})$  tal que

$$g(\hat{v}, \hat{u}, \tilde{p}) < g(\hat{v}, \hat{u}, \hat{p})$$

- Parar! O ponto  $(\hat{v}, \hat{u}, \tilde{p})$  e o custo  $g(\hat{v}, \hat{u}, \tilde{p})$  associado, são o melhor ponto e o melhor custo encontrados para o gasoduto, respectivamente. A melhor configuração encontrada para o gasoduto correspondente ao ponto  $(\hat{v}, \hat{u}, \tilde{p})$ .
- Fim.

### Observação:

Deve-se destacar que para os problemas aqui tratados a sub-rede de referência, isto é, onde existe um vértice com uma pressão de referencia fixada, considera-se a partir da esquerda, isto é, considera-se a “primeira” sub-rede da esquerda, sendo o “primeiro” nó da esquerda o nó de referência. Este fato difere do

trabalho de Azeredo (2008), Jubini (2008) e Christo (2008) que pesquisam esse tipo de problema, iniciando com a “última” sub-rede da direita, como sendo a sub-rede de referência e o respectivo nó de referência como sendo o “último” da sub-rede de referência. Esta modificação aproveita as propriedades da função custo de combustível, em particular a que corresponde a valores decrescentes do custo associados a valores da pressão de sucção.

#### 4.4 Testes Numéricos

O *Algoritmo 4* foi testado em alguns exemplos da literatura, cujos dados e resultados estão apresentados abaixo.

Para todos os exemplos devem-se considerar as seguintes propriedades do gás:

- $K$  (constante do duto):  $1,3305 \times 10^5$ ;
- $Z$  (fator de compressibilidade do gás): 0,95;
- $R$  (constante do gás): 85,2;
- $S_g$  (gravidade específica do gás ou densidade específica): 0,6248;
- $T$  (temperatura média (°R)): 519,67;
- $f$  (fator de fricção): 0,0085.

**Exemplo 1** (Exemplo net-c-6c2-C1 de Borraz-Sánchez (2009)) Este exemplo corresponde a uma rede, com 6 nós, 4 dutos e 2 estações, como na Figura 4.4. A rede inclui um nó de fornecimento (nó 1), com  $s_1 = 1100$  e um nó de entrega (nó 6), com  $s_6 = 1100$ . Os limites inferiores de pressão estão dados por  $p_i^L = 200$ . Os limites superiores de pressão estão dados por  $p_i^U = 1200$ . O conjunto de dutos é  $\{(1,2);(1,3);(4,6);(5,6)\}$  com comprimento de 50 milhas, diâmetro interno de 3 pés e fator de atrito 0,0085, para todos os dutos. As estações de compressão  $\{(2,4);(3,5)\}$  têm todas, um compressor centrífugo do Tipo A. Tem-se que a vazão volume de

entrada  $Q$  do compressor deve variar entre um limite inferior  $Q^L$  e um limite superior  $Q^U$ , então,  $Q^L = 4200 \leq Q \leq Q^U = 11100$ . De acordo com a equação (3.28), tem-se que todo compressor terá um limite inferior e um superior para a velocidade de rotação do compressor, assim,  $S^L = 4200 \leq S \leq S^U = 6300$ . Os valores das constantes que aparecem nas equações (3.26) e (3.27) são descritas abaixo:

$$A_H = 0,22289 * 10^{-3}; B_H = 0,26112 * 10^{-3};$$

$$C_H = -0,13082 * 10^{-3}; D_H = -0,00504 * 10^{-3};$$

$$A_E = 81,09393384; B_E = -70,28212702;$$

$$C_E = 106,50361597; D_E = -39,93984952.$$

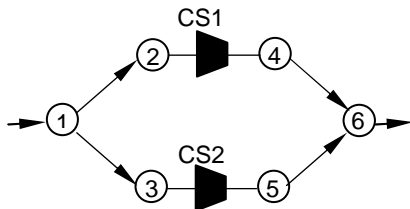


Figura 4.4: Rede do exemplo 1 (Fonte: Borraz-Sánchez (2009))

Os resultados obtidos para o Exemplo 1 podem ser encontrados na tabela apresentada no ANEXO A.

**Exemplo 2** (Exemplo net-c-6c2-C4 de Borraz-Sánchez (2009)) Este exemplo corresponde a uma rede similar a rede anterior onde algumas configurações dos compressores são diferentes. Esta rede também tem 6 nós, 4 dutos e 2 estações, como na Figura 4.4. A rede inclui um nó de fornecimento (nó 1), com  $s_1 = 1100$  e um nó de entrega (nó 6), com  $s_6 = 1100$ . Os limites inferiores de pressão estão dados por  $p_i^L = 200$ . Os limites superiores de pressão estão dados por  $p_i^U = 1200$ . O conjunto de dutos é  $\{(1,2);(1,3);(4,6);(5,6)\}$  com comprimento de 50 milhas, diâmetro interno de 3 pés e fator de atrito 0,0085, para todos os dutos. As estações de compressão  $\{(2,4);(3,5)\}$  têm todas, um compressor centrífugo do Tipo A. Tem-se que a vazão volume de entrada  $Q$  do compressor deve variar entre um limite inferior  $Q^L$  e um limite superior  $Q^U$ , então,  $Q^L = 7000 \leq Q \leq Q^U = 22000$ . De acordo

com a equação (3.28), tem-se que todo compressor terá um limite inferior e um superior para a velocidade de rotação do compressor, assim,  $S^L = 5000 \leq S \leq S^U = 9400$ . Os valores das constantes que aparecem nas equações (3.26) e (3.27) são descritas abaixo:

$$\begin{aligned} A_H &= 0,68237 * 10^{-3}; B_H = -0,90023 * 10^{-3}; \\ C_H &= 0,56894 * 10^{-3}; D_H = -0,12472 * 10^{-3}; \\ A_E &= 134,80547339; B_E = -148,54680228; \\ C_E &= 125,10132351; D_E = -32,09649544. \end{aligned}$$

Os resultados obtidos para o Exemplo 2 podem ser encontrados na tabela apresentada no ANEXO A.

