

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS
Departamento de Arquitectura de Computadores y Automática



**MODELADO, PLANIFICACIÓN Y CONTROL DE
SISTEMAS DE DISTRIBUCIÓN DE GAS Y DERIVADOS
DEL PETRÓLEO**

**MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR
PRESENTADA POR**

Alberto Herrán González

Bajo la dirección de los doctores
Jesús Manuel de la Cruz García y Bonifacio de Andrés Toro

Madrid, 2008

• ISBN: 978-84-692-1075-8

©Alberto Herrán González, 2008

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS

Departamento de Arquitectura de Computadores y Automática



Modelado, planificación y control de
sistemas de distribución de gas y
derivados del petróleo

TESIS DOCTORAL

Alberto Herrán González

Madrid, 2008

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS

Departamento de Arquitectura de Computadores y Automática



Modelado, planificación y control de sistemas
de distribución de gas y derivados del petróleo

Memoria para optar al grado de doctor presentada por:

D. Alberto Herrán González

Directores

Dr. D. Jesús Manuel de la Cruz García

Dr. D. Bonifacio de Andrés Toro

Madrid, 2008

*A mis padres y
hermano*

Agradecimientos

Los agradecimientos son quizá la sección más difícil de escribir. No sólo por que sea la parte que más gente lee, sino por mi dificultad, como bien sabe quien me conoce, de encontrar las palabras adecuadas con las que expresar mis agradecimientos a todos aquellos que, de una u otra forma, me han apoyado durante estos años. Aun así, haré un esfuerzo equiparable al realizado para completar el resto de la tesis, e intentaré dejar a todos contentos.

Mi primer y principal agradecimiento es por supuesto para Bonifacio de Andrés Toro, quien en ya mi época de estudiante despertó en mi el interés por los trabajos que se llevaban a cabo en el Departamento. No me olvido de su apoyo incondicional y constante atención durante todos estos años.

Junto a Bonifacio quiero expresar mi agradecimiento a Jesús Manuel de la Cruz García, quien me ha guiado en el desarrollo de esta tesis. En todo momento ha sabido ser flexible con el desarrollo de la misma, comprendiendo los retrasos en su finalización, sobre todo este último año, con mi marcha al Centro de Estudios Superiores Felipe II en Aranjuez, en mi nueva andadura como profesor de dicho centro.

También quisiera expresar mi agradecimiento a los doctores Mingyuan Chen y Fantahum Defhersa por su acogida durante mi estancia en el Departamento de Ingeniería Mecánica de la Universidad de Concordia, Montreal (Canadá). Sus aportaciones fueron fundamentales en el desarrollo de los modelos mostrados en el Capítulo 2. No me olvido tampoco de los estudiantes de Master y Doctorado con los que compartí Laboratorio durante mis 6 meses de estancia.

No me quiero olvidar a todos aquellos miembros del departamento que en algún momento en el desarrollo de esta tesis me ayudaron a solventar algunos de los problemas que me iban surgiendo. Entre ellos se encuentran Pablo Fernandez Blanco y Eva Besada Portas, con los que comencé mis primeras andaduras en el campo de los Algoritmos Genéticos, José Luís Risco Martín, con quién he compartido algunos trabajos, así como José Antonio López Orozco, José María Girón Sierra, Segundo Esteban, Joaquín Recas Piorno, Juan Jiménez Castellanos, Matilde Santos Peñas, Jesús Fernandez Prisuelos, etc...

En el plano personal, me gustaría agradecer a mis padres, a mi hermano Félix y a Verónica, por ser ellos los que más de cerca han sufrido mis “ausencias” durante estos años. A mis abuelos, siempre orgullosos de su nieto. A mis tíos, en particular a Gonza, quien no ha parado de llamarme todos los meses para preguntarme por el estado de la tesis. También a mis primos, en particular a Jose, con quien he compartido el mayor tiempo y amistad. Finalmente, no me olvido de mi tío Fede mi abuela Carmen, con los que me hubiese encantado compartir este momento.

Para terminar no me olvido de mis amigos, a quien en algún momento ha podido “fallar” a cambio de tener más tiempo para terminar esta tesis. En cuanto a los “pseudofutbolistas” que hay en el Departamento, deciros que ya os podéis ir preparando, ya que de ahora en adelante no faltaré a ni una sola convocatoria.

Madrid, Marzo de 2008

Índice de contenido

Lista de Acrónimos	xiii
---------------------------	-------------

Lista de Símbolos	xv
--------------------------	-----------

1 Marco de la investigación	1
1.1 Introducción	2
1.1.1 Transporte mediante redes de conductos	2
1.1.2 Definición del problema y estado del arte	3
1.2 Distribución de derivados del petróleo	8
1.2.1 El petróleo y sus derivados	8
1.2.2 Sistemas de distribución mediante poliductos	12
1.2.3 Revisión bibliográfica	14
1.3 Transporte de gas natural	20
1.3.1 El gas natural	20
1.3.2 Sistemas de transporte mediante gasoductos	24
1.3.3 Revisión bibliográfica	29
1.4. Organización y objetivo de la tesis	32
2 Modelado de sistemas de distribución de derivados del petróleo	39
2.1 Logística en la distribución de derivados del petróleo	40
2.1.1 Planteamiento del problema	40
2.1.2 Distribución mediante un poliducto simple	44
2.1.3 Distribución mediante una red de poliductos	45
2.2 Distribución mediante un poliducto simple	47
2.2.1 Características del modelo	48
2.2.2 Función objetivo	49
2.2.3 Planificación de la producción	51
2.2.4 Inyección de nuevos paquetes en el poliducto	52
2.2.5 Seguimiento de paquetes	57
2.2.6 Transferencia de producto a los depósitos	57
2.2.7 Entrega de la demanda a los mercados	62
2.2.8 Control de inventario en la refinería	63
2.2.9 Control de inventario en los depósitos	65

2.3	Distribución mediante una red de poliductos	66
2.3.1	Características del modelo.....	67
2.3.2	Función objetivo	70
2.3.3	Inyección de nuevos paquetes en cada poliducto	71
2.3.4	Seguimiento de paquetes	72
2.3.5	Control de inventario en los depósitos	73
2.3.6	Modelo reducido.....	75
2.3.7	Modelos simplificados	77
2.3.8	Eliminación de las variables almacén.....	78
2.3.9	Comparación de los diferentes modelos desarrollados	78
3	Planificación óptima del sistema	81
3.1	Implementación del modelo continuo	82
3.1.1	Resolución del modelo mediante CPLEX.....	82
3.1.2	Construcción de un visualizador de soluciones en MATLAB.....	84
3.2	Ejemplos de aplicación del modelo continuo	86
3.2.1	Ejemplo 1: Búsqueda de una solución factible	88
3.2.2	Ejemplo 2: Mejora de una solución factible y planificación de la producción.....	95
3.2.3	Ejemplo 3: Un ejemplo con más de dos periodos	103
3.3	Implementación del modelo discreto	105
3.3.1	Resolución del modelo mediante CPLEX.....	105
3.3.2	Construcción de un visualizador de soluciones en MATLAB.....	107
3.4	Ejemplos de aplicación del modelo discreto	108
3.4.1	Ejemplo 1: Red pequeña en modo bifurcador	109
3.4.2	Ejemplo 2: Red pequeña en modo almacén.....	116
3.4.3	Ejemplo 3: Red grande en modo almacén	118
3.5	Conclusiones	122
4	Desarrollo de Metaheurísticas aplicadas a la Planificación	125
4.1	Introducción	126
4.1.1	Metaheurísticas.....	126
4.1.2	Representación de las soluciones	130
4.1.3	Reparación de soluciones no factibles	131
4.2	Optimización basada en Metaheurísticas de Búsqueda	133
4.2.1	Heurísticas de construcción.....	134

4.2.2	Cálculo de vecinos	136
4.2.3	Búsqueda por Arranque Múltiple	137
4.2.4	Búsqueda por Entornos Variables	144
4.2.5	Búsqueda Tabú.....	146
4.2.6	Enfriamiento Simulado.....	149
4.2.7	Comparativa entre todas las Metaheurísticas de Búsqueda desarrolladas	155
4.3	Optimización basada en Metaheurísticas de Evolución	156
4.3.1	Codificación del problema.....	158
4.3.2	Proceso de Selección.....	158
4.3.3	Proceso de Reproducción.....	159
4.3.4	Proceso de Recombinación	162
4.3.5	Algoritmo Genético Secuencial.....	163
4.3.6	Algoritmo Genético con Búsqueda Local	166
4.3.7	Algoritmo Genético Multiagente	168
4.3.8	Comparativa entre todas las Metaheurísticas de Evolución desarrolladas	173
4.4	Paralelización de los algoritmos desarrollados	175
4.4.1	Paralelización del algoritmo SMMC-SA	177
4.4.2	Paralelización del algoritmo MAGA	180
4.5	Metaheurísticas vs CPLEX	183
5	Modelado de sistemas de transporte de gas	187
5.1	Ecuaciones del gas en un gasoducto	188
5.1.1	Ecuaciones de conservación.....	188
5.1.2	Factor de fricción.....	189
5.1.3	Conducción de calor	191
5.1.4	Validez de la aproximación unidimensional.....	192
5.1.5	Formulación en flujo de masa	193
5.2	Modelos simplificados	194
5.2.1	Simplificación de las ecuaciones	194
5.2.2	Modelo A	196
5.2.3	Modelo B	196
5.3	Esquemas numéricos para el modelo A	198
5.3.1	Método de las curvas características	198
5.3.2	Aplicación sobre el modelo A	201

5.4	Esquemas numéricos para el modelo B	205
5.4.1	Método de Crank-Nicolson.....	205
5.4.2	Aplicación sobre el modelo B.....	205
5.4.3	Consistencia y estabilidad.....	209
5.5	Otros esquemas numéricos	210
5.5.1	Método de Lax-Wendrof.....	210
5.5.2	Método de Mac-Cormak.....	211
5.5.3	Criterio de estabilidad.....	212
5.5.4	Formulaciones matriciales.....	213
5.5.5	Método de elementos finitos.....	217
5.6	Modelo de los compresores	220
5.6.1.	Estaciones de compresión.....	221
5.6.2	Compresores centrífugos.....	222
5.6.3	Dominio de operación de un compresor.....	226
5.6.4	Consumo de un compresor.....	228
5.6.5	Dominio de operación de una estación de compresión.....	229
5.6.6	Consumo de una estación de compresión.....	231
5.7	Otros elementos	233
6	Desarrollo de un modelo experimental	235
6.1	Implementación del modelo en un computador	236
6.1.1	Librería de componentes en MATLAB-Simulink.....	236
6.1.2	Implementación de un gasoducto.....	239
6.1.3	Implementación de una estación de compresión.....	242
6.1.4	Otros bloques implementados.....	244
6.2	Gasoductos	245
6.2.1	Condiciones iniciales y de contorno.....	245
6.2.2	Integración numérica del modelo A.....	248
6.2.3	Integración numérica del modelo B.....	251
6.2.4	Comparación de ambos modelos.....	255
6.2.5	Efecto de la inclinación del gasoducto.....	256
6.3	Estaciones de compresión	257
6.3.1	Descripción física de los compresores.....	257
6.3.2	Modos de operación de una estación de compresión.....	261
6.4	Ejemplos de aplicación	263
6.4.1	Ejemplo 1: Gasoducto simple.....	263
6.4.2	Ejemplo 2: Gasoducto en diferentes rangos de presión.....	265

