

## **REAGRUPAMENTO CAPACITADO: PROBLEMA DE REDISTRITAMENTO DE LOTES DE FATURAMENTO**

**Laura Silva de Assis**

Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação - UNICAMP  
Cidade Universitária Zeferino Vaz, Av. Albert Einstein, 400. CEP.:13083-852, Campinas - SP  
E-mail: laura.assis@gmail.com

**Paulo Morelato França**

Departamento de Matemática, Estatística e Computação - FCT/UNESP  
R. Roberto Simonsen, 305. CEP: 19060-900, Presidente Prudente - SP  
E-mail: paulo.morelato@fct.unesp.br

**Fábio Luiz Usberti**

Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação - UNICAMP  
Cidade Universitária Zeferino Vaz, Av. Albert Einstein, 400. CEP.:13083-852, Campinas - SP  
E-mail: fusberti@yahoo.com

### **Resumo**

O problema de agrupamento capacitado consiste em realizar o particionamento de uma região em distritos que obedeçam a um ou mais critérios. Neste trabalho é apresentada uma metodologia eficiente para solucionar o problema de agrupamento capacitado multicritério (PACM), no qual se deseja agrupar unidades territoriais, em um número fixo de agrupamentos com capacidade limitada e sujeito a mais de um critério de otimização. Neste trabalho, o PACM está ambientado em um problema de reagrupamento de lotes urbanos, nos quais devem ser realizadas as leituras dos medidores de energia elétrica por concessionárias de distribuição de energia. O problema de reagrupamento surge sempre que a atual conformação dos distritos fica obsoleta. A metodologia proposta para resolver este problema é um algoritmo baseado na metaheurística GRASP (*Greedy randomized adaptive search*). Os experimentos computacionais demonstram a eficiência do método para instâncias de grande porte.

**PALAVRAS-CHAVE: Agrupamento Capacitado, Metaheurísticas, Otimização Combinatória.**

### **Abstract**

The capacitated districting problem consists of performing the partitioning of a region into districts that comply with one or more criteria. An efficient methodology to solve the multicriteria capacitated redistricting problem (PACM) is presented in this paper, in which capacitated clusters of territorial units have to be designed following some performance criteria. In this work, the PACM is applied to a problem faced by an electric energy utility which wants to reassign clients to clusters used to perform energy consumption measurements. The redistricting problem appears when the current configuration of the districts is obsolete. The proposed method to solve this problem is a metaheuristic based on GRASP (*Greedy randomized adaptive search procedure*). Computational experiments demonstrate the effectiveness of the approach.

**KEYWORDS Capacitated Clustering, Metaheuristic, Combinatorial Optimization.**

# 1 Introdução

Os problemas de distritamento (PD) são problemas de otimização combinatória, que possuem o objetivo de agrupar  $n$  unidades territoriais contíguas em  $p$  agrupamentos ( $p < n$ ), buscando encontrar a melhor solução de acordo com um critério de otimização.

Dentre alguns trabalhos dedicados ao PD <sup>1</sup> destaca-se Ríos-Mercado e Fernández (2007) que apresentam uma metaheurística (GRASP) para resolver o problema de design territorial aplicado a uma empresa de distribuição de bebidas da cidade de Monterrey, México. Basicamente o GRASP possui duas fases: construção e pós-processamento, sendo que a primeira fase tenta construir uma solução inicial factível e a segunda tenta melhorá-la a partir de uma busca local (BL). Como a maior parte do tempo computacional gasto pelo algoritmo se dá na BL, os autores implementaram um filtro para evitar que a busca local seja executada para soluções não promissoras, acelerando o algoritmo. Os experimentos computacionais mostram a eficiência desse algoritmo, produzindo melhorias significativas comparando as soluções obtidas na heurística construtiva e as soluções da busca local.

França et al. (2007) apresentam um problema de agrupamento capacitado multicritério (PACM) aplicado ao problema de redefinição de lotes urbanos de faturamento de uma empresa de distribuição de energia elétrica. O PACM abordado é tratado como o problema de  $p$ -medianas capacitado e os autores propõem duas abordagens construtivas para resolvê-lo baseadas em melhorias de estratégias já utilizadas, resultando em novas heurísticas. Os estudos comparativos entre os algoritmos originais e os modificados revelaram que esses últimos se sobressaíram em termos de qualidade das soluções obtidas. No entanto uma desvantagem dessa abordagem, de acordo com os autores, reside na dificuldade em obter soluções sem enclaves, soluções cujos lotes são subgrafos conexos.

Este artigo apresenta um PACM que foi tratado como um problema de distritamento hierárquico com dois objetivos, geográfico e de compacidade, os quais serão abordados posteriormente.

Este problema corresponde à tarefa que concessionárias de distribuição de energia elétrica devem desempenhar mensalmente para medir o consumo de energia gasta nas unidades consumidoras de sua área de concessão, sendo que esse consumo alimenta a fatura que é enviada a cada cliente.

O foco do problema se encontra nos clientes residenciais, que formam um enorme contingente de clientes que requerem uma complexa e sistemática realização de tarefas, começando com a repartição da área de concessão em unidades regionais que, por sua vez, são divididas em lotes de faturamento. Dentro de cada lote (também chamados de agrupamentos) encontram-se definidas as rotas que são percorridas pelos leituristas mensalmente.

Um problema encontrado é que muitas concessionárias às vezes não dispõem de um plano otimizado de leitura. Mesmo as que possuem tal plano, sofrem um desequilíbrio entre os lotes e suas rotas que acontece devido ao crescimento vegetativo do mercado, de sua aglomeração, das transformações urbanas e da expansão do seu sistema elétrico.

Por esse motivo, a tarefa que se deseja cumprir, após a constatação da degradação da atual configuração dos territórios, é a de redefinir os limites geográficos dos territórios, procurando equilibrar suas cargas de leitura, porém sem desprezar os seus formatos e procurando manter tanto quanto possível a associação cliente e a data de leitura de seu medidor.