**Exemplo 3** (Exemplo net-c-6c2-C7 de Borraz-Sánchez (2009)) Este exemplo corresponde a uma rede similar a rede anterior onde algumas configurações são diferentes como será observado. Esta rede também tem 6 nós, 4 dutos e 2 estações, como na Figura 4.4. A rede inclui um nó de fornecimento (nó 1), com  $s_1 = 1400$  e um nó de entrega (nó 6), com  $s_6 = 1400$ . Os limites inferiores de pressão estão dados por  $p_i^L = 200$ . Os limites superiores de pressão estão dados por  $p_i^U = 1200$ . O conjunto de dutos é  $\{(1,2);(1,3);(4,6);(5,6)\}$  com comprimento de 50 milhas, diâmetro interno de 3 pés e fator de atrito 0,0085, para todos os dutos. As estações de compressão  $\{(2,4);(3,5)\}$  têm todas, um compressor centrífugo do Tipo A. Tem-se que a vazão volume de entrada  $Q$  do compressor deve variar entre um limite inferior  $Q^L$  e um limite superior  $Q^U$ , então,  $Q^L = 12000 \leq Q \leq Q^U = 32500$ . De acordo com a equação (3.28), tem-se que todo compressor terá um limite inferior e um superior para a velocidade de rotação do compressor, assim,  $S^L = 3920 \leq S \leq S^U = 5880$ . Os valores das constantes que aparecem nas equações (3.26) e (3.27) são descritas abaixo:

$$\begin{aligned}
A_H &= 0,18699 * 10^{-3}; B_H = -0,00891 * 10^{-3}; \\
C_H &= 0,00240 * 10^{-3}; D_H = -0,00063 * 10^{-3}; \\
A_E &= 92,81483014; B_E = -27,68068340; \\
C_E &= 11,82952240; D_E = -1,35812933.
\end{aligned}$$

Os resultados obtidos para o Exemplo 3 podem ser encontrados na tabela apresentada no ANEXO A.

**Exemplo 4** (Exemplo net-c-10c3-C2 de Borraz-Sánchez (2009)) Este exemplo corresponde a uma rede, com 10 nós, 7 dutos e 3 estações, como na Figura 4.5. A rede inclui dois nós de fornecimento (nós 1 e 3), com  $s_1 = 900$  e  $s_3 = 400$  e três nós de entrega (nós 8, 9 e 10), com  $s_8 = 1000$ ,  $s_9 = 200$  e  $s_{10} = 100$ . Os limites inferiores de pressão estão dados por  $p_i^L = 200$ . Os limites superiores de pressão estão dados por  $p_i^U = 1200$ . O conjunto de dutos é  $\{(2,3);(4,6);(5,7);(6,8);(7,8);(8,9);(9,10)\}$  com comprimento de 30 milhas, diâmetro interno de 3 pés e fator de atrito 0,0085, para todos os dutos. As estações de compressão  $\{(1,2);(3,4);(3,5)\}$  têm todas, um compressor centrífugo do Tipo A. Tem-se que a vazão volume de entrada  $Q$  do compressor deve variar entre um limite inferior  $Q^L$  e um limite superior  $Q^U$ , então,  $Q^L = 4200 \leq Q \leq Q^U = 11100$ . De acordo com a equação (3.28), tem-se que todo compressor terá um limite inferior e um superior para a velocidade de rotação do compressor, assim,  $S^L = 4200 \leq S \leq S^U = 6300$ . Os valores das constantes que aparecem nas equações (3.26) e (3.27) são descritas abaixo:

$$\begin{aligned}
A_H &= 0,22289 * 10^{-3}; B_H = 0,26112 * 10^{-3}; \\
C_H &= -0,13082 * 10^{-3}; D_H = -0,00504 * 10^{-3}; \\
A_E &= 81,09393384; B_E = -70,28212702; \\
C_E &= 106,50361597; D_E = -39,93984952.
\end{aligned}$$

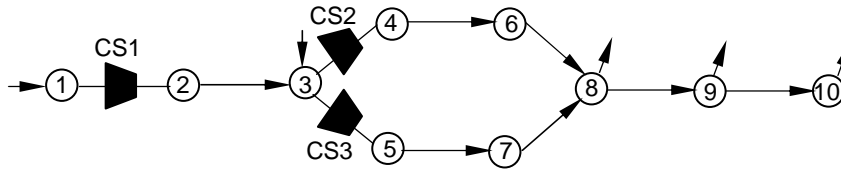


Figura 4.5: Rede do exemplo 4 (Fonte: Borraz-Sánchez (2009))

Os resultados obtidos para o Exemplo 4 podem ser encontrados na tabela apresentada no ANEXO A.