6.4.3	Ejemplo 3: Red de distribución básica	267
6.4.4	Ejemplo 4: Red de distribución compleja	270
6.5	Identificación del sistema	272
6.5.1	Modelo en variables de estado	272
6.5.2	Generación de un modelo de red	276
7	Control óptimo del sistema	279
7.1	Control Predictivo	280
7.1.1	Introducción al Control Predictivo Basado en Modelos (MPC)	280
7.1.2	Elementos del MPC	281
7.1.3	Estrategia del MPC	282
7.1.3	Ventajas e inconvenientes del MPC	283
7.2	Algoritmos de optimización aplicados al control	284
7.2.1	Planteamiento de un problema de control óptimo	284
7.2.2	Método de punto interior	287
7.2.3	Recursión de Riccati	291
7.2.4	Implementación del algoritmo	293
7.3	Control de presión en un gasoducto	296
7.3.1	Planteamiento del problema	296
7.3.2	Construcción de las matrices del problema	298
7.3.3	Control automático del sistema	304
7.3.4	Control óptimo del sistema	311
7.4	Minimización del consumo en una red de gasoductos	313
7.4.1	Planteamiento del problema	313
7.4.2	Modo de operación fijo	317
7.4.3	Modo de operación variable	320
8	Conclusiones y trabajo futuro	327
8.1	Sistemas de distribución de derivados del petróleo	328
8.1.1	Conclusiones	328
8.1.2	Trabajo futuro	330
8.2	Sistemas de transporte de gas	332
8.2.1	Conclusiones	332
8.2.2	Trabajo futuro	333

Apéndices

A Resolución numérica de EDP's en dinámica de fluidos 335

B Métodos de Punto Interior aplicados a la Optimización 353

Publicaciones 369

Bibliografía 371

Lista de Acrónimos

AG	Algoritmo Genético
CDF	Computational Fluid Dynamics
DEDS	Discrete Event Dynamic Systems
DLSP	Discrete Lot Sizing and Scheduling Problem
EDO	Ecuación Diferencial Ordinaria
EDP	Ecuación diferencial en Derivadas Parciales
FDM	Finite Difference Method
FEM	Finite Element Method
FVM	Finite Volume Method
GNL	Gas Natural Licuado
IA	Inteligencia Artificial
IPF	Infeasible Path-Following
KKT	Karush-Kuhn-Tucker
LP	Linear Programming
LPF	Long-Step Path-Following
LRS	London Research Society
MAGA	Multiagent Genetic Algorithm
MIP	Mixed Integer Programming
MILP	Mixed Integer Linear Programming
MINLP	Mixed Integer Non Linear Programming

MPC	Model Predictive Control
MSS	Multi Start Search
PDF	Probability Density Function
PMMC	Parallel Multiple Markov Chain
PMAGA	Parallel Multiagent Genetic Algorithm
RQP	Robust Quadratic Program
SA	Simulated Annealing
SCADA	Supervisory Control and Data Acquisition
SGA	Sequential Genetic Algorithm
SMMC	Sequential Multiple Markov Chain
SSMC	Sequential Single Markov Chain
TS	Tabu Search
VNS	Variable Neighbourhood Search

Lista de Símbolos

Conjuntos del modelo de planificación en tiempo continuo

T	Número de periodos en el horizonte de planificación indexado en $t=1,\dots,T$
P	Número de productos derivados del petróleo indexado en $p=1,\dots,P$
J	Número de depósitos de distribución indexado en $j=1,\dots,J$
K	Número de intervalos temporales de alto coste durante el horizonte de planificación indexado en $k=1,\dots,K$
R	Número máximo de producciones para cada producto en cada periodo indexado en $r=1,\dots,R$
I	Número máximo de paquetes que se pueden inyectar en el poliducto en cada periodo indexado en $i=1,\dots,I$
O	Número de de paquetes antiguos en el poliducto al inicio del horizonte de planificación indexado en $o=1,\dots,O$
S	Conjunto de pares de productos $\{(p,p'),\dots\}$ que representan secuencias prohibidas de bombeo de productos en el poliducto

Parámetros del modelo de planificación en tiempo continuo

$cid_{p,j}$	Coste de inventario para cada producto p en cada depósito j
cir_p	Coste de inventario para cada producto p en la refinería
$cf_{p,p'}$	Coste de reprocesamiento del material en contacto de dos paquetes con productos p y p' diferentes
$cp_{p,j}$	Coste asociado al transporte de un producto p desde la refinería hasta el depósito j

$\rho_{k,t}$	Coste de penalización por el bombeo de producto en el poliducto durante el intervalo costoso k del periodo t
$FPH_{k,t}$	Límite superior del $k^{\text{ésimo}}$ intervalo de alto coste en el periodo t
$IPH_{k,t}$	Límite superior del $k^{\text{ésimo}}$ intervalo de alto coste en el periodo t
h_{max}	Duración del periodo t (la misma para todos los periodos del horizonte de planificación)
$IDO_{p,j}$	Nivel de inventario de producto p en el depósito j al inicio del horizonte de planificación
$IF_{p,p'}$	Volumen de la mezcla de productos en la región de contacto entre dos paquetes con productos p y p' diferentes
IRO_p	Nivel de inventario de producto p en la refinería al inicio del horizonte de planificación
$IRmin_p$	Mínimo inventario permitido para el producto p en la refinería
$IRmax_p$	Máximo inventario permitido para el producto p en la refinería
$PRmin$	Duración mínima en la producción de productos en la refinería
$lmin$	Duración mínima en la inyección de un nuevo paquete en el poliducto
$lmax$	Duración máxima en la inyección de un nuevo paquete en el poliducto
$qd_{p,j,t}$	Demanda total de producto p a satisfacer en el depósito j en el periodo t
vm	Caudal máximo de entrega de producto a los mercados locales
$vbmin$	Caudal mínimo en la inyección de un nuevo paquete en el poliducto
$vbmax$	Caudal máximo en la inyección de un nuevo paquete en el poliducto
$W0_o$	Tamaño del paquete antiguo o al inicio del horizonte de planificación
WIT_o	Volumen del contacto entre los paquetes antiguos o y $o-1$

FO_o	Coordenada superior del paquete antiguo o al inicio del horizonte de planificación
$yo_{o,p}$	Denota si el paquete antiguo o y contiene el producto p
σ_j	Coordenada del depósito j desde el origen del poliducto
$\tau_{p,p'}$	Tiempo necesario para el cambio de manguera cuando se pasa de bombear producto p a bombear producto p'
vr_p	Tasa de producción del producto p

Variables del modelo de planificación en tiempo continuo

$CR_{r,p,t}$	Instante final de la r ésima producción de producto p en el periodo t
$LR_{r,p,t}$	Duración de la r ésima producción de producto p en el periodo t
$C_{i,t}$	Instante final de la inyección del i ésimo paquete del periodo t
$L_{i,t}$	Duración de la inyección del i ésimo paquete del periodo t
$A_{p,i,t}$	Volumen de producto p inyectado en el poliducto con el bombeo del i ésimo paquete del periodo t
$Do_{o,j,i,t}$	Volumen del paquete antiguo o transferido del poliducto al depósito j cuando se inyecta el i ésimo paquete del periodo t
$DVo_{o,p,j,i,t}$	Volumen del paquete antiguo o con producto p transferido al depósito j cuando se inyecta el i ésimo paquete del periodo t
$D_{i,t,j,i',t'}$	Volumen del i ésimo paquete inyectado en el periodo t transferido al depósito j cuando se inyecta el i' ésimo paquete del periodo t'
$DV_{i,t,p,j,i',t'}$	Volumen del i ésimo paquete inyectado en el periodo t con producto p transferido al depósito j cuando se inyecta el i' ésimo paquete del periodo t'
$FO_{o,i,t}$	Coordenada superior del paquete antiguo o en el instante $C_{i,t}$
$F_{i,t,i',t'}$	Coordenada superior del i ésimo paquete inyectado en el periodo t en el instante $C_{i',t'}$

$H_{i,t,k}$	Porción de $L_{i,t}$ dentro del $k^{\text{ésimo}}$ intervalo de alto coste en el periodo t
$ID_{p,j,i,t}$	Nivel de inventario del producto p en el depósito j en el instante $C_{i,t}$
$IRF_{p,i,t}$	Nivel de inventario del producto p en la refinería en el instante $C_{i,t}$
$IRS_{p,i,t}$	Nivel de inventario del producto p en la refinería en el instante $C_{i,t} - L_{i,t}$
$ql_{r,p,i,t}$	Volumen de la $r^{\text{ésima}}$ producción de producto p en el periodo t disponible en la refinería en el instante $C_{i,t} - L_{i,t}$
$qu_{r,p,i,t}$	Volumen de la $r^{\text{ésima}}$ producción de producto p en el periodo t disponible en la refinería en el instante $C_{i,t}$
$qm_{p,j,i,t}$	Cantidad de producto p transferido al depósito j durante el intervalo $(C_{i-1,t}, C_{i,t})$
$Q_{i,t}$	Volumen original del $i^{\text{ésimo}}$ paquete inyectado en el periodo t
$u_{i,t,k}$	Denota si la inyección del $i^{\text{ésimo}}$ paquete del periodo t comienza después de $IPH_{k,t}$
$v_{i,t,k}$	Denota si la inyección del $i^{\text{ésimo}}$ paquete del periodo t termina antes de $FPH_{k,t}$
$W_{o,i,t}$	Volumen del paquete antiguo o en el instante $C_{i,t}$
$W_{i,t,i',t'}$	Volumen del $i^{\text{ésimo}}$ paquete inyectado en el periodo t en el instante $C_{i,t}$
$WIF_{i,t,p,p'}$	Volumen del contacto entre los paquetes i e $i-1$ inyectados en el periodo t si contienen los productos p y p'
$xo_{o,j,i,t}$	Denota que una porción del paquete antiguo o puede ser transferida al depósito j mientras se inyecta el $i^{\text{ésimo}}$ paquete del periodo t
$x_{i,t,j,i',t'}$	Denota que una porción del $i^{\text{ésimo}}$ paquete inyectado en el periodo t puede ser transferida al depósito j mientras se inyecta el $i'^{\text{ésimo}}$ paquete del periodo t'
$y_{i,t,p}$	Denota que el $i^{\text{ésimo}}$ paquete inyectado en el periodo t contiene el producto p

$yl_{t,p}$	Denota que el último paquete inyectado en el periodo t contiene el producto p
$yp_{r,p,t}$	Denota si existe $r^ésima$ producción de producto p en el periodo t
N_t	Número de paquetes que realmente son inyectados en el periodo t
$zl_{r,p,i,t}$	Denota que la inyección del $i^ésimo$ paquete del periodo t comienza después de que la $r^ésima$ producción de producto p en el mismo periodo halla concluido
$zu_{r,p,i,t}$	Denota que la inyección del $i^ésimo$ paquete del periodo t termina después de que la $r^ésima$ producción de producto p en el mismo periodo halla comenzado

Conjuntos del modelo de planificación en tiempo discreto

T	Número de periodos en el horizonte de planificación indexado en $t=1,\dots,T$
NS	Número de nodos fuente de la red indexado en $n=1,\dots,NS$
NI	Número de nodos intermedios de la red indexado en $n=NS+1,\dots,NS+NI$
ND	Número de nodos destino de la red indexado en $n=NS+NI+1,\dots,NS+NI+ND$
C	Número de conexiones indexado en $c=1,\dots,C$
B_c	Número de tramos de cada conexión c , $b=1,\dots,B_c+1$
CB	Conjunto de pares de conexiones $\{(c,c'),\dots\}$ que pertenecen al mismo poliducto bidireccional
CE_n	Conjunto de conexiones entrantes al nodo n
CS_n	Conjunto de conexiones salientes del nodo n
P	Número de productos derivados del petróleo indexado en $p=0,\dots,P$
S	Conjunto de pares de productos $\{(p,p'),\dots\}$ que representan secuencias prohibidas de bombeo de productos en el poliducto

Parámetros del modelo de planificación en tiempo discreto

VP	Tamaño de un paquete en m^3
$VC_{p,p'}$	Volumen de la mezcla de productos en la región de contacto entre dos paquetes con productos p y p' diferentes
$xo_{c,b,p}$	Denota si la posición b de la conexión c contiene el producto p en el instante inicial
$AO_{n,p}$	Nivel de inventario de producto p en el nodo n al inicio del horizonte de planificación
$AT_{n,p}$	Nivel de inventario de producto p en el nodo n al final del horizonte de planificación
$Amin_{n,p}$	Mínimo nivel de inventario permitido para el producto p en el nodo n
$Amax_{n,p}$	Máximo nivel de inventario permitido para el producto p en el nodo n
$CI_{c,p}$	Coste asociado al transporte del producto p por la conexión c
$CT_{t,c}$	Coste de penalización por el bombeo de producto a través de la conexión c en el instante t
$CR_{p,p'}$	Coste de reprocesamiento de la mezcla de productos en la región de contacto entre dos paquetes con productos p y p' diferentes
$CA_{n,p}$	Coste de inventario del producto p en el nodo n (refinería o depósito intermedio)