---

<sup>1</sup>Maiores informações sobre problemas de distritamento podem ser encontradas em: <http://www.springerlink.com/content/e2440556382017tp/fulltext.pdf>.

## 2 Apresentação do Problema

O PACM é um problema de otimização combinatória o qual foi provado pertencer a classe NP-difícil<sup>2</sup>. Este problema pode ser definido a partir de um dado conjunto de clientes, onde cada um possui pesos (custos numéricos referentes ao tempo de leitura e número de medidores) associados. Estes clientes devem ser agrupados em  $p$  lotes<sup>3</sup> distintos, cada grupo com uma capacidade desejada, sendo que a soma dos pesos de cada cliente atribuído ao agrupamento não deve ultrapassar sua capacidade. Além disso, o problema é regido por múltiplos critérios de otimização e deve atender as seguintes exigências:

- Cada cliente deve possuir um peso;
- Todos os clientes devem ser atribuídos a um, e somente um, agrupamento;
- Os clientes devem ser particionados em exatamente  $p$  agrupamentos;
- A soma dos pesos dos clientes de um agrupamento não deve ultrapassar a capacidade desse agrupamento;
- Os agrupamentos devem ser formados de maneira que permaneçam contíguos;
- Os critérios a serem otimizados orientam as melhores soluções para o problema.

Os critérios utilizados neste trabalho são descritos a seguir:

1. **Critério de Homogeneidade:** Os novos lotes devem ser o mais homogêneos possível quanto à carga de trabalho da equipe de leituristas, para obter uma minimização dos custos operacionais de mão-de-obra.
2. **Critério de Compacidade:** A forma geográfica dos novos lotes deve ser a mais compacta possível, para que a definição posterior de suas rotas de leitura seja tão eficiente quanto possível, dado que formas de lotes alongadas e tortuosas tendem a dificultar o traçado de boas rotas.
3. **Critério de Conformidade:** Os novos lotes devem alterar o mínimo possível as atuais associações entre consumidores e suas datas de leitura.

O PACM foi representado por um grafo conexo não-orientado  $G(V, E)$  onde  $V$  é o conjunto dos  $n$  nós e  $E$  o conjunto das  $m$  arestas do grafo. A relação entre o grafo e a planta urbana da região que se deseja agrupar é obtida associando um nó a cada cruzamento da planta e uma aresta a cada segmento de rua entre dois cruzamentos. A Figura 2 mostra o grafo obtido para uma região de estudo.

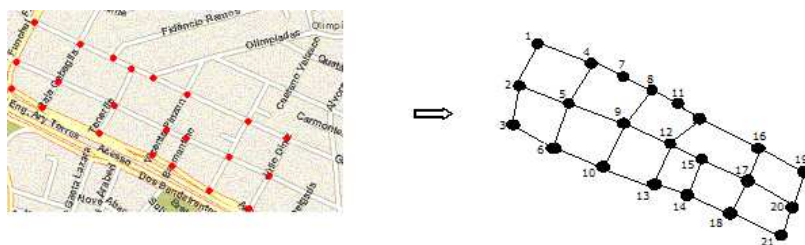


Figura 1: Associação entre a planta de uma região e o grafo.

Cada nó  $i$  do grafo possui alguns parâmetros associados, como as coordenadas geográficas e duas atividades mensuráveis. Conhecendo as coordenadas  $(x, y)$  de cada nó, é possível calcular

<sup>2</sup>Maiores informações sobre problemas NP-difícil podem ser encontradas em Garey (1979).

<sup>3</sup>Neste trabalho os termos lote e agrupamento são sinônimos.

a distância euclidiana entre cada par de nós, dada por:  $d_{i,j} = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}$ . Seja  $w_i^a$  o valor da atividade  $a$  no nó  $i$ , sendo que  $w_i^1$  representa o número de medidores e  $w_i^2$  o tempo de leitura desses medidores referente ao nó  $i$ . Essas atividades estão relacionadas às arestas, pelo fato dos medidores se localizarem nos imóveis ao longo das ruas, então é coerente que cada  $w_i^a$  seja calculado como uma composição proporcional de cada atividade das arestas incidentes ao nó  $i$ . Na Figura 2, é mostrada uma parte de um grafo e o valor das atividades associadas às arestas. Como cada aresta incide em apenas dois nós, o valor de  $w_i^a$  é dado pela soma da metade dos valores da atividade  $a$ , contidos em cada aresta incidente ao nó  $i$ .

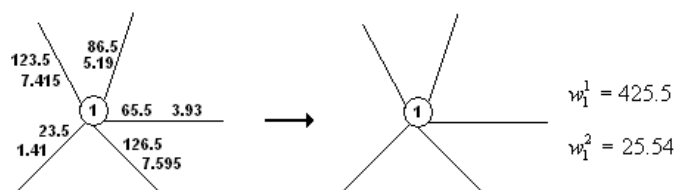


Figura 2: Cálculo do valor de cada atividade para um nó.

Um território é formado por um subconjunto  $V_k$  de nós onde  $V_k \subset V$ . A quantidade total de territórios que deve ser formada é dada por um parâmetro  $p$ . Ao obter uma solução, cada nó do grafo deve estar atribuído a um território, dessa forma o conjunto de territórios formados por  $V_k$ , sendo  $k = 1, \dots, p$ , definem uma partição de  $V$ .

Para obter territórios balanceados com respeito ao valor de cada atividade é definido o tamanho do território  $V_k$  referente a atividade  $a$ , dado por:  $w^a(V_k) = \sum_{i \in V_k} w_i^a$ . O ideal seria ter todos os territórios de uma solução perfeitamente balanceados, porém na prática isso é muito improvável devido à estrutura discreta do problema e à restrição de atribuição exclusiva de cada nó. Por esse motivo é definido o nível de atividade desejado para cada território dado por:  $\mu^a = w^a(V)/p$ . Baseado no valor de  $\mu^a$  e um parâmetro de tolerância dado por  $\tau^a$ , definem-se dois limites para o tamanho do território para cada atividade:  $(1 - \tau^a)\mu^a \leq w^a(V_k) \leq (1 + \tau^a)\mu^a$ . O valor de cada atividade para todos os territórios deve obedecer esses limites.