**Exemplo 5** (Exemplo net-c-10c3-C4 de Borraz-Sánchez (2009)) Este exemplo corresponde a uma rede similar a rede anterior onde algumas configurações são diferentes como será observado. Esta rede também tem 10 nós, 7 dutos e 3 estações, como na Figura 4.5. A rede inclui dois nós de fornecimento (nós 1 e 3), com  $s_1 = 1300$  e  $s_3 = 800$  e três nós de entrega (nós 8, 9 e 10), com  $s_8 = 1300$ ,  $s_9 = 200$  e  $s_{10} = 600$ . Os limites inferiores de pressão estão dados por  $p_i^L = 200$ . Os limites superiores de pressão estão dados por  $p_i^U = 1200$ . O conjunto de dutos é  $\{(2,3);(4,6);(5,7);(6,8);(7,8);(8,9);(9,10)\}$  com comprimento de 30 milhas, diâmetro interno de 3 pés e fator de atrito 0,0085, para todos os dutos. As estações de compressão  $\{(1,2);(3,4);(3,5)\}$  têm todas, um compressor centrífugo do Tipo A. Tem-se que a vazão volume de entrada  $Q$  do compressor deve variar entre um limite inferior  $Q^L$  e um limite superior  $Q^U$ , então,  $Q^L = 7000 \leq Q \leq Q^U = 22000$ . De acordo com a equação (3.28), tem-se que todo compressor terá um limite inferior e um superior para a velocidade de rotação do compressor, assim,  $S^L = 5000 \leq S \leq S^U = 9400$ . Os valores das constantes que aparecem nas equações (3.26) e (3.27) são descritas abaixo:

$$A_H = 0,68237 * 10^{-3}; B_H = -0,90023 * 10^{-3};$$

$$C_H = 0,56894 * 10^{-3}; D_H = -0,12472 * 10^{-3};$$

$$A_E = 134,80547339; B_E = -148,54680228;$$

$$C_E = 125,10132351; D_E = -32,09649544.$$

Os resultados obtidos para o Exemplo 5 podem ser encontrados na tabela apresentada no ANEXO A.

**Exemplo 6** (Exemplo net-c-15c5-C2 de Borraz-Sánchez (2009)) Este exemplo corresponde a uma rede, com 15 nós, 10 dutos e 5 estações, como na Figura 4.6. A rede inclui três nós de fornecimento (nós 1, 2 e 3), com  $s_1 = 500, s_2 = 450$  e  $s_3 = 400$  e seis nós de entrega (nós 10, 11, 12, 13, 14 e 15), com  $s_{10} = 200, s_{11} = 250, s_{12} = 300, s_{13} = 200, s_{14} = 200$  e  $s_{15} = 200$ . Os limites inferiores de pressão estão dados por  $p_i^L = 200$ . Os limites superiores de pressão estão dados por  $p_i^U = 1200$ . O conjunto de dutos é  $\{(1,2);(1,3);(4,6);(5,6);(7,10);(7,11);(8,12);(8,13);(9,14);(9,15)\}$  com comprimento de 50 milhas, diâmetro interno de 3 pés e fator de atrito 0,0085, para todos os dutos. As estações de compressão  $\{(2,4);(3,5);(6,7);(6,8);(6,9)\}$  têm todas, um compressor centrífugo do Tipo A. Tem-se que a vazão volume de entrada  $Q$  do compressor deve variar entre um limite inferior  $Q^L$  e um limite superior  $Q^U$ , então,  $Q^L = 4200 \leq Q \leq Q^U = 11100$ . De acordo com a equação (3.28), tem-se que todo compressor terá um limite inferior e um superior para a velocidade de rotação do compressor, assim,  $S^L = 4200 \leq S \leq S^U = 6300$ . Os valores das constantes que aparecem nas equações (3.26) e (3.27) são descritas abaixo:

$$A_H = 0,22289 * 10^{-3}; B_H = 0,26112 * 10^{-3};$$

$$C_H = -0,13082 * 10^{-3}; D_H = -0,00504 * 10^{-3};$$

$$A_E = 81,09393384; B_E = -70,28212702;$$

$$C_E = 106,50361597; D_E = -39,93984952.$$

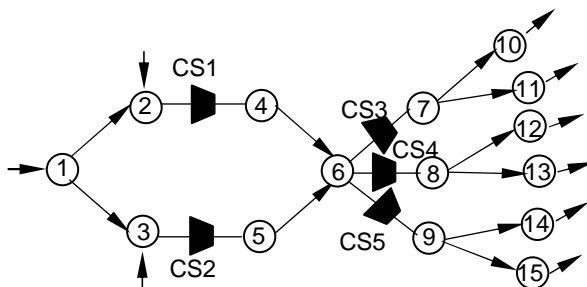


Figura 4.6: Rede do exemplo 6 (Fonte: Borraz-Sánchez (2009))



Os resultados obtidos para o Exemplo 6 podem ser encontrados na tabela apresentada no ANEXO A.