Variables del modelo de planificación en tiempo discreto

$x_{t,c,b,p}$	Denota si la posición b de la conexión c contiene el producto p en el instante t
$y_{t,c,p}$	Denota si el paquete inyectado en un poliducto a través de la conexión c en el instante t contiene el producto p
$s_{t,c}$	Denota si se inyecta un paquete a través de la conexión c en el instante t

$v_{t,c,p,p'}$	Volumen de contacto entre el paquete inyectado en t a través de la conexión c y el ubicado en la posición 1 de dicha conexión si contienen los productos p y p'
$\alpha_{t,n,p}$	Cantidad de producto p almacenada en el nodo n en el instante t

Parámetros y Variables del modelo de Gasoducto

c	Velocidad isotérmica del sonido en gas ($m \cdot s^{-1}$)
D	Diámetro del gasoducto (m)
e	Energía interna específica ($J \cdot kg^{-1}$)
E	Eficiencia
f	Factor de fricción
F_f	Factor de arrastre
h	Entalpía específica ($J \cdot kg^{-1}$)
I	Número de puntos del mallado espacial
k	Rugosidad del gasoducto
k_e	Rugosidad efectiva
L	Longitud del gasoducto (m)
M	Peso molecular de gas ($kg \cdot mol^{-1}$)
p	Presión del gas (bar)
q	Flujo de masa del gas ($kg \cdot s^{-1}$)
Q	Caudal del gas ($m^3 \cdot s^{-1}$)
Q_n	Caudal del gas en condiciones normales ($m^3 \cdot s^{-1}$)
Re	Número de Reynolds

R_u	Constante universal de los gases ($J \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}$)
R_g	Constante del gas ($J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$)
S	Área transversal del gasoducto area (m^2)
t	Coordenada temporal (s)
T	Temperatura del gas (K)
v	Velocidad del gas ($m \cdot s^{-1}$)
x	Coordenada espacial (m)
Z	Factor de compresibilidad
Δt	Longitud del paso temporal (s)
Δx	Longitud del paso espacial (m)
γ	Cociente de los calores específicos a presión y volumen constante
Ω	Transferencia de calor por unidad de longitud ($J \cdot m^{-1} \cdot s^{-1}$)
ρ	Densidad del gas ($kg \cdot m^{-3}$)
ρ_n	Densidad del gas en condiciones normales ($kg \cdot m^{-3}$)
τ	Tensión tangencial (N)
θ	Ángulo de inclinación (deg)

Parámetros y Variables del modelo de Estaciones de Compresión

H	Altura adiabática ($kg \cdot m^{-2} \cdot s^{-2}$)
m	Masa de gas (kg)
n	Exponente politrópico
N	Número de compresores en la estación

p	Presión del gas (<i>bar</i>)
P	Potencia ($kg \cdot m^{-2} \cdot s^{-3}$)
p_s	Presión de succión (<i>bar</i>)
p_d	Presión de descarga (<i>bar</i>)
q	Flujo de masa del gas ($kg \cdot s^{-1}$)
Q	Caudal del gas ($m^3 \cdot s^{-1}$)
Q_n	Caudal del gas en condiciones normales ($m^3 \cdot s^{-1}$)
S	Velocidad de funcionamiento (<i>r.p.m.</i>)
V	Volumen del gas (m^3)
η	Eficiencia politrópica
γ	Cociente de los calores específicos a presión y volumen constante

Capítulo I

Marco de la investigación

Tanto el petróleo como el gas natural son las fuentes de energía más importantes de la sociedad actual. La toma de decisiones en cada una de las etapas de la cadena que siguen dichos combustibles fósiles desde su extracción hasta su consumo tiene un alto impacto económico sobre el precio final del producto. Así, la minimización de los costes asociados a dichas etapas es una tarea de crucial importancia. ***En concreto, esta tesis, trata de contribuir a la minimización de los costes asociados a la etapa de transporte y distribución desde la planta de procesamiento hasta las áreas de consumo.***

Las redes de distribución mediante conductos son uno de los medios más eficientes para el transporte de varios productos a lo largo de grandes distancias. Dichos sistemas, ***tienen todas las características de los sistemas complejos: distribuidos, grandes dimensiones, no linealidades y gran número de restricciones físicas presentes.*** Los sistemas con estas características, además de en control del flujo de fluidos, tienen gran interés en otras áreas tales como la fabricación de semiconductores, tráfico aéreo, etc....

El proceso de transporte y distribución de un producto desde la zona de su producción hasta la zona de consumo en la que se especifica la demanda del mismo, tradicionalmente se suele dividir en dos fases: a) ***planificación*** temporal de los envíos de producto necesarios para satisfacer la demanda, y b) ***control*** del estado en el que el producto es transportado. Esta tesis contribuye con la mejora y el desarrollo de nuevos modelos y algoritmos para obtener la ***planificación óptima en la distribución de derivados del petróleo mediante redes de poliductos***, y para encontrar la ***presión óptima con la que transportar el gas en una red gasoductos.*** En ambos casos, la palabra óptimo hace referencia a la minimización del coste asociado a cada uno de estos procesos de transporte y distribución.

1.1 Introducción

1.1.1 Transporte mediante redes de conductos

Las redes de conductos son un medio eficiente para el transporte de diferentes productos a lo largo de grandes distancias. Lo más común es encontrar conductos para el transporte de gases o líquidos, pero también existen conductos neumáticos que transportan cápsulas sólidas mediante el uso de aire comprimido. Tanto para gases como para líquidos, cualquier sustancia químicamente estable puede ser enviada a través de un conducto. Así, existen conductos para el transporte de lodos, agua e incluso cerveza, pero indiscutiblemente los más importantes son los conductos utilizados para el transporte de derivados del petróleo y gas natural. Los primeros son los denominados oleoductos para el caso en el que se transporte un único producto y poliductos si se transportan varios. En cuanto al transporte de gas, este se lleva a cabo mediante los denominados gasoductos. Normalmente, estos conductos suelen ser inspeccionados y limpiados utilizando los denominados “pigs” (pipeline inspection gauges en inglés), que impulsados por la propia presión del producto en el interior del conducto avanzan a lo largo del mismo.

El transporte a través de conductos, llevado a cabo por primera vez por el ingeniero ruso Vladimir Shukhov en la compañía Branobel a finales del siglo XIX, es la forma más económica para el transporte terrestre de grandes cantidades tanto de gas natural como de otros productos derivados del petróleo. Comparado con el transporte por ferrocarril, el transporte mediante redes de conductos tiene menor coste por unidad transportada a la vez que una mayor capacidad de transporte. Aunque dichos conductos pueden ser construidos incluso a través del mar, este proceso es tanto económica como tecnológicamente poco rentable, por ello, en este caso suele optarse por el transporte mediante tanques alojados en buques metaneros.

Los oleoductos están hechos de acero o plástico con diámetros que oscilan entre 30 y 120 centímetros. En muchas ocasiones, éstos son construidos sobre la superficie terrestre, sin embargo, en zonas urbanas o sensibles al medio ambiente suelen enterrarse en torno a 1 metro bajo tierra. El petróleo se mantiene en movimiento gracias a un sistema compuesto por varias estaciones de bombeo situadas a lo largo del conducto y normalmente fluye a una velocidad que oscila entre 1 y 6 metros por segundo. Los poliductos son utilizados para el transporte de dos o más productos diferentes a través del mismo conducto. Normalmente no existe separación física entre los diferentes productos transportados, por tanto, la región de contacto entre ambos presenta una mezcla de productos que debe ser reprocesada a su llegada a los

terminales receptores. La reducción en los costes asociada a dicho reprocesamiento suele ser uno de los principales factores a tener en cuenta en la planificación óptima del modo de funcionamiento de este tipo de sistemas. En el caso del gas natural, los conductos utilizados para la distribución del combustible a las casas y la industria suelen ser menores. Las regulaciones del gobierno de Canadá y Estados Unidos requieren que dichos conductos sean enterrados y protegidos contra la corrosión. A menudo, el método más económico para el control de la corrosión es el uso de un revestimiento junto con una protección catódica.

Las redes de conductos son también utilizadas para el transporte de agua destinado al consumo humano o al riego cuando es necesario atravesar largas distancias esquivando colinas, o cuando las acequias resultan una mala elección debido a la evaporación, polución o impacto medioambiental. Algunos ejemplos de acueductos son el Morgan–Whylla construido en 1944 y el Mannun–Adelaide construido en 1955, ambos al sur de Australia. Otro ejemplo de transporte mediante conductos es el transporte de cerveza a través la red de conductos que interconectan los bares ubicados dentro de los grandes estadios de fútbol. Así, es posible suplir las grandes diferencias en la demanda que hay durante el desarrollo de un partido, permitiendo la distribución desde un tanque central. Como ejemplo están los 5 kilómetros de conductos del Veltins–Arena, el mayor estadio de fútbol en Gelsenkirchen (Alemania).

1.1.2 Definición del problema y estado del arte

De entre todos los medios empleados para la *distribución de los derivados del petróleo*, los poliductos ofrecen los costes variables más bajos y, al mismo tiempo, un régimen de operación altamente fiable. Por estas razones, el volumen de productos transportados mediante poliductos representa una proporción muy alta con respecto al total. Sin embargo, y pesar de la frecuencia de uso de este medio de transporte, la literatura dedicada a la planificación óptima de la operación de los poliductos es relativamente escasa. Una de las posibles razones que justifica este hecho es la elevada complejidad del problema. Dicha complejidad está originada, por un lado, por su carácter combinatorio y, por otro, por las numerosas restricciones (de diferente naturaleza) y la dificultad de computar de forma precisa una función objetivo que permita evaluar de forma rápida y sencilla los costes de la operación.

El transporte por poliductos presenta una característica que no comparten otros medios de transporte, consecuencia del bombeo consecutivo de productos diferentes a través del mismo poliducto sin ningún tipo de elemento separador entre los mismos. Así, cuando productos diferentes viajan contiguos a lo largo del trayecto, se mezclan

en cierta medida y se forma una interfase de producto contaminado que es necesario reprocesar a la llegada a su destino. La planificación óptima del funcionamiento de una red de poliductos consiste en la determinación de la secuencia de paquetes de producto que se deben inyectar en la red desde cada uno de los orígenes (refinerías, puertos o centros de almacenamiento) de tal manera que se satisfaga la demanda en los destinos (estaciones de distribución final) con el menor coste de operación posible. Un paquete queda definido por el tipo de producto, su volumen, el reparto que se hace del mismo a cada uno de los posibles destinos y el caudal con el que viaja a través del poliducto. En ocasiones, según la complejidad del problema, puede ser suficientemente satisfactorio encontrar una solución factible pero, en otras, puede ser interesante y viable obtener una solución óptima con respecto a algún criterio de bondad. Desde el punto de vista de la factibilidad, es necesario tener presente el conjunto de restricciones que debe satisfacer una solución al problema. A continuación se citan algunas de las restricciones más importantes presentes en este tipo de sistemas:

- Los productos deben de estar disponibles en los depósitos ubicados en las estaciones de distribución final en los momentos oportunos para satisfacer la demanda de los diferentes clientes.
- Todos los depósitos, tanto las estaciones de almacenamiento como de las estaciones terminales, tienen capacidades de almacenamiento limitadas.
- Las refinerías no pueden producir producto por encima de su capacidad de producción.
- El caudal al que las estaciones de bombeo pueden inyectar nuevos productos en el poliducto está limitado tanto inferior como superiormente.
- Las características de los productos a transportar hacen que, debido a posible la formación de producto con un grado de contaminación excesivo, la inyección de algunos productos nunca pueda programarse a continuación de otros ni que puedan entrar en contacto a lo largo de su recorrido, ya que el tratamiento de las interfases que se forman supondrían unos gastos desorbitados. En otros casos, el emparejamiento no es deseable pero hasta cierto punto es admisible y presenta un coste diferente dependiendo de los productos en contacto.
- Los poliductos generalmente se emplean combinados con otros medios de transporte, de forma que puede ser necesario considerar los efectos que tienen estos otros medios sobre los niveles de stock y la satisfacción de la demanda en los diferentes terminales.