### 3 Modelo Matemático

O PACM foi tratado como um problema de reagrupamento hierárquico com dois critérios, os quais são denominados de *critério geográfico*, que une o critério de homogeneidade com o critério de compacidade, e o *critério de conformidade*. Estes critérios são definidos e modelados a seguir:

**Critério Geográfico:** Deseja-se minimizar a maior distância euclidiana entre um par de nós de um território e impedir que as atividades dos nós associados a cada território  $k$ , ultrapassem as tolerâncias admitidas para o tamanho médio da atividade  $a$  em cada território.

**Variáveis de decisão:**

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se o nó } j \text{ está atribuído ao território com centro } i; i \in V; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$y_i = \begin{cases} 1, & \text{se o centro de um território está localizado no nó } i; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

O modelo matemático para o critério geográfico:

$$\min \quad f_1(S) = \lambda F(S) + (1 - \lambda)G(S) \quad (1)$$

$$S.a. \quad \sum_{i \in V} x_{ij} = 1 \quad j \in V \quad (2)$$

$$\sum_{i \in V} y_i = p \quad (3)$$

$$x_{ij} \leq y_i \quad \forall i, j \in V \quad (4)$$

$$\sum_{j \in \cup_{v \in D} N^v \setminus D} x_{ij} - \sum_{j \in D} x_{ij} \geq 1 - |D| \quad i \in V; D \subset V \setminus (N^i \cup \{i\}) \quad (5)$$

$$x_{ij}, y_i \in \{0, 1\} \quad i, j \in V \quad (6)$$

$$F(S) = \left( \frac{1}{d_{max}} \right) \left( \max_{k=1, \dots, p} \left\{ \max_{i, j \in V_k} d_{ij} \right\} \right) \quad (7)$$

$$G(S) = \sum_{k=1}^p \sum_{a \in A} g^a(V_k)$$

$$g^a(V_k) = \left( \frac{1}{\mu^a} \right) \max\{w^a(V_k) - (1 + \tau^a)\mu^a, (1 - \tau^a)\mu^a - w^a(V_k), 0\} \quad (8)$$

Sendo  $S$  uma solução para o problema,  $F(S)$  a medida de dispersão do território baseada na distância euclidiana,  $G(S)$  a soma das inviabilidades de cada território,  $d_{max}$  o valor da maior distância euclidiana entre dois nós do grafo,  $\lambda$  o fator de ponderação entre  $F$  e  $G$ , tal que  $\lambda \in [0, 1]$ . O  $\lambda$  é escolhido pelo decisor de acordo com a importância dada por ele a cada parte da função objetivo.  $N \subset V$ , sendo que  $N^i$  é o subconjunto formado pelos vizinhos do nó  $i$ .

A Função objetivo (1) minimiza a combinação convexa de  $F(S)$  e  $G(S)$ . As restrições (2) definem que cada nó do grafo deve ser atribuído a um território. A restrição (3) obriga a formação de exatos  $p$  territórios. As restrições (4) obrigam que os nós sejam alocados somente às medianas<sup>4</sup>. As restrições (5) garantem a conectividade dos territórios; essas restrições são similares às usadas em problemas de roteamento para garantir a conectividade das rotas, sendo que existe um número exponencial delas. As restrições (6) garantem que as variáveis de decisão sejam binárias e as restrições(7) e (8) definem  $F(S)$  e  $G(S)$  respectivamente.

**Critério de Conformidade:** Maximizar a quantidade de medidores que permanecem em seu território de origem.

**Variáveis de decisão:**

$$r_{kl} = \begin{cases} 1, & \text{se o território } k \text{ passar a ter rótulo } l; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

**Matriz de Custo:**

$$c_{kl} = \begin{cases} \text{número de medidores do território } k \\ \text{que originalmente estavam com o rótulo } l; \end{cases}$$

O modelo matemático para o critério de conformidade:

<sup>4</sup>É definido uma mediana para representar cada território, assim um nó pode ser alocado somente a um território.

$$\max \quad f_2(S) = \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p c_{kl} r_{kl} \quad (9)$$

$$S.a. \quad \sum_{k=1}^p r_{kl} = 1 \quad \forall l = \{1, \dots, p\} \quad (10)$$

$$\sum_{l=1}^p r_{kl} = 1 \quad \forall k = \{1, \dots, p\} \quad (11)$$

$$r_{kl} \in \{0, 1\} \quad (12)$$

A Restrição (10) garante que cada rótulo é atribuído a somente um território, a Restrição (11) garante que um território só pode receber um rótulo e a Restrição (12) garante que a variável  $r_{kl}$  é binária.

## 4 Algoritmos para o PACM

### 4.1 GRASP

O GRASP é uma metaheurística que combina uma heurística construtiva com uma busca local, onde cada iteração é constituída basicamente de duas fases: construção e pós-processamento. Na fase de construção o algoritmo constrói uma solução inicial, enquanto que na fase de pós-processamento ele tenta melhorar essa solução. Quando a solução encontrada na primeira fase é factível, na segunda fase é realizada uma busca local na vizinhança dessa solução, a fim de melhorar o valor de sua função objetivo. Porém algumas soluções fornecidas pela heurística construtiva violam a restrição (3) tornando necessária uma fase intermediária para tornar esta solução factível antes de submetê-la à busca local (BL).