**Exemplo 7** (Exemplo 2 de Wu *et al.* (2000)) Este exemplo corresponde a uma rede, com 10 nós, 6 dutos e 3 estações, como na Figura 4.7. A rede inclui um nó de fornecimento (nós 1) , com  $s_1 = 800$  e cinco nós de entrega (nós 5, 6, 7, 9 e 10), com  $s_5 = s_9 = -100, s_6 = s_7 = -150$  e  $s_{10} = -300$  . Os limites inferiores de pressão estão dados por  $p_1^L = p_2^L = 600, p_3^L = p_6^L = p_7^L = p_9^L = 450$  ,  $p_4^L = 500, p_5^L = p_{10}^L = 400$  e  $p_8^L = 550$  . Os limites superiores de pressão estão dados por  $p_1^U = 700$  e  $p_i^U = 800$  , para todo  $i > 1$ . O conjunto de dutos é  $\{(2,3);(4,5);(5,6);(5,7);(8,9);(9,10)\}$  com comprimento de 50 milhas, diâmetro interno de 3 pés e fator de atrito 0,0085, para todos os dutos. As estações de compressão  $\{(1,2);(3,4);(3,8)\}$  têm todas, três compressores centrífugos do Tipo A, dispostos em paralelo. Tem-se que a vazão volume de entrada Q do compressor deve variar entre um limite inferior  $Q^L$  e um limite superior  $Q^U$  , então,  $Q^L = 7000 \leq Q \leq Q^U = 22000$  . De acordo com a equação (3.28), tem-se que todo compressor terá um limite inferior e um superior para a velocidade de rotação do compressor, assim,  $S^L = 5000 \leq S \leq S^U = 9400$  . Os valores das constantes que aparecem nas equações (3.26) e (3.27) são descritas abaixo:

$$A_H = 0,6824 * 10^{-3}; B_H = -0,9002 * 10^{-3};$$

$$C_H = 0,5689 * 10^{-3}; D_H = -0,1247 * 10^{-3};$$

$$A_E = 134,8055; B_E = -148,5468;$$

$$C_E = 125,1013; D_E = -32,0965.$$

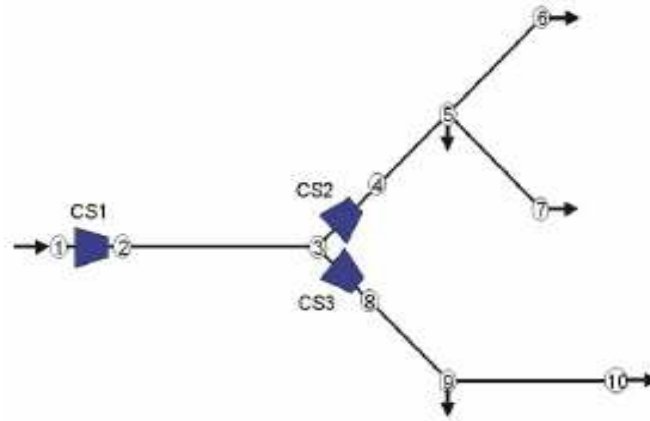


Figura 4.7: Rede do exemplo 7 (Fonte: Wu *et al.*, (2000))

Os resultados obtidos para o Exemplo 7 podem ser encontrados na tabela apresentada no ANEXO A.

**Exemplo 8** (Exemplo 3 de Wu *et al.* (2000)) Este exemplo corresponde a uma rede, com 48 nós, 43 dutos e 8 estações, como na Figura 4.8. Os dados correspondentes as fontes podem ser vistos na Tabela A.15 e as configurações dos dutos, na Tabela A.16. Os limites de pressões para todos os nós são [50, 1500], exceto para os nós 1 ([850, 1250]) e 3 ([950, 1100]). As estações de compressão  $\{(2,9);(8,10);(12,13);(20,21);(21,22);(20,48);(24,46);(48,25)\}$  têm todas, três compressores centrífugos do Tipo A e dois compressores centrífugos do Tipo B, dispostos em paralelo. Tem-se que a vazão volume de entrada  $Q$  de cada compressor deve variar entre um limite inferior  $Q^L$  e um limite superior  $Q^U$ , então,  $(Q_A)^L = 7000 \leq Q_A \leq (Q_A)^U = 22000$  e  $(Q_B)^L = 16000 \leq Q_B \leq (Q_B)^U = 60000$ . De acordo com a equação (3.28), tem-se que todo compressor terá um limite inferior e um superior para a velocidade de rotação do compressor, assim,  $(S_A)^L = 5000 \leq S_A \leq (S_A)^U = 9400$  e  $(S_B)^L = 6000 \leq S_B \leq (S_B)^U = 12000$ . Os valores das constantes que aparecem nas equações (3.26) e (3.27) são descritas abaixo:

$$A_{H_A} = 0,6824 * 10^{-3}; B_{H_A} = -0,9002 * 10^{-3};$$

$$C_{H_A} = 0,5689 * 10^{-3}; D_{H_A} = -0,1247 * 10^{-3};$$

$$A_{E_A} = 134,8055; B_{E_A} = -148,5468;$$

$$C_{E_A} = 125,1013; D_{E_A} = -32,0965.$$

$$A_{H_B} = 0,6824 * 10^{-3}; B_{H_B} = -0,4501 * 10^{-3};$$

$$C_{H_B} = 0,1422 * 10^{-3}; D_{H_B} = -0,01558 * 10^{-3};$$

$$A_{E_B} = 140,7825; B_{E_B} = -93,6928;$$

$$C_{E_B} = 44,2825; D_{E_B} = -5,9793.$$

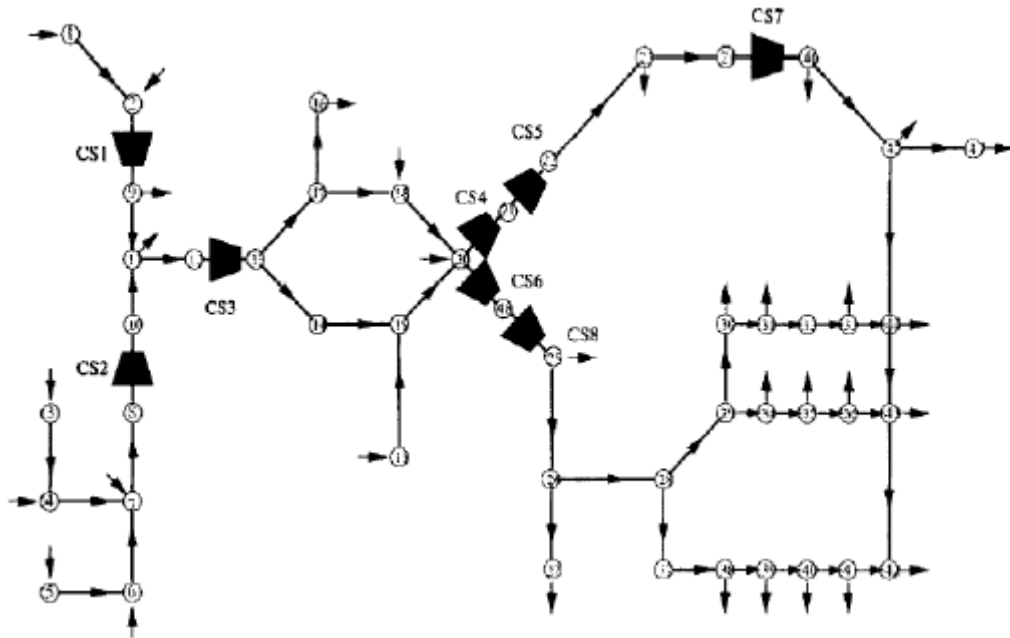


Figura 4.8: Rede do exemplo 8. (Fonte: Wu *et al.*, (2000))

Os resultados obtidos para o Exemplo 8 e os dados referente a rede podem ser encontrados na tabela apresentada no ANEXO A.

A seguir é apresentado na Tabela 4.1 um resumo dos resultados encontrados em cada um dos exemplos citados anteriormente.



p31	----	----	----	----	----	----	----	798,500
p32	----	----	----	----	----	----	----	798,600
p33	----	----	----	----	----	----	----	798,700
p34	----	----	----	----	----	----	----	772,100
p35	----	----	----	----	----	----	----	752,700
p36	----	----	----	----	----	----	----	748,600
p37	----	----	----	----	----	----	----	872,300
p38	----	----	----	----	----	----	----	795,000
p39	----	----	----	----	----	----	----	751,200
p40	----	----	----	----	----	----	----	733,600
p41	----	----	----	----	----	----	----	730,900
p42	----	----	----	----	----	----	----	731,800
p43	----	----	----	----	----	----	----	748,800
p44	----	----	----	----	----	----	----	805,800
p45	----	----	----	----	----	----	----	840,100
p46	----	----	----	----	----	----	----	902,200
p47	----	----	----	----	----	----	----	835,000
p48	----	----	----	----	----	----	----	935,000
<b>Custo total</b>	<b>2,3142*10<sup>6</sup></b>	<b>1,3958*10<sup>6</sup></b>	<b>1,2201*10<sup>6</sup></b>	<b>5,8119*10<sup>6</sup></b>	<b>4,7663*10<sup>6</sup></b>	<b>6,445*10<sup>6</sup></b>	<b>2,5915*10<sup>6</sup></b>	<b>23,1260*10<sup>6</sup></b>

Tabela 4.1: Resultado final dos exemplos

## **CAPÍTULO 5**

### **Conclusões**

Aborda-se nesta dissertação o problema de minimização do custo de transporte de gás natural em uma rede de gasodutos, onde o custo corresponde ao custo operacional.

Considera-se que os gasodutos estão formados por dutos para condução do gás, válvulas e outros dispositivos que permitem a junção dos dutos, denominados genericamente de nós do gasoduto. A pressão que permite a movimentação do gás se perde a cada certo trecho percorrido, basicamente por fricção. Portanto, esta deve ser restaurada por dispositivos especiais do gasoduto, denominados estações de compressão. As estações de compressão estão compostas, tipicamente, por uma bateria de compressores centrífugos dispostos em paralelo, que se ativam para aumentar a pressão da vazão de gás a ser escoado, consumindo parte do gás transportado.

Devido à proporção dos custos do combustível usado nas estações de compressão em relação aos custos operacionais do gasoduto, assume-se que o custo operacional correspondente ao custo do combustível usado nas estações de compressão. Trata-se, portanto, de satisfazer demandas de entrega de gás natural

nos correspondentes pontos da rede, a partir de pontos de injeção, de forma que os custos operacionais sejam mínimos.

Diferentemente dos modelos encontrados na literatura (c.f., Wu *et al.*, 2000; RÍOS-MERCADO *et al.*, 2000, 2002) e baseados nos trabalhos de Yamashita *et al.*, (2008), Azeredo (2008), Jubini (2008) e Christo (2008), considera-se aqui que as estações de compressão do gasoduto estão formadas por compressores não necessariamente idênticos. Resulta, assim, um modelo misto-inteiro quadrático não diferenciável, tratado algoritmicamente com técnicas GRASP. Este trabalho propõe modificações na heurística proposta pelos autores mencionados, resultando em aprimoramento dos resultados obtidos. Embora o algoritmo GRASP aqui formulado possa ser usado para os exemplos apresentados em Wu *et al.* (2000), onde as estações de compressão estão formadas por compressores idênticos, este último algoritmo não poderia ser usado para o caso mais geral aqui apresentado, de estações com compressores não idênticos.