- Los intervalos de tiempo durante los que el poliducto no está disponible debido a operaciones de mantenimiento pueden ser relevantes, en cuyo caso deben considerarse en la formulación del problema.

Desde el punto de vista de la función que permite evaluar la bondad de la estrategia de funcionamiento representada por una solución al problema, se pueden adoptar diferentes perspectivas. Por un lado, es necesario establecer cuáles son los elementos relevantes en dicha función, siendo los principales los siguientes:

- *Costes de bombeo y de mejorador de flujo.* Dependiendo de los equipos de bombeo instalados y de los caudales deseados a lo largo del horizonte temporal, se obtendrán diferentes costes de consumo eléctrico. En ocasiones, para aumentar el caudal se añade una cierta cantidad de un aditivo conocido como mejorador de flujo, relativamente costoso.
- *Costes asociados a la formación de interfases.* Como se ha indicado, a lo largo del trayecto, los diferentes paquetes se mezclan en cierta medida originándose un cierto volumen de producto contaminado. Según la naturaleza de los productos que forman la interfase y del volumen de la misma, existen diferentes tratamientos con un coste diferente para cada par de productos.
- *Coste de carencia.* Si en algún caso se admite algún tipo de retraso en el servicio a los clientes, sería necesario computar el coste asociado a dichos retrasos.
- *Costes de almacenamiento.* También se pueden computar los costes asociados al almacenamiento de los diferentes tipos de producto en los depósitos de cada uno de los nodos de la red.

Por otro lado, se debe seleccionar el grado de precisión para estimar los costes anteriores. En este sentido, podría ser suficiente utilizar una estimación de dichos costes o podría ser necesario calcularlos de forma exacta. Por ejemplo, para el caso del coste asociado a las interfases, se pueden realizar desde cálculos precisos de carácter fluido-dinámico a otros mucho más sencillos de computar pero menos precisos.

Dada la complejidad del problema, los autores que han tratado de abordarlo casi siempre introducen algún tipo de simplificación, ya sea de carácter topológico, relativo al tamaño del sistema, a la longitud del horizonte temporal considerado, o bien relativas al funcionamiento del poliducto o a la forma de estimar de forma simplificada cada uno de los términos de la función objetivo que permite evaluar la bondad de cada una de las soluciones obtenidas. Aunque las simplificaciones

encontradas en la literatura se comentan más detalladamente en la sección siguiente, se adelantan aquí a grandes rasgos las posibles fuentes de las mismas:

- Simplificaciones de tipo topológico. Por ejemplo, la red de poliductos más simple está formada por una fuente y un terminal unidos por un único poliducto.
- Simplificaciones en las dimensiones de la red, como pueden ser el número de tramos, terminales, instalaciones intermedias, etc...
- Simplificaciones vía limitación del horizonte temporal a unas horas o unos días.
- Simplificaciones sobre algunas de las condiciones de operación del poliducto: discretización de paquetes, cálculo de interfases, cálculo de caudales, etc...
- Simplificaciones derivadas de la inexistencia de secuencias de producto prohibidas.
- Simplificaciones en el cálculo del tamaño y del coste asociado a la formación de interfases de producto contaminado.

Los **sistemas de transporte de gas** son sistemas distribuidos de gran escala, no lineales y muy complejos que pueden llegar a tener centenares o miles de kilómetros de gasoductos, centros de producción, almacenamiento y de distribución, estaciones de compresión, y muchos otros dispositivos como válvulas y reguladores. Las redes de transporte trabajan a altas presiones y necesitan de estaciones de compresión para transferir al gas la energía necesaria para desplazarlo a grandes distancias. La estación de compresión es una entidad muy sofisticada, puede tener varios compresores, con distintas características, pero todos ellos con comportamientos fuertemente no lineales y donde cada unidad puede ser conectada o desconectada de forma independiente a la red. El flujo del gas posee tramos de sentido único y otros donde su sentido puede revertir, dependiendo de las condiciones de la red. Además de la reversibilidad del flujo en algunos tramos, el número de compresores en funcionamiento puede variar con el tiempo, así como el número de fuentes y sumideros, por lo que es por naturaleza un sistema híbrido.

A medida que el gas fluye por la red, tiene lugar una pérdida de energía y de presión debido a la fricción del gas con la pared interior de los gasoductos y a la transferencia de calor entre el gas y sus alrededores. Si se pretende que el gas demandado llegue con la presión adecuada a los correspondientes puntos de entrega, las caídas de presión no deseadas deberán ser reestablecidas periódicamente. De dicho reestablecimiento periódico de las presiones se encargan las mencionadas estaciones

de compresión instaladas en la propia red y que suelen consumir en torno al 3 y el 5% del total del gas transportado. Por otro lado, puede ocurrir que en tramos ascendentes el gas sufra un aumento de presión existiendo la posibilidad de que ciertos límites de seguridad puedan ser sobrepasados. En estos casos es necesario activar un mecanismo de emergencia que evite los excesivos aumentos de presión que puedan producirse en la red. Para ello, se tienen instalados en la red unos reguladores de presión capaces de rebajar la presión del gas hasta valores por debajo de los límites de seguridad. Al igual que el caso de los compresores, los reguladores consumirán una fracción del total del gas transportado por la red para realizar dicha tarea.

En definitiva, se trata de un sistema de transporte en el que se debe mantener la presión del gas en un determinado rango para su adecuado funcionamiento. El límite inferior lo marca la mínima presión necesaria para abastecer una demanda, y el límite superior lo determina la máxima presión que no viola el límite de seguridad. Cada vez que el gas caiga por debajo del límite inferior o sobrepase el límite superior se deberá poner en marcha un compresor o un regulador respectivamente, dando lugar a un gasto asociado a dicha operación. La idea del control óptimo en la distribución de gas es por tanto, obtener un sistema de control automático que sea capaz de mantener la presión del gas dentro del rango de funcionamiento y poniendo en marcha tanto compresores como reguladores el mínimo número de veces posible minimizando así el coste de la operación. El estado actual del control en los sistemas de distribución de gas se puede resumir en los siguientes puntos:

- La literatura es escasa, debido a la complejidad del sistema.
- La mayoría de los sistemas utilizan reglas heurísticas y simulaciones para fijar el comportamiento deseado de las redes.
- Los algoritmos de control propuestos sólo son aplicables al funcionamiento en estado estacionario.
- Utilizan modelos simplificados a partir de las aproximaciones en diferencias finitas de las ecuaciones en derivadas parciales.
- Utilizan estrategias de control óptimo utilizando modelos simplificados o simuladores.
- No hay propuestas que contemplen el problema de forma completa.
- No tienen en cuenta la incertidumbre en las demandas.

1.2 Distribución de derivados del petróleo

1.2.1 El petróleo y sus derivados

El petróleo es el fluido más abundante en la corteza terrestre después del agua. Sin embargo, nadie conoce con exactitud su naturaleza real. Sólo es posible deducir, a través de evidencias científicas, qué ocurrió hace millones de años en el lecho de los océanos, cuando el petróleo se formó. Una de las teorías plantea su origen inorgánico, a través de procesos exclusivamente químicos. Los experimentos han demostrado que el petróleo puede obtenerse en laboratorio, sin embargo, esta hipótesis no ha podido ser confirmada en la mayoría de los yacimientos del mundo. Otra teoría más aceptada, establece que el petróleo se originó a partir de los restos de miles de millones de diminutos animales que, a medida que morían, se acumulaban en el fondo de los mares, mezclándose con el barro, vegetales de origen marino y fragmentos de plantas terrestres. El conjunto fue enterrándose cada vez más profundamente, comprimido por el peso de los nuevos sedimentos y suavemente recalentado por el calor de la tierra. Este caldo, transformado a lo largo de los siglos, dio origen a lo que hoy conocemos como petróleo. Empujado por la presión de los estratos rocosos y subiendo desde las profundidades, el petróleo migró hacia rocas menos compactas hasta toparse con algún estrato totalmente impermeable. Mientras tanto, los movimientos geológicos hacían que, a veces, el lecho de los mares alcanzara la superficie. Cuando el petróleo afloraba, sus elementos más livianos se evaporaban, formando enormes depósitos de bitúmenes. Cuando los movimientos de ascenso se interrumpían antes de alcanzar la superficie, el petróleo quedaba en el subsuelo, diseminado en arenas, areniscas y calizas, así como el agua se aloja en los poros de una esponja.

El petróleo no se encuentra distribuido de forma uniforme en nuestro planeta. Las mayores acumulaciones, que representan aproximadamente el 75% de los hidrocarburos del mundo, se encuentran en tres grandes áreas: Estados Unidos, Rusia y Medio Oriente. El petróleo está formado por hidrocarburos, que son compuestos de hidrógeno y carbono, en su mayoría parafinas, naftenos y aromáticos, que son los caracterizan ese petróleo. Además, contiene cantidades variables de derivados hidrocarbonados de azufre, oxígeno y nitrógeno, y cantidades variables de gas disuelto y pequeñas proporciones de componentes metálicos. También puede contener agua en suspensión o en emulsión y sales. Sus componentes útiles se obtienen por destilación en las refinerías de petróleo. Los componentes no deseados, como son el azufre, oxígeno, nitrógeno, metales, agua, sales, etc..., se eliminan mediante procesos físico-químicos. Como puede verse, el número de compuestos es muy grande. En el

petróleo crudo se han aislado hasta 277 compuestos de hidrocarburos. La mayoría de hidrocarburos aislados se clasifican como:

- *Hidrocarburos parafínicos* (33%): Son hidrocarburos saturados homólogos del metano (CH_4). Su fórmula general es $\text{C}_n\text{H}_{2n+2}$
- *Cicloparafinas–Naftenos* (21%): Son hidrocarburos cíclicos saturados, derivados del ciclopentano (C_5H_{10}) y del ciclohexano (C_6H_{12}). Muchos de estos hidrocarburos contienen grupos metilo en contacto con cadenas parafínicas ramificadas. Su fórmula general es C_nH_{2n}
- *Hidrocarburos aromáticos* (47%): Son hidrocarburos cíclicos insaturados constituidos por el benceno (C_6H_6) y sus homólogos. Su fórmula general es C_nH_n .
- *Otros hidrocarburos*: a) Olefinas, moléculas lineales o ramificadas que contienen un enlace doble de carbono, cuya fórmula general es C_nH_{2n} ; y b) dienos, moléculas lineales o ramificadas que contienen dos enlaces dobles de carbono, cuya su fórmula general es $\text{C}_n\text{H}_{2n-2}$.
- *Compuestos no hidrocarburos*: Los compuestos más importantes son los sulfuros orgánicos, los compuestos de nitrógeno y de oxígeno. También hay trazas de compuestos metálicos, tales como el sodio (Na), hierro (Fe), níquel (Ni), vanadio (V), plomo (Pb), etc... Asimismo se pueden encontrar trazas de porfirinas, que son especies organometálicas.

El proceso de producción del petróleo y sus derivados está compuesto por varias fases. Primero, el petróleo crudo es extraído por medio de perforaciones en pozos terrestres o en los océanos tras haber comprobado previamente mediante una etapa de exploración que el yacimiento es rentable. Después se transporta por oleoductos o buques petroleros hasta la refinería para adaptarlo a las necesidades de consumo generando los diferentes derivados. Una vez procesados, los diferentes productos son conducidos mediante poliductos hasta las zonas de almacenamiento temporal situadas en las diferentes regiones de consumo, desde donde la distribución final es llevada a cabo por camiones cisterna. La figura 1.1 muestra un diagrama de flujo indicando el orden en el que se sucede cada una de las etapas de esta cadena, en donde se ha sombreado la etapa de distribución mediante poliductos por ser la tratada en la tesis.