#### 4.1.1 Fase de Construção

Essa fase executa uma heurística construtiva com o objetivo de construir uma solução inicial factível para o problema. Para isso, inicia-se um território atribuindo nós ao mesmo. Os nós são alocados ao território corrente até atingir o limite da atividade ou até que não existam mais nós vizinhos para inserir neste território. O primeiro nó alocado a cada território é sempre o de menor grau e para os demais é utilizada uma função gulosa que avalia os nós candidatos, dada por:  $\phi(v) = \lambda F_k(v) + (1 - \lambda) G_k(v)$ , onde  $F_k(v) = \left(\frac{1}{d_{\max}}\right) \max \{f(V_k), \max_{j \in V_k} d_{v,j}\}$  e  $G_k(v) = \sum_{a \in A} g_k^a(v)$ ,  $g_k^a(v) = \left(\frac{1}{\mu^a}\right) \max \{w^a(V_k \cup \{v\}) - (1 + \tau^a) \mu^a, 0\}$ .

A função  $f(V_k)$  corresponde a maior distância euclidiana entre dois nós do território  $k$  e  $g_k^a(v)$  é a violação da atividade  $a$  no território  $V_k$  com a inserção do nó candidato  $v$ . Essa heurística utiliza o parâmetro  $\alpha$  para medir a qualidade dos nós candidatos e assim criar a lista de candidatos restrita (RCL). É utilizado um valor fixo para  $\alpha$  sendo que valores pequenos implicam em uma RCL mais restrita tendo valores próximos da escolha gulosa (baixa diversidade), em contra partida, valores altos para  $\alpha$  fornecem valores próximos a escolhas puramente aleatórias (grande diversidade), porém muitas soluções com qualidade inferior (Chaves, (2003)).

A heurística construtiva também utiliza um parâmetro de fechamento do território ( $\rho$ ) para calcular o limitante superior das atividades nos territórios, indicando quando o território corrente deve ser encerrado e um novo território ser aberto.

### 4.1.2 Fase de Ajustamento

Essa fase possui o objetivo de tornar factível a solução obtida pela heurística construtiva quando esta solução viola a restrição de construir exatos  $p$  territórios. Sendo  $q$  o número de territórios da solução obtida através da heurística construtiva, tem-se duas possibilidades quando a restrição é violada:  $q > p$  ou  $q < p$ .

Quando a solução encontrada possui  $q > p$  territórios, a fase de ajustamento realiza a operação de *merge*, onde é feita a união do território que possui o menor tamanho com o seu vizinho de menor tamanho. Quando a solução possui  $q < p$  territórios é executado o *split* que consiste em dividir o território de maior tamanho em dois territórios conexos. O *split* é feito executando a heurística construtiva para o subgrafo formado por esse território. Essas duas operações reduzem/aumentam o número de territórios em 1 a cada iteração, então a fase de ajustamento deve ser executada até obter  $q = p$ .

### 4.1.3 Fase de Pós-Processamento

O objetivo dessa fase é modificar a solução atual com a finalidade de melhorá-la. Foram implementadas duas buscas locais, porém antes de apresentá-las é necessário introduzir alguns conceitos.

Foi utilizada uma vizinhança  $N(S)$  que é composta por todas as soluções que podem ser encontradas a partir de  $S$ , através do movimento de um nó  $i$  de seu território  $k$ , para um território vizinho  $l$ , que possua um nó  $j$  tal que  $(i, j) \in E$  (Resende e Ribeiro (2008)). Um movimento é denominado por  $(i, k, l)$  e é executado se e somente se  $V_l \cup \{i\}$  é conexo, o que ocorre sempre quando a aresta  $(i, j)$  existe, e quando  $V_k \setminus \{i\}$  permanecer conexo, o qual é verificado com uma busca em largura (Cormen et al. (2002)) no território  $k$  desconsiderando o nó  $i$ .

Para encontrar um bom movimento é indispensável verificar se ele possui três características fundamentais (Assis (2009)):

1. O nó  $i$  que será movido deve ser um nó de fronteira;
2. O movimento deve melhorar o valor da função objetivo;
3. O nó  $i$  não pode ser um nó de articulação <sup>5</sup>.

As duas BL's possuem os mesmos princípios, ambas executam o primeiro movimento factível encontrado, mesmo que este movimento não seja o melhor (*first improving*). O objetivo é escolher um bom movimento de forma aleatória, porém garantindo que todos os movimentos tenham a mesma probabilidade de serem escolhidos. A diferença entre as duas BL's está na forma de garantir a segunda característica de um bom movimento.

A BL1 procura movimentos que melhoram o valor da função  $\Psi(S) = \lambda F(S) + (1 - \lambda)G(S)$ , sendo que  $G(S)$  foi definido em (8), porém  $F(S)$  sofreu uma pequena alteração para essa fase, sendo dado da forma:  $F(S) = \left(\frac{1}{d_{max}}\right) \left(\sum_{k=1, \dots, p} \left\{ \max_{i, j \in V_k} d_{ij} \right\}\right) / p$ . Essa modificação foi realizada para garantir que se o movimento melhora o valor de  $F(V_k)$  para algum território  $k$  da solução, então o valor de  $F(S)$  também é melhorado.

A BL2 busca por movimentos que melhorem  $G(S)$  e  $F(S)$  separadamente, sendo que a melhora de um não deve causar piora do outro. Primeiramente a BL2 procura por movimentos que diminuam o valor de  $G(S)$  sem deteriorar o valor de  $F(S)$ . Ao encontrar estes movimentos, executa-os e a busca por outro movimento recomeça. Quando o algoritmo não encontrar nenhum movimento que melhore  $G(S)$  sem piorar  $F(S)$ , então começa a procura por movimentos que melhorem  $F(S)$  sem piorar  $G(S)$ .

<sup>5</sup>Um nó de articulação é um nó que desconecta seu território de origem ao movê-lo para um território vizinho.