No modelo generalizado, diferente do que ocorre no modelo clássico, tem-se que a vazão a ser comprimida numa estação não é necessariamente dividida em parcelas iguais entre os compressores ativados. Portanto, no modelo clássico é suficiente determinar *quantos* compressores devem ser ligados em cada estação, sendo que no modelo generalizado é necessário determinar *quais* destes devem ser ativados, aumentando, conseqüentemente, a complexidade do problema, porém, tornando-o mais real.

Para a abordagem algorítmica do modelo, adota-se neste trabalho o domínio de uma estação e a função custo de combustível estudada por Azeredo (2008), que utilizou conceitos desenvolvidos em Wu *et al.* (2000) adaptando-os, para se aplicar ao caso do modelo de Jubini (2008).

De acordo com Wu *et al.* (2000) define-se o domínio  $D$  de uma estação de compressão e uma aproximação poliedral para uma estação, onde a hipótese básica é que as estações estão compostas por compressores idênticos. Quando esta hipótese não se satisfaz, como é o caso do modelo generalizado aqui considerado, embora a aproximação sugerida por Wu *et al.* (2000) seja válida, a aproximação para uma estação realizada desta forma não é a mais adequada, pois ao se considerar uma estação de compressão com compressores não necessariamente idênticos a aproximação proposta pode deixar de ser convexa. Logo, neste trabalho

discutiu-se a aproximação do domínio  $D$  generalizado, que consiste em aproximar poliedralmente cada um dos domínios individuais dos compressores componentes da estação.

Da mesma forma, dada uma estação de compressão e um vetor  $(v, p_s, p_d) \in D$ , o cálculo, apresentado por Wu *et al.* (2000), da função custo de compressão também se adapta para uma estação generalizada. Pois ao considerar que se têm compressores não idênticos em uma estação, faz-se necessário introduzir variáveis binárias para determinação da utilização ou não de cada compressor.

A partir da experiência de lamashita (2006), para o caso de redes de gás natural *off-shore*, em que se desenvolvem técnicas heurísticas genéticas e GRASP, verifica-se que esta última apresenta significativa superioridade, nesta pesquisa, propõe-se uma modificação da heurística GRASP desenvolvida em Christo (2008) para a solução do problema, a qual, foi testada em alguns exemplos citados na literatura de Wu *et al.* (2000), obtendo resultados muito satisfatórios.

Deve-se destacar que para os testes realizados não foram considerados as capacidades dos dutos como parte do algoritmo GRASP, na etapa de processamento.

Sugere-se para trabalhos futuros uma adaptação no algoritmo para que leve em consideração a capacidade dos dutos de forma a generalizar mais o modelo. Outra sugestão é realizar testes computacionais considerando o domínio aproximado e a função custo generalizada, introduzidas por Azeredo (2008), fazendo uma comparação com os resultados aqui apresentados, onde foi utilizado o domínio e a função custo originais.



## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALMEIDA, E. L. F.; BICALHO, R. G. (2000.) *Evolução das tecnologias de transporte e reestruturação da indústria de gás natural*. Grupo de Energia – IE/UFRJ.

AZEREDO, M. M. (2008) *Aproximações do Domínio e a Função Custo de uma Estação de Compressão no Transporte de Gás Natural*. Tese (Mestrado em Engenharia de Produção) – Campos dos Goytacazes – RJ, Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro – UENF, 66p.

BORRAZ-SÁNCHEZ; RÍOS-MERCADO (2009) Improving the operation of pipeline systems on cyclic structures by tabu search. *Computers and Chemical Engineering* 33, 58–64

CHRISTO, A. Z. T. (2008) *Uma Metaheurística GRASP para o Planejamento de Movimentação de Gás Natural em Gasodutos*. Tese (Mestrado em Engenharia de Produção) – Campos dos Goytacazes – RJ, Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro – UENF, 62p.

FEO T. A., RESENDE M. G. C. (1995) Greedy Randomized Adaptive Search Procedures. *Journal of Global Optimization*, 6: 109–134.

IAMASHITA, E. K.; GALAXE, F.; ARICA, J. A. (2008) Planning Model for Offshore Natural Gas Transmission. *Pesquisa Operacional*, Rio de Janeiro, v.28, n.1, p.29-44.

IAMASHITA, E. K. (2006) *Sistema de Planejamento de Movimentação de Gás Utilizando Metaheurísticas*. Tese (Doutorado em Engenharia de Reservatório e da Exploração) – Macae – RJ, Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro – UENF, 112p.

IAMASHITA, E. K., GALAXE, F., ARICA, J., (2005) Um Novo Modelo de Planejamento Integrado de Compressão e Escoamento de Gás para uma Rede Complexa. *Rio Pipeline Conference & Exposition*. Rio de Janeiro, p. 3-7.

IAMASHITA, E. K. (2002) *Teste do Módulo Econômico do Sistema Otimizador da Movimentação de Gás*. Tese (Mestrado em Engenharia de Reservatório e de Exploração de Petróleo)-Campos dos Goytacazes-RJ, Universidade Estadual do Norte Fluminense - UENF, 164p.

JUBINI, G. M. (2008) *Um Modelo para a Otimização da Operação de Gasodutos e uma Proposta Heurística para sua Solução*. Tese (Mestrado em Engenharia de Produção) – Campos dos Goytacazes – RJ, Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro – UENF, 81p.