En las regiones terrestres, la *exploración* comienza con el sobrevuelo de centenares de kilómetros cuadrados para tomar fotografías aéreas, complementadas con la toma de fotografías por satélite. Los geólogos, con el auxilio de los mapas así confeccionados,

eligen las áreas con mayores probabilidades de albergar un yacimiento. Viajan entonces hasta las zonas seleccionadas y examinan las rocas y estructuras de superficie que aporten indicios sobre la conformación del subsuelo. Entonces es el turno de los geofísicos que miden pequeñas alteraciones en el campo magnético de la tierra o en la gravedad, provocadas por la presencia de distintas rocas en el subsuelo. Estos datos son procesados por computadoras que generan los llamados mapas sísmicos. Los geofísicos analizan estos mapas determinando el tipo de rocas que la onda atravesó, y estableciendo si hay formaciones rocosas en condiciones de contener petróleo. No importa cuán fuertes sean los indicios hallados por geólogos y geofísicos, la única forma de determinar la real existencia de hidrocarburos es realizar la perforación de un pozo. El método más utilizado en la actualidad es el de la perforación rotativa. La torre de perforación, de aproximadamente cuarenta metros de altura, está integrada por cuatro grandes columnas de acero unidas lateralmente. Sostenida por ella se encuentra la barra de sondeo, unida en tramos de nueve metros, que pasa por una mesa rotativa colocada en el piso de la torre.

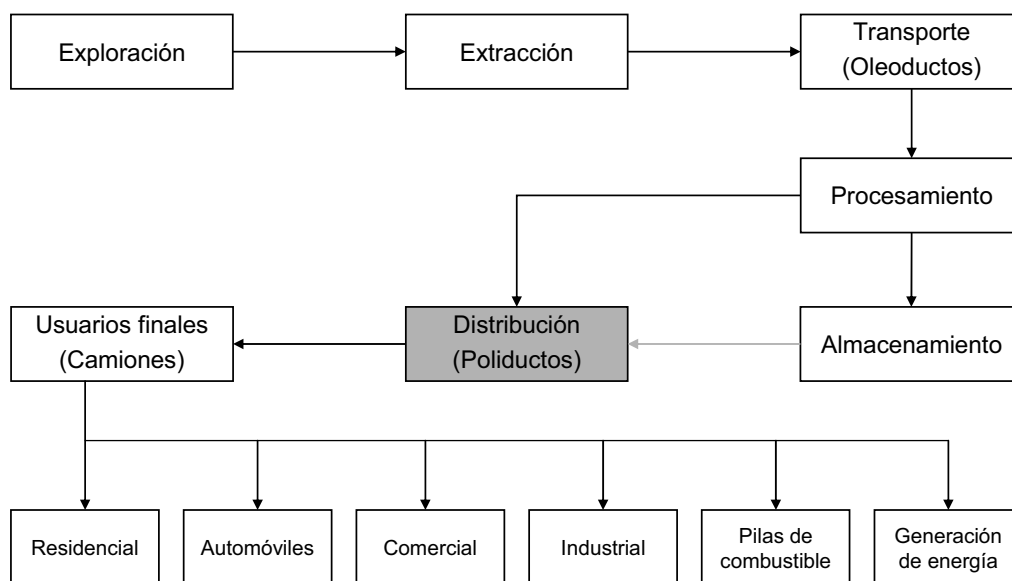


Figura 1.1: Cadena del petróleo.

Si la búsqueda es coronada con éxito y los volúmenes de hidrocarburos encontrados justifican su explotación económica, es necesario poner el pozo en producción procediendo a la *extracción* del petróleo y almacenamiento del mismo en tanques hasta ser transportado por barco u oleoducto hasta la refinería. El petróleo crudo entrampado en el subsuelo se mantiene allí bajo presión, asociado a gas y agua. Si las presiones son altas, el petróleo es obligado a desplazarse hacia el fondo del pozo, y

fluye hacia arriba. Para controlar este proceso, una vez terminada la perforación se instala una cañería de producción, de cinco a diez centímetros de diámetro. En la superficie se coloca un “árbol de Navidad”, dispositivo compuesto por una serie de válvulas que permiten cerrar y abrir el pozo a voluntad, regulando su surgencia. El petróleo llega a la superficie mezclado con gas en solución. Entonces se bombea hacia una planta de procesamiento que separa el gas del petróleo, enviando éste último hacia tanques de almacenamiento. El período de surgencia natural de un pozo es el de menor costo de producción, dado que toda la energía utilizada es aportada por el mismo yacimiento. Cuando esta energía deja de ser suficiente, es necesario recurrir a métodos artificiales para continuar extrayendo el petróleo. Los habituales son:

- Extracción con gas o “gas lift”: También llamada surgencia artificial, consiste en inyectar gas a presión dentro de la tubería para alivianar la columna de petróleo y llevarlo a la superficie.
- Pistón accionado a gas o “plunger lift”: Es un pistón viajero que, empujado por el propio gas del pozo, lleva a la superficie el petróleo que se acumula entre viaje y viaje del pistón.
- Bomba centrífuga con motor eléctrico sumergible: Utiliza una bomba de paletas accionada por un motor eléctrico. El conjunto se baja con una tubería especial y permite bombear grandes volúmenes.

Desde los tanques de almacenamiento en los yacimientos, el petróleo crudo es *transportado* a través de oleoductos hasta terminales oceánicas o refinerías. Como por lo general los yacimientos de petróleo se encuentran alejados de los centros de consumo, los oleoductos deben recorrer largas distancias. Muchos oleoductos se entierran por debajo del nivel del suelo, y en todos los casos demandan procesos especiales para protegerlos de la corrosión. Se han desarrollado aceros especiales de gran resistencia a la tensión, que permiten construir cañerías más delgadas y de menor costo. También, aunque menos utilizadas, se han probado cañerías de aluminio y de material plástico. Un volumen sustancial del petróleo es transportado mediante buques. Los buques petroleros llevan las máquinas propulsoras a popa, para evitar que el árbol de la hélice atravesase los tanques de petróleo y como medida de protección contra el riesgo de incendio. Algunos de los petroleros de mayor porte encuentran dificultades para atracar en puertos que carecen del calado adecuado o no disponen de muelles especiales. En estos casos se recurre a boyas fondeadas a distancia conveniente de la costa, provistas de tuberías. Estas, conectadas a terminales en tierra, permiten a los grandes petroleros amarrar y descargar el petróleo sin necesidad de ingresar al puerto.

Los productos derivados del petróleo que se obtienen tras su *procesamiento* en las refinerías alimentan no sólo a otras industrias sino, sobre todo, a los consumidores industriales o privados. Al principio resultaba más económico situar las refinerías junto a las explotaciones petrolíferas, mientras que ahora, los progresos técnicos realizados en el transporte mediante oleoductos han dado lugar a una evolución que conduce a instalar las refinerías cerca de los grandes centros de consumo. Los derivados del petróleo abarcan una amplia gama, que incluye combustibles para fuentes fijas y móviles, lubricantes para usos diversos, asfaltos para la construcción de carreteras y petroquímicos para los más variados artículos de la vida cotidiana. El petróleo que se extrae de los yacimientos está constituido por una mezcla de hidrocarburos líquidos, gaseosos y sólidos, e incluye impurezas como agua, sales y sedimentos. Tal y como se comentó en la sección 1.2.1, los hidrocarburos son compuestos formados básicamente por carbono e hidrógeno, y algunos otros elementos como oxígeno, nitrógeno y azufre. Según el tipo de hidrocarburo que predomine en el petróleo crudo, se establece el camino de procesamiento que seguirá en la refinería.

Una vez obtenidos los derivados petrolíferos, éstos deben ser ***distribuidos*** hasta los clientes. En general, estos productos salen de las refinerías a granel, aunque a veces se envasan en latas o bidones ya listos para su uso. Los grandes consumidores, como las eléctricas o las industrias químicas, reciben el suministro directamente de la refinería por poliducto o por carretera. Los consumidores de menos cantidades generalmente son abastecidos mediante camiones cisterna que toman el producto de los centros de almacenamiento y distribución ubicados a lo largo de la ruta del poliducto desde el que reciben los diferentes productos procesados en la refinería.

1.2.2 Sistemas de distribución mediante poliductos

Actualmente los combustibles fósiles son fundamentales en la economía mundial. Aproximadamente un 60 por ciento de la energía que se consume en el planeta se obtiene de ellos. Dada la importancia que tiene ese suministro energético, se ha desarrollado una extensa red logística para llevar los combustibles desde la refinería hasta los centros de consumo. Este proceso de distribución usa instalaciones y vehículos para el transporte y almacenamiento. En el caso de combustibles de amplia utilización como las gasolinas, el diesel y el combustible para aviación, este complejo sistema incluye a los poliductos, terminales de despacho, camiones de transporte especiales y estaciones de servicio. Las tecnologías de estas instalaciones son diversas y permanentemente actualizadas. Ello asegura la llegada de los combustibles a sus usuarios en los lugares, momentos y cantidades requeridas, con mínimo riesgo para el medio ambiente.

Los poliductos son sistemas de tuberías destinados al transporte de hidrocarburos o productos terminados. A diferencia de los oleoductos convencionales, dedicados exclusivamente al transporte de petróleo crudo, los poliductos transportan una gran variedad de combustibles ya procesados en la refinería. A través de ellos pueden trasladarse principalmente keroseno, gasolina de avión (comúnmente denominada Jet Fuel en inglés), otras gasolinas, diesel y gases licuados (LPG, de Liquefied Petroleum Gas en inglés). La figura 1.2 muestra el funcionamiento de un poliducto simple.



Figura 1.2: Funcionamiento de un poliducto.

El transporte se realiza en lotes sucesivos. Sucede normalmente que un poliducto de grandes dimensiones contenga cuatro o cinco productos diferentes en distintos puntos de su recorrido, que son entregados en la terminal de recepción o en estaciones intermedias ubicadas a lo largo de la ruta. Para esta operación se programan unos envíos en los que las presiones y la velocidad de desplazamiento de cada producto son controladas por medio de centros de computación. A condición de que se cumplan ciertas condiciones, el nivel de mezcla de productos diferentes viajando de forma consecutiva a través del poliducto, afecta sólo a pocas decenas de metros cúbicos. Esto permite recuperar esta mínima fracción de producto contaminado como producto de menor calidad, sin que se afecte la calidad final del producto.

Las terminales de despacho son plantas de almacenamiento donde se almacenan los combustibles enviados desde las refinerías, a la espera de su carga en los camiones cisterna que abastecen a las estaciones de servicio. Además de los grandes tanques de almacenamiento, un elemento central de estas terminales es el Laboratorio de Control de Calidad. Este permite asegurar que todas las partidas de combustible que se despachan en la planta estén dentro de las especificaciones requeridas. La mayoría de las terminales de despacho reciben los combustibles de las refinerías por medio de poliductos pero también pueden hacerlo desde puertos y ríos interiores mediante

buques y barcazas. Para llevar los combustibles desde las plantas de despacho hasta las estaciones de servicio, se utilizan camiones cisterna, especialmente diseñados y equipados con las últimas tecnologías. Los modernos camiones pueden llegar a transportar aproximadamente 40.000 litros de combustible, contando además con dispositivos electrónicos que miden permanentemente la carga recibida, en tránsito y despachada.

1.2.3 Revisión bibliográfica

Se puede hacer un resumen de los diferentes enfoques existentes adoptados en la literatura para la operación óptima de redes de poliductos atendiendo a dos criterios fundamentales: a) el tipo de técnica utilizada; y b) el tipo de simplificaciones que se introducen en el modelo. Dada la complejidad que se ha comentado en la sección anterior, se observa que las formas de abordar el problema se caracterizan por introducir alguna simplificación que permita obtener algún tipo de solución. En ocasiones, las simplificaciones asumidas facilitan el tratamiento del problema mediante técnicas exactas, como la programación lineal entera mixta. Sin embargo, también existen propuestas de carácter más general, relativos a la producción y el transporte de hidrocarburos, orientadas al desarrollo de métodos exactos, como es el caso de [PG98]. A continuación se presentan los diferentes enfoques describiendo a grandes rasgos sus características junto con las simplificaciones y técnicas que se han propuesto para resolverlos.