Cada série ( $G$  e  $F$ ) ocorre alternadamente, ou seja, primeiro tenta-se melhorar  $G(S)$  até não poder mais, depois procura-se melhorar  $F(S)$  até não conseguir mais e assim sucessivamente. A busca pára quando passar pelas duas séries e não encontrar nenhum movimento de melhora.

Após cada movimento, a lista de nós de fronteira precisa ser atualizada. Devido ao grande número de movimentos que são executados, atualizar toda lista após cada movimento acrescenta um grande esforço computacional ao algoritmo. Por esse motivo, procurou-se reduzir tanto quanto possível a forma de atualizá-la. Após vários estudos descobriu-se que é necessário verificar se o nó modificou sua informação de fronteira, apenas dos nós vizinhos ao nó  $i$  que sofreu o movimento, como mostrado na Figura 4.1.3. A demonstração pode ser encontrada em Assis (2009).

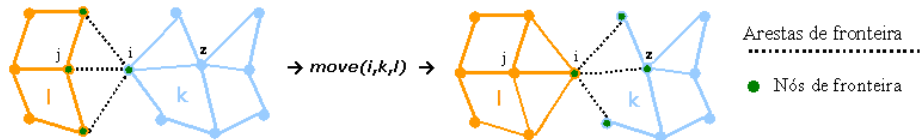


Figura 3: Atualização dos nós de fronteira.

### Filtragem

Foi adicionado um processo de filtragem à fase de pós processamento. Esse processo possui o objetivo de filtrar as soluções obtidas pela heurística construtiva, evitando que a busca local seja executada para soluções não promissoras, já que a maior parte do tempo consumido pelo algoritmo está na busca local. O filtro é baseado no valor de  $\bar{\beta}$  dado por:  $\bar{\beta} = (\Psi(S) - \Psi(S'))/\Psi(S)$ . Sendo que  $\bar{\beta}$  é a redução média obtida pela solução da busca local ( $S'$ ) na iteração anterior com respeito à solução construtiva ( $S$ ) encontrada na iteração atual.

A estratégia utilizada é baseada na idéia que se o custo da solução construtiva é um valor muito mais alto que o custo da melhor solução encontrada até o momento, é improvável que a busca local consiga produzir uma solução melhor que a solução corrente. O limiar utilizado é dado por:  $\beta(1 - \bar{\beta})$  sendo  $\beta$  um parâmetro do algoritmo.

## 4.2 Método Húngaro

O Método Húngaro foi utilizado para resolver o problema formado pelo critério de conformidade abordado na Seção 3. Este método consiste em um algoritmo exato para resolver o problema de designação (*assignment*) é usado neste trabalho com o objetivo de encontrar uma alocação de rótulos e territórios com o menor custo possível (Kuhn, (1995)). Esse algoritmo utiliza uma matriz-Custo não negativa  $C$ , de tamanho  $p \times p$  sendo que o elemento localizado na  $k$ -ésima linha e  $l$ -ésima coluna representa o custo de designar o rótulo  $l$  ao território  $k$ . O algoritmo é baseado no teorema da alocação possuindo o objetivo de realizar operações de soma e subtração na matriz custo de forma a encontrar uma matriz que possua todas as entradas não negativas e  $p$  zeros, sendo que dois deles não estejam na mesma linha ou coluna. Dessa forma a alocação ótima terá a soma nula.

O modelo matemático formulado para o critério de conformidade representa exatamente uma formulação para o problema de designação cuja formulação pode ser encontrada em Wolsey (1998), tornando desnecessário realizar a transformação do problema de rotulamento dos territórios para o problema de designação, justificando a utilização do método Húngaro para resolver este critério.

## 5 Experimentos Computacionais

Nessa seção são apresentados os resultados obtidos com a execução do algoritmo implementado e como foram geradas as instâncias utilizadas nos testes.

As instâncias possuem as seguintes características:



- **Grupo 1 ou 2:** Referente ao número de nós do grafo, instâncias que possuem 512 ou 1024 nós;
- **Família 1 ou 2:** Referente a variação do tempo de leitura (medido em minutos) sob um intervalo apertado [16,24] ou folgado [12,28];
- **Classe A ou B:** Referente ao número de medidores, intervalo apertado [160,240] ou folgado [120,280];
- **Parâmetro 1, 2 ou 3:** Referente aos valores de tolerância para cada atividade, variação:  $\tau = \{0,05; 0,10; 0,30\}$ .

A combinação dessas características deram origem a 24 tipos de instâncias. Para cada tipo foram geradas 10, somando um total de 240 instâncias para teste.

Uma bateria de experimentos iniciais variando os valores para os parâmetros  $\rho$  e  $\tau$ , demonstraram que o melhor valor a ser adotado para o parâmetro de fechamento de território é  $\rho = 0,8$ .

### Experimento 1: Comparação entre as Buscas Locais

O objetivo desse experimento é comparar as duas buscas locais. O GRASP é executado e na fase de pós-processamento cada uma das BL é utilizada. Parâmetros utilizados:  $\lambda = 0,2$ ;  $\alpha = 0,3$ ;  $\rho = 0,8$ ;  $LimiteIteracoes = 1000$  e  $LimiteMovimentos = 200$ .