LAUREANO, F. H. G. C. (2005) *A indústria de gás natural e as relações contratuais: uma análise do caso brasileiro*. Tese (Mestrado em Ciências em Planejamento Energético) – Rio de Janeiro – RJ, COPPE/UFRJ, 145p.

LUONGO, C. A., GILMOUR, B. J., SCHROEDER, D. W. (1989) Optimization in Natural Gas Transmission Networks: A Tool to Improve Operational Efficiency. *Presented at the 3rd SIAM Conference on Optimization*, Boston.

PETROBRAS. (1998) *Gás Natural - O Combustível do Século XXI garantido pela PETROBRAS desde hoje*. PETROBRAS/ABASTECIMENTO – Superintendência de Marketing e Comercialização - GEGAS: Gerência de Gás, Rio de Janeiro.

RÍOS-MERCADO, R. Z.; WU, S.; SCOTT, R.L.; BOYD, E. A. (2002) A Reduction Technique for Natural Gas Transmission Network Optimization Problems. *Annals of Operations Research*, p. 217-234.

RIOS-MERCADO, R. Z., WU, S., SCOTT, L. R. E BOYD, E. A. (2000) Preprocessing on Natural Gas Transmission Networks. *Technical Report PISIS-2000-01*, Universidad Autonoma de Nuevo Leon - UANL, San Nicolas de los Garza, México,

VAZ, C. E. M., et al. (2008) *Tecnologia da Indústria do Gás Natural*. Macaé: Petróbas/E&P – BC, 440p.

WU, S.; RÍOS-MERCADO, R. Z.; BOYD E. A.; SCOTT, L. R. (2000) Model Relaxations for the Fuel Cost Minimization of Steady-State Gas Pipeline Networks. *Elsevier Science: Mathematical and Computer Modelling*, 31, p. 197-220.

## Anexo A

### Resultado para os Exemplos Numéricos

- **Exemplo 1**

V = [550,550]					
p1	p2	p3	p4	p5	p6
785,8000	728,1555	728,1555	808,9010	808,9010	753,0269

Tabela A.1: Pressões da rede - Exemplo 1

Estações	CS1	CS2	Custo Total
Custos	$1,1571 \cdot 10^6$	$1,1572 \cdot 10^6$	$2,3142 \cdot 10^6$

Tabela A.2: Custo das estações de compressão - Exemplo 1

- **Exemplo 2**

V = [550,550]					
p1	p2	p3	p4	p5	p6
542,742	455,300	455,300	481,060	481,060	379,667

Tabela A.3: Pressões da rede - Exemplo 2

Estações	CS1	CS2	Custo Total
Custos	$6,9791 \cdot 10^5$	$6,9791 \cdot 10^5$	$1,3958 \cdot 10^6$

Tabela A.4: Custo das estações de compressão - Exemplo 2

- **Exemplo 3**

V = [700,700]					
p1	p2	p3	p4	p5	p6
554,382	407,400	407,400	429,300	429,300	207,204

Tabela A.5: Pressões da rede - Exemplo 3

Estações	CS1	CS2	Custo Total
Custos	$6,1003 \cdot 10^5$	$6,1003 \cdot 10^5$	$1,2201 \cdot 10^6$

Tabela A.6: Custo das estações de compressão - Exemplo 3

- **Exemplo 4**

<b>V = [900,650,650]</b>				
p1	p2	p3	p4	p5
956,450	1118,120	1053,556	1199,990	1199,990
p6	p7	p8	p9	p10
1169,119	1169,119	1137,412	1130,543	1129,777

Tabela A.7: Pressões da rede - Exemplo 4

Estação	CS1	CS2	CS3	<b>Custo Total</b>
Custos	$2,8763 \cdot 10^6$	$1,4678 \cdot 10^6$	$1,4678 \cdot 10^6$	<b><math>5,81190 \cdot 10^6</math></b>

Tabela A.8: Custo das estações de compressão - Exemplo 4

- **Exemplo 5**

<b>V = [1300,1050,1050]</b>				
p1	p2	p3	p4	p5
954,500	1023,600	869,033	918,300	918,300
p6	p7	p8	p9	p10
807,733	807,733	679,404	592,288	537,112

Tabela A.9: Pressões da rede - Exemplo 5

Estações	CS1	CS2	CS3	<b>Custo Total</b>
Custos	$2,098 \cdot 10^6$	$1,3342 \cdot 10^6$	$1,3342 \cdot 10^6$	<b><math>4,7663 \cdot 10^6</math></b>

Tabela A.10: Custo das estações de compressão - Exemplo 5

- **Exemplo 6**

<b>V = [650,700,450,500,400]</b>							
p1	p2	p3	p4	p5	p6	p7	p8
860,400	853,670	845,176	947,000	957,236	880,304	1013,000	1008,500
p9	p10	p11	p12	p13	p14	p15	
1016,000	1007,489	1004,262	995,543	1002,760	1010,204	1010,204	

Tabela A.11: Pressões da rede - Exemplo 6

Estações	CS1	CS2	CS3	CS4	CS5	<b>Custo Total</b>
Custos	$1,36 \cdot 10^6$	$1,757 \cdot 10^6$	$1,110 \cdot 10^6$	$1,175 \cdot 10^6$	$1,036 \cdot 10^6$	<b><math>6,445 \cdot 10^6</math></b>