Por su lado, [HR93] comenta que en los problemas de redes de transporte de agua, que comparten ciertas características pero no otras esenciales, se han aplicado métodos de programación dinámica, programación no lineal y programación entera mixta. El objetivo de estos modelos es poder conocer si los parámetros de la red se comportan para un determinado instante de forma adecuada, pero no permiten estudiar la evolución del sistema a lo largo del tiempo. Con respecto al problema específico de la operación óptima de poliductos presentan una primera aproximación a la resolución del problema, consistente en programar envíos de paquetes de productos ordenados de mejor a peor calidad, y al llegar al de menor calidad, programar envíos de paquetes ordenados de menor a mayor calidad. De esta forma se consigue reducir el coste debido a la contaminación de productos, pero sin llegar a obtener una planificación óptima.

Uno de los posibles tratamientos del problema para redes de topología lineal, consiste en considerar el tiempo como una variable discreta. [RP03] plantea un modelo de programación lineal entera mixta cuya función objetivo es la suma de los

costes de bombeo, de almacenamiento y los asociados a la formación de interfases. Además, plantean dos modelos diferentes. En el primero, no se permite la posibilidad de que un tramo del poliducto alimente simultáneamente al terminal situado en su extremo final y al tramo que le sigue, mientras que en el segundo, dicha situación si está permitida. Para ambos modelos, los paquetes que se inyectan en el poliducto deben ser múltiplos de una determinada cantidad. La aplicación práctica de estos modelos se lleva a cabo sobre un sistema formado por un único poliducto que toma los productos de los tanques de la refinería en la que dichos productos son producidos y los distribuye a cinco terminales situadas a lo largo de su ruta. El horizonte de la planificación es de 75 horas, dividido en 15 periodos de 5 horas cada uno de ellos. Tal y como está formulado el problema, el coste asociado a la generación de interfases no es función de parámetros realistas. En concreto, los costes asociados la formación de una interfase dependen del par de productos que la originan, sin embargo, dada la manera en la que se computa dicho coste, el resultado es que algunas interfases correspondientes al mismo par de productos, aun permaneciendo durante el mismo tiempo en el oleoducto, dan lugar a costes distintos.

[RP04] propone una ampliación de su trabajo anterior. Introduce, por un lado, un conjunto de restricciones adicionales en relación con el hecho de que la formación de interfases es mucho mayor cuando los productos involucrados no están en movimiento. Estas restricciones impiden que un determinado tramo del poliducto se detenga, deteniendo por tanto también a todos los tramos anteriores a este, mientras exista una interfase dentro del mismo. Por otro lado incorporan restricciones relativas al número mínimo de periodos que cada tramo debe permanecer operativo para garantizar el suministro de los productos demandados por cada una de los terminales. El nuevo modelo se aplica en diferentes contextos de demanda para un poliducto con una refinería, cinco terminales, y con un horizonte de planificación de 75 horas.

Por su parte, [MAN04] propone un método de programación lineal entera para un problema con una refinería, un poliducto y un puerto. Los buques llegan al puerto, entregan a la refinería los diferentes tipos de derivados y cargan otros productos para transportarlos a otros destinos. El objetivo es minimizar el coste total asociado al tránsito de los productos. Los costes que se consideran en el modelo son: a) los costes de introducción de productos de separación entre cada dos hidrocarburos, y b) los costes de bombeo. El modelo se aplica a un problema para un horizonte temporal de 25 horas.

Dentro del grupo de autores que tratan el problema de la programación de poliductos lineales, existen algunos que optan por formular un modelo exacto de

carácter continuo. En [CC03] se trata de minimizar, al igual que en [RP03], los costes asociados al bombeo, los costes de almacenamiento y los de formación de interfases para un poliducto lineal. Todo ello, con la salvedad del tratamiento continuo del tiempo y sin hacer ninguna hipótesis sobre el tamaño de los paquetes inyectados en el poliducto, por lo que el volumen de los mismos pasa a ser una variable continua en lugar de un múltiplo de una determinada cantidad. El modelo se aplica sobre un poliducto con una refinería y cinco terminales, e involucra cuatro tipos de productos diferentes. El horizonte temporal es de nuevo de 75 horas. Los autores obtienen mejores resultados que los aportados por [RP03] con un menor tiempo de cómputo.

[CC04] propone una ampliación del modelo planteado en [CC03] en el que se incorpora la posibilidad de que existan secuencias de productos no permitidas, se realiza un tratamiento más riguroso de los costes de bombeo y se incorporan algunas restricciones adicionales de carácter redundante que aceleran el procedimiento de búsqueda cuando se utiliza un método de “Branch&Bound” para resolver el problema. La utilización de modelos continuos supone varias ventajas con respecto a la utilización de modelos discretos. En primer lugar, la formulación continua incluye un menor número de variables binarias reduciendo la complejidad del mismo en términos computacionales. Esto se traduce en un tiempo de resolución menor, o en la posibilidad de estudiar horizontes temporales algo más largos. Además, el conjunto de posibles soluciones de la formulación continua es más amplio que en el caso de la formulación en tiempo discreto, existiendo una alta probabilidad de encontrar mejores soluciones.

Por último, dentro del grupo de autores que se ocupa de la operación óptima sobre poliductos lineales, algunos eligen métodos heurísticos en lugar de métodos exactos para realizar la búsqueda de la solución. En este grupo se encuentra el trabajo [Sas97] que, a pesar de la simplificación de la configuración del poliducto (en su aplicación práctica trabaja con una refinería y tres terminales), emplea un método heurístico, al que denomina “Beam Search” para encontrar una solución factible. La técnica opera de manera iterativa. A partir de cada estado, descrito por el la existencias en la refinería, los terminales y la posición de los diferentes paquetes a lo largo del poliducto, explora los diferentes estados a los que se puede llegar partiendo de este. Elimina los estados que previsiblemente no son interesantes y evalúa los restantes. Un número de estos, al que denomina “tamaño” de la técnica, es seleccionado, y con ellos se realiza el mismo proceso. Al cabo de cuatro iteraciones, se selecciona el camino de estados que ofrece un mejor resultado. Los estados se evalúan de acuerdo con el coste en el que se ha incurrido para llegar a dicho estado, el nivel de existencias de cada terminal y la medida en la que la demanda ha sido satisfecha hasta el momento,

a lo que se le añaden penalizaciones por paradas o por violar restricciones no duras del problema. Tras la generación de nuevos estados a partir de uno dado, se realiza un control para eliminar las soluciones que no cumplen determinadas restricciones. Los autores introducen dos restricciones adicionales. En primer lugar, utilizan secuencias de paquetes que tradicionalmente han funcionado y, en segundo, se proponen sólo diez posibles formas de reparto de un paquete entre los tres posibles destinos.

Igualmente, en [MPL02] se opta por un algoritmo heurístico para obtener una solución suficientemente buena respecto a la suma de los costes debidos a las penalizaciones por retraso en las entregas y los costes asociados a las paradas y arranques del poliducto. El método propuesto consta de un método constructivo de carácter “ávido” (comúnmente denominado “greedy” en inglés), al final de cuya aplicación se obtiene una ordenación de los paquetes que se deben enviar. A continuación se realiza una búsqueda local sobre dicha ordenación, consistente en continuar realizando cambios entre paquetes adyacentes mientras se consiga mejorar la solución obtenida tras el cambio realizado. En este problema, los autores de [MPL02] no incorporan de ninguna manera las consecuencias la formación de interfases, y tampoco contemplan la posibilidad de que el flujo se ramifique, es decir, que se sirva producto tanto un terminal como a la siguiente sección del poliducto de forma simultánea. Por último, los autores proponen como posible desarrollo de interés el estudio de redes con poliductos que compartan las mismas fuentes.

Hasta ahora se han comentado los estudios dedicados a poliductos de carácter lineal. Otros autores, sin embargo, tratan de resolver problemas topológicamente más complejos. La complejidad de estos problemas es tal que los métodos exactos son difícilmente aplicables. [Fel75] describe la utilización de un simulador para obtener la planificación óptima de la secuencia en la que se deben inyectar nuevos productos en una red formada por dos fuentes, tres estaciones de bombeo intermedias, siete terminales y doce poliductos que conectan los elementos anteriores. Una primera aplicación con buenos resultados emplea reglas de programación que a partir de los datos de demanda de los clientes generan un primer programa de envío. Los autores no describen cómo funciona este generador de soluciones iniciales. Los programadores pueden introducir modificaciones sobre estas soluciones iniciales tentativas. El resultado se introduce en un simulador, de manera que los programadores pueden analizar los resultados que ofrece la solución seleccionada. Este proceso se repite hasta que se obtiene una solución lo suficientemente satisfactoria. Por tanto los autores no proponen ninguna herramienta capaz de proporcionar la solución óptima al problema, sino que tan solo ofrecen una herramienta para facilitar el trabajo de los programadores u operadores de la red.

En [HR93] el poliducto se representa mediante un grafo dirigido acíclico en el que los nodos representan tanto fuentes como terminales y los arcos representan los diferentes tramos del poliducto. La dirección de cada arco determina el sentido del flujo a lo largo del tramo correspondiente, sin la posibilidad de considerar tramos reversibles. Aunque contemplan la existencia de ramificaciones en el poliducto, en la práctica, no permiten que el flujo se reparta entre un terminal y el siguiente tramo de poliducto de forma simultánea. Se trata de entregar una determinada cantidad de producto a cada terminal. Así, una solución consiste en una ordenación de paquetes junto con la trayectoria que debe seguir cada uno de ellos para llegar desde su origen al terminal correspondiente. La función objetivo a minimizar, y que por tanto dirige la búsqueda, es el número de paradas en las que tiene que incurrir el poliducto para satisfacer la demanda, ya que los costes de bombeo y de mantenimiento están íntimamente relacionados con el número de veces que el poliducto se detiene y arranca de nuevo. Aunque inicialmente realiza una serie de consideraciones para el problema formulado de complejidad topológica relativamente elevada, los algoritmos que se proponen sólo son utilizados para poliductos con una fuente y varias ramificaciones. Existen algunas hipótesis que restan realismo al modelo. En primer lugar, no se consideran restricciones de capacidad en los terminales. Tampoco se tienen en cuenta tiempos de entrega de los productos en los terminales por lo que no se incluyen costes de penalización por retrasos. Además, no se contabilizan de ninguna manera en la función objetivo los costes asociados a la formación de interfases ni los costes de almacenamiento. Por todo de ello, los propios autores señalan la imposibilidad de aplicar directamente su técnica en un caso real, aunque defienden el interés de la metodología subyacente en la resolución de su problema.

[CS96] trata también poliductos representados mediante grafos dirigidos. En este caso sí se incorpora la existencia de tramos reversibles. Este modelo es más realista que el propuesto en [HR93], ya que sí se considera una capacidad limitada en los terminales, secuencias de productos no permitidas, y fechas de entrega de las cantidades demandadas en cada terminal. Además, incorporan tiempos de parada dedicados al mantenimiento de los equipos. Los autores tratan de encontrar una solución factible que minimice los costes de bombeo. En primer lugar, formulan un modelo matemático basado en teoría de grafos. Para un determinado instante se puede representar el poliducto con un grafo. Es posible introducir el carácter dinámico del problema considerando tantos grafos como instantes, conectados de manera apropiada para representar las posibles transiciones que se pueden dar lugar con el tránsito de los productos a lo largo de los poliductos. Para horizontes temporales superiores a un día no es posible encontrar la solución óptima debido a la complejidad introducida por la dimensión del problema. En vista de la imposibilidad de aplicar el

método anterior, los autores proponen un método heurístico estructurado en tres etapas. En primer lugar, se generan lo que denominan órdenes. Una orden es un paquete definido por el producto, la cantidad, el origen y el destino. En segundo lugar, se establecen rutas para cada una de las órdenes definidas en la etapa anterior, tratando de lograr que el número total de inversiones en el sentido de flujo de determinados tramos sea el menor posible. Y por último, se establece la secuencia de las órdenes, formulando el problema de una forma semejante a como se hace en la programación de un conjunto de órdenes en un conjunto de máquinas, donde en este caso, los poliductos quedan representados por las máquinas. Los autores describen cómo operan estas etapas de manera conceptual pero no detallan de forma precisa cómo se obtiene el resultado de cada una de ellas. Para el caso real estudiado, se resuelve el problema para un horizonte de 5 días, relajando las restricciones relativas a la satisfacción de la demanda, de manera que sólo se garantice la satisfacción de la demanda de los cuatro primeros días. De esta forma se obtiene una solución para los cuatro días primeros del horizonte, por lo que la empresa puede planificar los envíos del primer día a partir de tal solución. Si pasado un día se repite el procedimiento, se vuelve a obtener una planificación de envíos factible para los cuatro días siguientes, utilizándose el primero de ellos. La obtención de cada una de las planificaciones factibles para cuatro días, requiere un tiempo de computación de ocho horas. De esta manera es posible ir resolviendo el problema diario de la planificación de envíos e ir desplazando el horizonte de tal planificación a medida que dichas soluciones se van utilizando. Sin embargo, no es posible obtener una planificación para todo un mes, que es el horizonte que típicamente más interesante en este tipo de aplicaciones.