Inst	Tau	Critério 1 - BL1 sem Filtro							Critério 1 - BL2 sem Filtro						
		F(S)			G(S)			t(seg.)	F(S)			G(S)			t(seg.)
		Max	Med	Min	Max	Med	Min	Max	Med	Min	Max	Med	Min		
1	0,05	0,40	0,34	0,30	<b>0,25</b>	<b>0,09</b>	0,00	33,69	0,39	0,31	0,28	0,57	0,17	0,00	23,85
2	0,10	0,32	0,30	0,28	0,00	0,00	0,00	31,09	0,31	0,29	0,27	0,00	0,00	0,00	24,28
3	0,30	0,37	0,33	0,28	0,35	0,11	0,00	29,90	0,34	0,31	0,30	<b>0,30</b>	0,11	0,00	21,17
4	0,05	0,43	0,35	0,29	<b>0,16</b>	<b>0,07</b>	0,00	32,51	0,38	0,32	0,29	0,52	0,16	0,00	23,63
5	0,10	0,33	0,30	0,27	0,00	0,00	0,00	30,84	0,31	0,29	0,27	0,00	0,00	0,00	24,01
6	0,30	0,36	0,31	0,29	0,45	0,22	0,00	29,23	0,38	0,32	0,28	<b>0,41</b>	<b>0,08</b>	0,00	21,93
7	0,05	0,39	0,33	0,28	0,73	<b>0,13</b>	0,00	33,37	0,40	0,32	0,27	0,71	0,28	0,00	23,92
8	0,10	0,42	0,31	0,28	0,00	0,00	0,00	29,92	0,31	0,29	0,28	0,00	0,00	0,00	23,22
9	0,30	0,45	0,35	0,30	0,41	0,14	0,00	30,22	0,44	0,32	0,29	<b>0,26</b>	<b>0,07</b>	0,00	22,75
10	0,05	0,40	0,36	0,31	<b>0,55</b>	<b>0,19</b>	0,00	33,31	0,39	0,35	0,30	0,78	0,29	0,00	36,61
11	0,10	0,31	0,30	0,28	0,00	0,00	0,00	32,08	0,30	0,29	0,28	0,00	0,00	0,00	25,34
12	0,30	0,39	0,34	0,29	0,44	0,09	0,00	30,52	0,33	0,31	0,28	<b>0,15</b>	<b>0,02</b>	0,00	21,29
13	0,05	0,38	0,31	0,26	<b>1,52</b>	<b>1,25</b>	0,74	150,33	0,33	0,29	0,25	2,14	1,45	0,97	105,80
14	0,10	0,36	0,32	0,27	0,50	0,27	0,06	144,73	0,34	0,31	0,27	0,65	<b>0,16</b>	0,00	102,12
15	0,30	0,29	0,26	0,23	0,00	0,00	0,00	148,37	0,27	0,24	0,22	0,00	0,00	0,00	107,86
16	0,05	0,32	0,30	0,25	<b>1,57</b>	<b>1,24</b>	<b>0,78</b>	164,78	0,38	0,32	0,25	1,87	1,59	1,03	108,30
17	0,10	0,38	0,33	0,26	0,51	0,28	0,04	154,64	0,33	0,30	0,25	<b>0,37</b>	<b>0,23</b>	<b>0,00</b>	111,75
18	0,30	0,28	0,25	0,23	0,00	0,00	0,00	153,80	0,31	0,25	0,24	0,00	0,00	0,00	115,13
19	0,05	0,44	0,34	0,29	<b>1,48</b>	<b>1,14</b>	<b>0,53</b>	166,30	0,37	0,30	0,27	1,86	1,65	1,36	103,65
20	0,10	0,41	0,33	0,29	0,49	0,38	0,21	151,23	0,38	0,30	0,26	0,45	<b>0,30</b>	<b>0,09</b>	113,44
21	0,30	0,27	0,26	0,24	0,00	0,00	0,00	144,12	0,26	0,24	0,23	0,00	0,00	0,00	108,88
22	0,05	0,39	0,33	0,28	<b>1,86</b>	<b>1,36</b>	<b>0,86</b>	159,04	0,33	0,31	0,26	1,87	1,62	1,22	114,89
23	0,10	0,36	0,31	0,27	0,51	0,38	0,21	158,43	0,36	0,31	0,26	0,53	<b>0,29</b>	<b>0,00</b>	109,20
24	0,30	0,31	0,26	0,24	0,00	0,00	0,00	144,80	0,27	0,25	0,23	0,00	0,00	0,00	108,77
Média		0,36	0,31	0,27	0,49	0,30	0,14	92,38	0,34	0,29	0,26	0,56	0,35	0,19	66,74

Tabela 1: Avaliação da BL1 e BL2

Na Tabela 5 são apresentados os valores máximo, médio e mínimo de  $F(S)$  e  $G(S)$ . Pode-se perceber com os resultados apresentados nesta tabela, observando principalmente os valores médios exibidos nas colunas de  $G(S)$ , que a BL1 obtém os melhores resultados para instâncias com  $\tau = 0,05$ , porém para instâncias com  $\tau = 0,30$  a BL2 alcança melhores resultados. Para instâncias com  $\tau = 0,10$ , quando não há empate a BL2 ganha. Ainda observando as colunas  $G(S)$  tem-se que os valores de inviabilidade do critério de homogeneidade encontrados foram baixos, obtendo 100%

das soluções sem inviabilidade para instâncias com  $\tau = 0,10$ . Os valores que mostram qual BL obtém melhor resultado para determinada instância estão exibidos em negrito na tabela. O tempo computacional é razoavelmente pequeno, embora aumente consideravelmente comparado ao tempo gasto executando o algoritmo com o filtro.

### Experimento 2: Avaliação do Filtro

O objetivo desse experimento é avaliar se o filtro adicionado ao GRASP é eficiente. Foram utilizadas as mesmas instâncias e os mesmos parâmetros que o Experimento 1, porém o segundo teste ainda usou  $LimiteMovimentos = 500$  e  $\beta = 0,6$ . A busca local é executada para todas as soluções fornecidas pela heurística construtiva durante as 100 primeiras iterações, sendo sempre preservada a melhor solução encontrada. Após as 100 primeiras iterações o filtro é aplicado.