Tabela A.12: Custo das estações de compressão - Exemplo 6

- **Exemplo 7**

<b>V = [800,400,400]</b>				
p1	p2	p3	p4	p5
651,000	690,101	540,000	605,000	565,566
p6	p7	p8	p9	p10
559,798	559,798	605,000	565,566	542,125

Tabela A.13: Pressões da rede - Exemplo 7

Estações	CS1	CS2	CS3	<b>Custo Total</b>
Custos	$1,0679 \cdot 10^6$	$7,6178 \cdot 10^5$	$7,6178 \cdot 10^5$	<b><math>2,5915 \cdot 10^6</math></b>

Tabela A.14: Custo das estações de compressão - Exemplo 7

- **Exemplo 8**

$i$	$s_i$	$i$	$s_i$	$i$	$s_i$	$i$	$s_i$
1	+600	13	0	25	-550	37	0
2	0	14	0	26	0	38	-30
3	+200	15	+100	27	-50	39	-30
4	+200	16	-100	28	0	40	-30
5	+200	17	0	29	0	41	-30
6	+200	18	+100	30	-30	42	-40
7	+200	19	0	31	-30	43	-40
8	0	20	+450	32	0	44	-40
9	-400	21	0	33	-30	45	-100
10	0	22	0	34	-30	46	-200
11	-100	23	-200	35	-30	47	-180
12	0	24	0	36	-30	48	0

Tabela A.15: Fontes da Rede – Exemplo 8 (Fonte: Wu *et al.* , 2000)

<i>Duto</i>	<i>L</i>	<i>d</i>	<i>f</i>	<i>Duto</i>	<i>L</i>	<i>d</i>	<i>f</i>
(1,2)	10,1015	1,5	0,0108	(30,31)	5,0507	1,0	0,0130
(3,4)	4,5175	1,5	0,0108	(31,32)	4,5175	1,0	0,0130
(4,7)	5,1508	1,5	0,0108	(32,33)	4,5175	1,0	0,0130
(5,6)	5,1508	1,0	0,0130	(33,34)	4,5175	1,0	0,0130
(6,7)	5,1508	1,5	0,0108	(29,34)	5,0507	1,0	0,0130
(7,8)	5,1508	2,0	0,0090	(34,35)	4,5175	1,0	0,0130
(9,11)	10,1015	1,5	0,0108	(35,36)	4,5175	1,0	0,0130
(10,11)	5,1508	2,0	0,0090	(36,43)	4,5175	1,0	0,0130
(11,12)	10,1015	3,0	0,0085	(28,37)	5,0507	1,0	0,0130
(13,14)	10,1015	1,5	0,0108	(37,38)	5,0507	1,0	0,0130
(14,19)	10,1015	1,5	0,0108	(38,39)	5,0507	1,0	0,0130
(15,19)	10,1015	1,5	0,0108	(39,40)	5,0507	1,0	0,0130
(19,20)	10,1015	1,5	0,0108	(40,41)	5,0507	1,0	0,0130
(13,17)	10,1015	2,0	0,0095	(41,42)	5,0507	1,0	0,0130
(17,16)	10,1015	1,5	0,0108	(43,42)	4,5175	1,0	0,0130
(17,18)	10,1015	2,0	0,0095	(44,43)	4,5175	1,0	0,0130
(18,20)	10,1015	2,0	0,0095	(45,44)	8,3299	1,5	0,0108
(25,26)	10,1015	1,5	0,0108	(45,47)	5,7143	2,0	0,0090
(26,27)	7,1429	1,5	0,0108	(46,45)	11,5175	2,0	0,0090
(26,28)	10,1015	1,5	0,0108	(22,23)	11,5175	2,0	0,0090
(28,29)	5,0507	1,0	0,0130	(23,24)	11,4286	2,0	0,0090
(29,30)	4,5175	1,0	0,0130				

Tabela A.16: Dados dos dutos – Exemplo 8 (Fonte: Wu *et al.*, 2000)

<b>V= [600, 1000, 1100, 850, 850, 850, 650, 850]</b>							
p1	p2	p3	p4	p5	p6	p7	p8
1239,000	825,000	1145,900	1127,253	1308,614	1127,274	1037,982	915,700
p9	p10	p11	p12	p13	p14	p15	p16
925,897	1000,704	873,218	831,900	1207,200	1102,000	997,500	1072,700
p17	p18	p19	p20	p21	p22	p23	p24
1075,500	945,100	985,500	743,500	985,000	1120,000	931,878	802,755
p25	p26	p27	p28	p29	p30	p31	p32
1118,500	1018,723	1016,665	943,244	821,400	803,000	798,500	798,600
p33	p34	p35	p36	p37	p38	p39	p40
798,700	772,100	752,700	748,600	872,300	795,000	751,200	733,600
p41	P42	p43	p44	p45	p46	p47	p48
730,900	731,800	748,800	805,800	840,100	902,200	835,000	935,000

Tabela A.17: Pressões da rede - Exemplo 8

<b>Estações</b>	<b>Custos</b>
CS1	$1,1654 \cdot 10^6$
CS2	$1,6115 \cdot 10^6$
CS3	$7,4448 \cdot 10^6$
CS4	$4,0107 \cdot 10^6$
CS5	$1,8059 \cdot 10^6$
CS6	$3,2487 \cdot 10^6$
CS7	$1,2565 \cdot 10^6$
CS8	$2,5829 \cdot 10^6$
<b>Custo Total</b>	<b><math>23,1260 \cdot 10^6</math></b>

Tabela A.18: Custo das estações de compressão - Exemplo 8