[CRTR90] estudia poliductos con varios terminales y ramificaciones. El objetivo en este caso no es programar los envíos a través del poliducto, sino obtener la forma de operación adecuada de los diferentes equipos de bombeo para minimizar el coste eléctrico respetando las fechas de entrega de los productos en cada una de los terminales. Para obtener dicha solución se dispone como dato de partida de la secuencia de productos (cantidad y destino) que se debe enviar desde cada una de las fuentes de la red. En este caso, los instantes en los que los paquetes entran en el poliducto y los instantes en los que salen del mismo dependen de qué equipos de bombeo operan y con qué potencia lo hacen a lo largo del horizonte temporal considerado. Los autores describen cómo representar de forma inequívoca el estado del poliducto en un determinado instante sabiendo tanto el volumen vertido como la configuración de los equipos de bombeo. El algoritmo empleado trata de hacer mínima una función con dos términos que dependen del tiempo empleado en bombear los paquetes. La metodología propuesta es de carácter iterativo. Partiendo del estado inicial, en cada iteración se obtiene una manera presumiblemente buena para llegar a

un determinado instante habiendo vertido un determinado volumen. A lo largo del procedimiento se introducen reglas de carácter heurístico que agilizan la búsqueda pero que no permiten tener la certeza de alcanzar el óptimo. La metodología ha sido aplicada con éxito en algunos poliductos en España.

Por último, conviene notar que todos los estudios que se han encontrado asumen la hipótesis de caudal constante. Es decir, independientemente de los productos que se encuentren en las tuberías del poliducto o de la configuración de equipos de bombeo, el caudal permanece constante. En determinados contextos esta hipótesis puede ser perfectamente admisible, sin embargo, en otros es muy poco realista. Se han presentado las investigaciones más relevantes relativas a problema de operación óptima de poliductos destinados al transporte de hidrocarburos. Existe una gama relativamente amplia de enfoques, que se diferencian básicamente por la naturaleza de las técnicas empleadas y por el tipo de simplificaciones que se asumen para tratar el problema. El problema de operación óptima de poliductos aún ofrece posibles líneas de avance, consistentes en eliminar las hipótesis introducidas para simplificar el problema, de manera que los modelos representen mejor los problemas de planteados sobre la operación de los poliductos existentes.

1.3 Transporte de gas natural

1.3.1 El gas natural

El gas natural es un combustible compuesto por un conjunto de hidrocarburos livianos, siendo el principal el metano (CH_4). Se puede encontrar como “gas natural asociado” cuando esta acompañando de petróleo, o bien como “gas natural no asociado” cuando son yacimientos exclusivos de gas natural. Los principales componentes del gas natural se muestran en la tabla 1.1, pudiéndose encontrar además otras impurezas como son el helio, oxígeno y vapor de agua. La tabla 1.2 muestra las propiedades del gas natural según la composición mostrada en la tabla 1.1. Las ventajas que ofrece el gas natural frente a otros tipos de energía o combustible se pueden resumir en los siguientes puntos:

- *Comodidad*: Al ser una energía de suministro continuo, está siempre disponible en la cantidad y en el momento que se le necesite.
- *Limpieza*: El gas natural es menos contaminante que los combustibles sólidos y líquidos. Por un lado, como cualquier otro combustible gaseoso, no genera

partículas sólidas en los gases tras la combustión, produce menos CO_2 (reduciendo así el efecto invernadero), menos impurezas, como por ejemplo azufre (disminuye la lluvia ácida), además de no generar humos. Por otro lado, es el más limpio de los combustibles gaseosos.

- *Seguridad*: El gas natural, a diferencia de otros gases combustibles, es más ligero que el aire, por lo que, de producirse alguna fuga, se disipa rápidamente en la atmósfera. Únicamente, se requiere tener buena ventilación.
- *Economía*: Es la energía de suministro continuo más barata.

Tabla 1.1: Componentes del gas natural.

Componente	Nomenclatura	Composición (%)	Estado natural
Metano	(CH_4)	95.08	Gas
Etano	(C_2H_6)	2.14	Gas
Propano	(C_3H_8)	0.29	Gas licuable (GLP)
Butano	(C_4H_{10})	0.11	Gas licuable (GLP)
Pentano	(C_5H_{12})	0.04	Líquido
Hexano	(C_6H_{14})	0.01	Líquido
Nitrógeno	(N_2)	1.94	Gas
Gas carbónico	(CO_2)	0.39	Gas

Tabla 1.2: Propiedades del gas natural.

Propiedad	Valor
Densidad relativa	0.65
Poder calorífico	9.03 kcal/m ³
Calor específico a presión constante (c_p)	8.57 cal/mol °C
Calor específico a volumen constante (c_v)	6.56 cal/mol °C

El proceso de producción del gas natural es simple y muy parecido al del petróleo. Primero, el gas natural se extrae por medio de perforaciones en pozos terrestres o en los océanos tras haber comprobado previamente mediante una etapa de exploración que el yacimiento es rentable. Tras su extracción, pasa a una planta de depurado y transformación en donde el gas es procesado para adaptarlo a las necesidades de consumo. Una vez procesado, éste es conducido hasta las zonas de almacenamiento, en donde el gas permanece como reserva que pueda suplir futuras fluctuaciones en la demanda, o hacia una red de distribución que transporta el gas hasta los consumidores finales. La figura 1.3 muestra un diagrama de flujo indicando el orden

en el que se suceden cada uno de los elementos de esta cadena en donde se ha remarcado la etapa de transporte mediante gasoductos por ser la tratada en esta tesis.

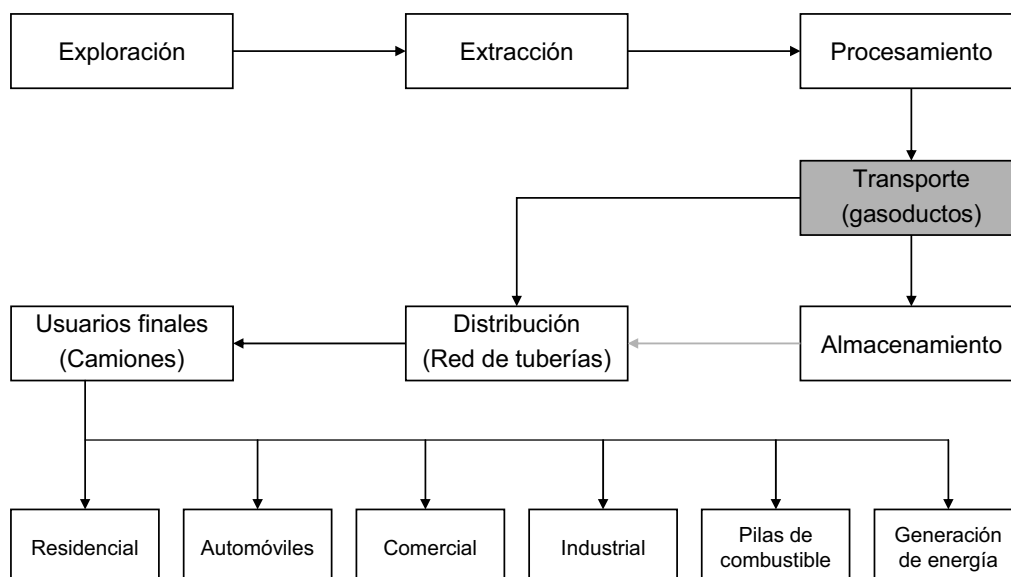


Figura 1.3: Cadena del gas natural.

La *exploración* es una etapa muy importante del proceso. En el transcurso de los primeros años de la industria del gas natural, cuando no se conocía muy bien el producto, los pozos se perforaban de manera intuitiva. Sin embargo, hoy en día, teniendo en cuenta los elevados costos de extracción, las compañías no pueden arriesgarse a hacer excavaciones en cualquier lugar. Los geólogos juegan un papel importante en la identificación de yacimientos de gas. Para encontrar un posible yacimiento, analizan la composición del suelo y la comparan a las muestras sacadas de otras zonas donde ya se ha encontrado gas natural. Posteriormente llevan a cabo análisis específicos, como el estudio de las formaciones de rocas a nivel del suelo donde se pudieron haber formado yacimientos de gas natural. Las técnicas de prospección han evolucionado a lo largo de los años para proporcionar valiosas informaciones sobre la posible existencia de depósitos de gas natural. Cuanto más precisas sean las técnicas, mayor será la posibilidad de descubrir gas durante una perforación.

Una vez comprobado que el yacimiento es rentable, se procede a la *extracción*. El gas natural se extrae cavando un hueco en la roca. La perforación puede efectuarse en tierra o en mar. El equipamiento que se emplea depende de la localización del yacimiento de gas y de la naturaleza de la roca. Si es una formación poco profunda se

puede utilizar perforación de cable. Mediante este sistema, una broca de metal pesado sube y baja repetidamente en la superficie de la tierra. Para prospecciones a mayor profundidad se necesitan plataformas de perforación rotativa. Este método es el más utilizado en la actualidad y consiste en una broca puntiaguda para perforar a través de las capas de tierra y roca. Una vez que se ha encontrado el gas natural, debe ser extraído de forma eficiente. La tasa de recuperación más eficiente representa la máxima cantidad de gas natural que puede ser extraída en un período de tiempo dado sin dañar la formación. Varias pruebas deben ser efectuadas en esta etapa del proceso. Lo más común, es que el gas natural esté bajo presión y salga de un pozo sin intervención externa. Sin embargo, a veces es necesario utilizar bombas u otros métodos más complicados para obtener el gas de la tierra. El método de elevación más difundido es el bombeo de barra.

La siguiente etapa es el *procesamiento* para adaptar el gas a unas condiciones que lo hagan apto para el consumo. El gas natural, tal y como existe bajo tierra, no se encuentra en las mismas condiciones que cuando se distribuye a través de gasoductos hasta los consumidores finales. Tal y como se consume, está compuesto en su casi totalidad de metano, sin embargo, tal y como se encuentra en los depósitos naturales, puede estar mezclado con otros componentes tales como el petróleo y el agua, los cuales deben ser eliminados. El procesado del gas natural se lleva a cabo mediante el reagrupamiento, acondicionamiento y refinado del gas natural bruto con el fin de transformarlo en energía útil para las diferentes aplicaciones. Este proceso supone primero una extracción de los elementos líquidos del gas natural y después una separación entre los diferentes elementos que componen los líquidos. Mediante el proceso de separación se obtiene gas natural seco (metano y etano) que se transporta por gasoductos a los centros de consumo, líquidos de gas natural (propano, butano, pentano y más pesados) que se transporta por poliductos hasta una planta de fraccionamiento, y otros componentes como el agua, azufre y otras impurezas sin valor comercial. El proceso de fraccionamiento es un proceso que consiste en separar los líquidos de gas natural, en gas natural licuado (GNL) y gasolina natural.