Inst	Tau	Critério 1 - BL2 com Filtro									t(seg.)
		$\Psi(S)$			F(S)			G(S)			
		S	M	I	S	M	I	S	M	I	
1	0,05	0,47	0,27	0,06	0,56	0,36	0,28	0,51	0,25	0,00	8,75
2	0,10	0,07	0,06	0,05	0,34	0,30	0,27	0,00	0,00	0,00	10,02
3	0,30	0,33	0,15	0,06	0,33	0,31	0,29	0,34	0,12	0,00	10,33
4	0,05	0,59	0,31	0,06	0,43	0,34	0,29	0,63	0,30	0,00	8,68
5	0,10	0,08	0,06	0,05	0,42	0,31	0,27	0,00	0,00	0,00	9,71
6	0,30	0,36	0,21	0,06	0,38	0,32	0,28	0,36	0,18	0,00	10,36
7	0,05	0,49	0,34	0,06	0,43	0,32	0,28	0,51	0,34	0,00	9,02
8	0,10	0,08	0,06	0,06	0,34	0,31	0,28	0,02	0,00	0,00	9,16
9	0,30	0,39	0,17	0,06	0,45	0,34	0,30	0,41	0,13	0,00	10,57
10	0,05	0,84	0,44	0,06	0,39	0,35	0,28	0,96	0,46	0,01	9,09
11	0,10	0,19	0,08	0,06	0,55	0,36	0,28	0,13	0,01	0,00	8,49
12	0,30	0,36	0,26	0,07	0,45	0,34	0,29	0,38	0,25	0,01	10,35
13	0,05	1,85	1,65	1,23	0,37	0,32	0,26	2,35	1,99	1,45	30,47
14	0,10	0,62	0,42	0,05	0,42	0,30	0,25	0,69	0,45	0,00	31,74
15	0,30	0,09	0,06	0,04	0,27	0,24	0,22	0,05	0,01	0,00	32,14
16	0,05	1,87	1,66	1,20	0,33	0,30	0,26	2,27	2,00	1,43	30,56
17	0,10	0,53	0,30	0,09	0,39	0,32	0,29	0,59	0,30	0,04	30,44
18	0,30	0,09	0,06	0,05	0,31	0,25	0,23	0,06	0,01	0,00	32,48
19	0,05	1,75	1,55	1,34	0,34	0,29	0,27	2,10	1,86	1,42	29,68
20	0,10	0,59	0,33	0,06	0,46	0,30	0,24	0,67	0,34	0,00	28,51
21	0,30	0,08	0,05	0,04	0,26	0,24	0,22	0,04	0,00	0,00	31,37
22	0,05	1,92	1,76	1,50	0,35	0,29	0,26	2,65	2,13	1,80	30,61
23	0,10	0,59	0,38	0,15	0,35	0,30	0,24	0,66	0,40	0,11	28,94
24	0,30	0,07	0,05	0,05	0,29	0,26	0,24	0,02	0,00	0,00	32,07
Média		0,59	0,44	0,27	0,38	0,30	0,26	0,68	0,48	0,26	20,14

Tabela 2: Avaliação do Filtro

Comparando os resultados exibidos na Tabela 5 com os da Tabela 5 percebe-se que o esforço computacional foi reduzido consideravelmente (colunas t(seg.)) e a qualidade dos resultados foram semelhantes aos encontrados executando a BL em todas iterações (ver Tabela 5).

### Experimento 3: Avaliação do Critério de Conformidade

Este experimento foi realizado com o objetivo de avaliar o desempenho do algoritmo ao otimizar o critério de conformidade, bem como a evolução da qualidade das soluções obtidas em cada etapa do algoritmo. Foram utilizados os mesmos parâmetros do experimento 2. A Figura 4 ilustra a evolução da solução inicial( 4(a)) para a solução obtida após a aplicação da BL2 (4(b)) resultante em lotes nitidamente mais compactos e homogêneos. Percebe-se também que a solução obtida após a aplicação do método húngaro (4(c)) apresentou uma numeração de lotes mais próxima àquela apresentada pela solução original, o que corresponde a uma melhoria do critério de conformidade. Apesar do Método Húngaro ser um algoritmo exato seu esforço computacional é muito pequeno, na ordem de  $10^{-3}$ s, não tornando o algoritmo caro computacionalmente.

A Figura 4 ilustra o desenvolvimento da solução obtida pelo algoritmo em cada etapa do

processo de otimização. É exibido primeiramente a configuração inicial da região estudada e seus rótulos originais, em seguida a solução executando o algoritmo com a busca local e por último o resultado final do algoritmo após rotular cada território.

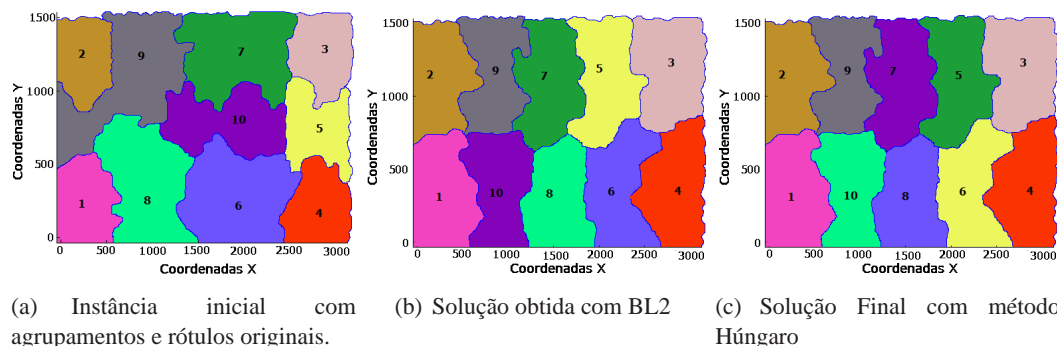


Figura 4: Soluções encontradas durante as etapas do algoritmo.

Os resultados encontrados para o critério de conformidade foram muito bons conseguindo manter boa parte dos medidores em seu território original.

#### Experimento 4: Rede Real

Foram obtidos alguns dados referentes a uma área da cidade de São Paulo (AES Eletropaulo). A Figura 5 mostra essa região. Foram aproveitadas as coordenadas geográficas e as adjacências dessa região, sendo que os pesos das arestas foram gerados aleatoriamente com duas categorias:  $medidores = [120, 280]$  e  $tempos = [12, 28]$ ; e  $medidores = [1, 100]$  e  $tempos = [20, 2000]$ . Os resultados para estas duas instâncias da rede de São Paulo são exibidos nas Tabelas 5 e 4.



Figura 5: Associação entre a planta de uma região e o grafo.

Tau	Solução inicial			Critério 1			Critério 2	
	$F(S)_{inicial}$	$G(S)_{inicial}$	t(s)	F(S)	G(S)	t(s)	$f_2^{Hungaro}$ (%)	t(s)
0,05	0,35	5,60	$6,5 \times 10^{-2}$	0,29	0,10	66,03	73,69	$1 \times 10^{-3}$
0,10	0,37	5,86	$7,0 \times 10^{-2}$	0,29	0,14	64,38	70,17	$1 \times 10^{-3}$
0,30	0,25	6,73	$7,8 \times 10^{-2}$	0,29	0,00	78,53	64,72	$1 \times 10^{-3}$

Tabela 3: Resultado Rede São Paulo - pesos apertados

Os resultados para a rede de São Paulo mostraram-se eficientes, sendo que é mais difícil encontrar boas soluções com uma maior variabilidade nos pesos das arestas. O método Húngaro conseguiu obter bons resultados mantendo de 60% a 70% dos medidores em seu território de origem. A Figura 6 mostra o resultado alcançado para a rede de São Paulo após aplicar a BL2 e a definição dos rótulos dos territórios pelo método Húngaro.

Tau	Solução inicial			Critério 1			Critério 2	
	$F(S)_{inicial}$	$G(S)_{inicial}$	t(s)	F(S)	G(S)	t(s)	$f_2^{Hungaro}$ (%)	t(s)
0,05	0,31	5,12	$6,7 \times 10^{-2}$	0,29	1,23	64,88	71,88	$1 \times 10^{-3}$
0,10	0,34	7,76	$6,8 \times 10^{-2}$	0,29	0,13	64,52	69,65	$1 \times 10^{-3}$
0,30	0,32	6,98	$7,6 \times 10^{-2}$	0,35	0,00	78,05	69,40	$1 \times 10^{-3}$

Tabela 4: Resultado Rede São Paulo - pesos folgados

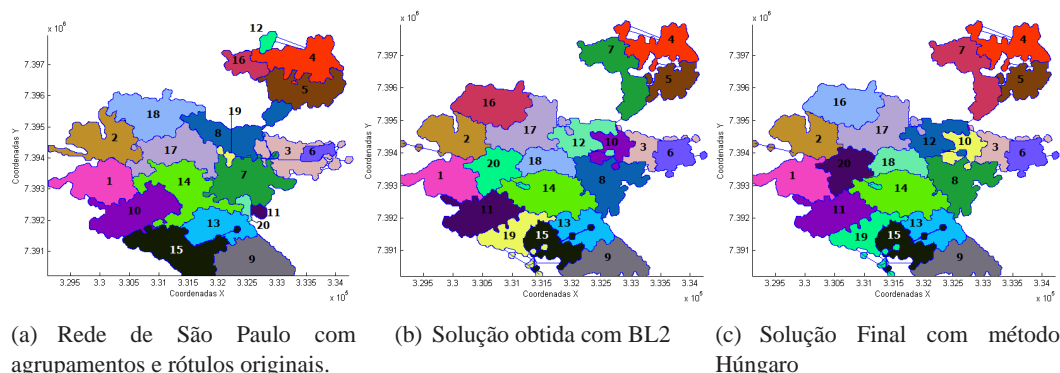


Figura 6: Soluções encontradas durante as etapas do algoritmo.

## 6 Agradecimento

Esta pesquisa contou com o apoio financeiro do projeto 2007/02604-0 da FAPESP.

## 7 Conclusão

Este trabalho apresentou um algoritmo para resolver um PACM aplicado ao problema de reagrupamento de medidores de energia elétrica, o qual obteve resultados com boa qualidade referente aos critérios geográfico e de conformidade, em um tempo computacional pequeno. Foi apresentado de forma transparente como garantir que as soluções sempre possuam territórios conexos. A maioria dos resultados possuem soluções com nenhum ou baixos valores de inviabilidade, quanto ao critério de homogeneidade dos lotes. O algoritmo não encontrou dificuldades para obter bons resultados em uma instância real de grande porte.

## Referências

- Assis, L. S. (2009). *Problema de reagrupamento capacitado*, Dissertação de mestrado, Universidade Estadual de Campinas.
- Chaves, A. A. (2003). *Modelagens exata e heurística para resolução do problema do caixeiro viajante com coleta de prêmios*, Dissertação de mestrado, Universidade Federal de Ouro Preto.
- Cormen, T. H., Leiserson, C. E., Rivest, R. L. & Stein, C. (2002). *Algoritmos: Teoria e Prática*, Elsevier.
- França, P. M., Garcia, V. J., Morelato, A. & Usberti, F. L. (2007). Enfoque multicritério para o problema de redistribimento capacitado, *XXXIX Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional - SBPO* pp. 1–12.

- Garey, M. R. & Johnson, D. S. (1979). *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of Np-Completeness*, W H Freeman & Co, Gordonsville, Virginia.
- Kuhn, H. W. (1995). The hungarian method for the assignment problem, *Naval Research Logistics Quarterly* 2(3): 83–97.
- Resende, M. G. C. & Ribeiro, C. C. (2008). Greedy randomized adaptive search procedures: Advances and applications, *AT & T Labs Research Technical Report*. pp. 1–35.
- Ríos-Mercado, R. Z. & Fernández, E. (2007). A reactive grasp for a commercial territory design problem with multiple balancing requirements, *Computer & Operations Research* pp. 1–43.
- Wolsey, L. A. (1998). *Integer Programming*, A Wiley-Interscience Publication.