Una vez tratado, el gas natural pasa a un sistema de transmisión para llevar a cabo el **transporte** hacia la zona donde será utilizado. El transporte puede ser por vía terrestre, a través de gasoductos que generalmente son de acero y miden entre 50 y 110 centímetros de diámetro. Debido a que el gas natural se mueve a altas presiones, existen estaciones de compresión a lo largo de los gasoductos para mantener el nivel necesario de presión. Comparado a otras fuentes de energía, el transporte de gas natural es muy eficiente si se considera la pequeña proporción de energía perdida entre el origen y el destino. Los gasoductos son uno de los métodos más seguros de

distribución de energía pues el sistema es fijo y subterráneo. El gas natural puede también ser transportado por mar en buques. En este caso, es transformado en GNL. El proceso de licuado permite retirar el oxígeno, el dióxido de carbono, los componentes de azufre y el agua. Los elementos principales de este proceso son una planta de licuado, barcos de transporte de baja temperatura y presurizados y terminales de regasificación. La investigación desarrollada en la segunda parte de la tesis se centra en el transporte mediante gasoductos, por lo que dicha etapa será analizada con mayor nivel de detalle en la sección siguiente.

Antes de llegar al consumidor, el gas natural puede ser *almacenado* en depósitos subterráneos desde los que poder hacer frente las variaciones de la demanda que tienen lugar a lo largo de las diferentes estaciones del año. Estos depósitos están generalmente situados cerca de los mercados consumidores de tal forma que las empresas de distribución de gas natural pueden responder a los picos de la demanda y proporcionar el gas a sus clientes de forma continua y sin demora. Además, durante los períodos de poca actividad, las empresas de distribución pueden vender el gas natural en el mercado.

La *distribución* es el paso final en la entrega del gas a los usuarios finales. Mientras que los grandes consumidores industriales, comerciales, o los dedicados a la generación de electricidad reciben el gas directamente de las redes de alta capacidad, los usuarios residenciales lo hacen desde las redes propiedad de las compañías de distribución local.

1.3.2 Sistemas de transporte mediante gasoductos

El movimiento efectivo del gas desde las zonas de producción a las regiones de consumo requiere un extenso y elaborado sistema de transporte. En muchos casos, el gas natural producido en un determinado pozo deberá viajar una gran distancia hasta alcanzar el destino de consumo. Los sistemas de transporte de gas natural están compuestos de una compleja red de gasoductos, diseñada para transportar el gas de forma efectiva desde su origen hasta las áreas de alta demanda. El transporte de gas natural está íntimamente relacionado con su almacenamiento. Por ejemplo, el gas transportado en un determinado instante podría no ser requerido en el destino en dicho instante, debiendo por tanto ser almacenado temporalmente para su posterior utilización.

Esencialmente se pueden encontrar tres grupos de gasoductos a lo largo de la ruta de transporte: el sistema de recolección, los gasoductos interestatales y el sistema de

distribución. El sistema de recolección consiste en gasoductos de pequeño diámetro que operan a bajas presiones para transportar el gas crudo desde la cabeza del pozo de donde es extraído hasta la planta de procesamiento. Los gasoductos interestatales transportan el gas recorriendo grandes distancias desde una región a otra, y llegando en algunos casos a atravesar región entera. Los sistemas de distribución, por el contrario, están compuestos por redes de gasoductos operando dentro de una misma región sobre la que realizan la distribución a los consumidores finales. Este apartado cubre los fundamentos de las redes de gasoductos interestatales (que a partir de ahora pasaran a denominarse simplemente redes de gasoductos), pero los detalles técnicos y operacionales discutidos para dicho tipo de gasoductos son también aplicables a los sistemas de distribución.

Las redes de gasoductos transportan el gas natural desde las plantas de procesamiento en las áreas de producción hasta las zonas en las que hay una gran demanda de gas. Tal y como se ve en la figura 1.4, dichas redes se extienden a través de todo el país transportando el gas a altas presiones, que van desde los 15 hasta los 105bar. De esta forma el volumen del gas transportado es reducido unas 600 veces, a la vez que se le proporciona la suficiente fuerza propulsora como para moverlo a través del gasoducto. A continuación se enumeran cada uno de los elementos que componen dichas redes.



Figura 1.4: Red de gasoductos interestatales.

Los *gasoductos* son el principal elemento de la redes de transporte de gas. Suelen tener entre 15.24 y 122.92 centímetros de diámetro, aunque algunas secciones de los mismos pueden contener diámetros inferiores y tan pequeños como 1.27 centímetros. Sin embargo, estos diámetros tan pequeños tan solo suelen utilizarse en los sistemas

de recolección y distribución. Los gasoductos de inyección, los gasoductos principales del sistema, suelen tener un diámetro que oscila entre los 40.64 y los 121.92 centímetros. Los gasoductos laterales, que entregan en gas a o desde los gasoductos principales, suelen tener entre 15.24 y 40.64 centímetros de diámetro. Pero la mayoría de los gasoductos pertenecientes a las redes de gasoductos suelen tener un diámetros entre 60.96 y 91.44 centímetros.



Figura 1.5: Gasoducto.

Los gasoductos suelen producirse en fábricas de acero, las cuales a veces se especializan en la fabricación de los mismos únicamente. Existen dos tipos de técnicas de producción, una para gasoductos de bajo diámetro y otra para los de diámetro mayor. Los gasoductos de gran diámetro son fabricados a partir de láminas de metal plegadas con forma de tubo, con los extremos soldados para formar el segmento de gasoducto. Los de bajo diámetro, por otro lado, son fabricados mediante el calentamiento de una barra de metal a altas temperaturas y perforando un agujero a través del eje de la misma. En ambos casos, el gasoducto es sometido a unos controles para asegurar que es capaz de soportar las presiones y tensiones estándar para el transporte de gas. Cada segmento del gasoducto es además cubierto mediante un revestimiento especial para asegurar su aguante ante la corrosión debida a la humedad cuando sea situado bajo tierra. Existen varias técnicas de revestimiento. Antiguamente se solía utilizar un revestimiento especial de esmalte de alquitrán, pero hoy en día, los gasoductos son revestidos mediante lo que se conoce como fusión epoxy, dando al gasoducto un color azul claro. Además, a menudo suele utilizarse una protección catódica, consistente en hacer pasar una corriente eléctrica a través del gasoducto para eliminar la corrosión y el óxido.

Tal y como se mencionó en la introducción, el gas natural viaja a altas presiones. Para asegurar que el gas se mantiene fluyendo por el gasoducto a altas presiones, es necesario reestablecer periódicamente las pérdidas de presión mediante una compresión del mismo. De esta tarea se ocupan las *estaciones de compresión*

instaladas a lo largo de la red cada 60–160 kilómetros. Una vez entra en la estación de compresión, el gas es comprimido mediante una turbina o un motor. Los compresores que utilizan turbinas se alimentan de una pequeña porción del gas a comprimir para funcionar. La turbina hace funcionar a su vez un compresor centrífugo, que contiene unos rotores que comprimen e impulsan el gas hacia el siguiente segmento de gasoducto. Algunas estaciones de compresión operan utilizando motores eléctricos para hacer funcionar dichos compresores centrífugos, y por tanto, no necesitan tomar una parte del gas transportado para poner en funcionamiento el compresor. Sin embargo, dichos motores requieren una fuente fiable de electricidad cercana. Los compresores centrífugos son otra alternativa utilizada en las estaciones de compresión. Estos son similares a los grandes motores utilizados en automoción, y son puestos en funcionamiento también tomando una fracción del gas transportado por la red. La combustión del gas impulsa los pistones que ayudan a comprimir el gas.



Figura 1.6: Estación de compresión.

Además de comprimir el gas, las estaciones de compresión utilizan también un cierto tipo de separador líquido como el utilizado para deshidratar el gas en su procesamiento. Generalmente, estos separadores consisten en depuradores y los filtros que capturan cualquier líquido u otras partículas indeseables que se producen en el gas cuando viaja a través del gasoducto. Aunque el gas natural dentro de dichos gasoductos se considera gas “seco”, a veces se produce cierta cantidad de agua e hidrocarburos condensados. Los separadores líquidos en las estaciones de compresión se aseguran de que el gas natural en la tubería sea tan puro como sea posible, y filtran generalmente el gas antes de la compresión.

Además de las estaciones de compresión, existen *estaciones de medición* situadas también periódicamente a lo largo de la red de gasoductos. Estas estaciones permiten que las compañías propietarias de la red supervisen y manejen el gas natural en la

misma. Esencialmente, estas estaciones de medición miden el flujo del gas a lo largo del gasoducto, y permiten que las compañías propietarias del gasoducto “sigan” el gas mientras fluye a lo largo de la red. Dichas estaciones emplean unos aparatos especializados para llevar a cabo las mediciones necesarias sobre el gas sin impedir su movimiento.

Las redes de gasoductos incluyen una gran cantidad de *válvulas* a lo largo de su ruta colocadas cada 8–33 kilómetros a lo largo de cada uno de los gasoductos de la red. Estas válvulas funcionan como vías de acceso estando generalmente abiertas y permitiendo que el gas fluya libremente, o pueden ser utilizadas para parar flujo del gas a lo largo de cierta sección de un gasoducto. Hay muchas razones por las que un gasoducto pueda necesitar restringir flujo del gas en ciertas áreas. Por ejemplo, si una sección del mismo requiere el reemplazo o el mantenimiento, las válvulas en cualquier extremo de esa sección se pueden cerrar para permitir a los ingenieros trabajar de forma segura.



Figura 1.7: Válvula terrestre.

Las compañías encargadas del transporte del gas natural tienen clientes en ambos extremos de la red. Por un lado están los productores y los procesadores que inyectan el gas en la red, y por otro las compañías locales que toman el gas de la red y se encargan de la distribución final. Para controlar el gas que entra en la red, y asegurarse de que todos los clientes reciben a tiempo la cantidad de gas demandada, son necesarios sofisticados sistemas de control para supervisar el gas mientras viaja a través de la red. Por ello, dichas compañías encargadas del transporte disponen de estaciones de control centralizadas, que recogen, asimilan, y manejan los datos recibidos desde las estaciones de medición y compresión situadas a lo largo de toda la red. La mayor parte de los datos que son recibidos por una estación de control son proporcionados por los sistemas de Control Supervisado y Adquisición de Datos

(SCADA, de Supervisory Control and Data Acquisition en inglés). Estos sistemas son sofisticados sistemas de comunicaciones que toman medidas y recogen datos a lo largo de la red (generalmente desde las estaciones de medición, de compresión y las válvulas) y los transmiten a la estación de control centralizada. El caudal a través de cada gasoducto junto con su estado operacional y la presión y temperatura del gas en su interior se pueden utilizar para determinar el estado del mismo a cualquier momento.



Figura 1.8: Estación de control.

Estos sistemas también trabajan en el tiempo real, por lo que tan solo hay un pequeño tiempo de retraso entre las medidas tomadas a lo largo de la red y su transmisión a la estación de control. Esta información, retransmitida a una estación de control centralizada, permite que los ingenieros de la red sepan exactamente qué está sucediendo en todo momento a lo largo de la misma. Esto permite reacciones rápidas a los malfuncionamientos del equipo, a los escapes de gas, o a cualquier otra actividad inusual a lo largo de la red. Los sistemas SCADA también incorporan la capacidad de funcionar remotamente sobre cualquier equipo situado a lo largo de la red, incluyendo las estaciones de compresión, y permitiendo por tanto a los ingenieros ajustar inmediata y fácilmente los índices de corriente en cada gasoducto de la misma desde el centro de control centralizado.

1.3.3 Revisión bibliográfica

A continuación se muestra un resumen de los diferentes enfoques existentes en la literatura para la operación óptima de redes de gasoductos:

En [BCH61] se dieron una serie de reglas heurísticas sobre como operar en la transmisión del gas. Desde entonces no se han hecho muchos estudios dada la complejidad del tema. El control del flujo a través de los gasoductos se realiza de

forma no automática. Los operadores de la red, basándose en la experiencia y en resultados de simulación, modifican el flujo y la presión con la que las distintas fuentes suministran el gas a la red, así como el número de compresores que se pone en funcionamiento en cada estación de compresión y los puntos de consigna de estos, para conseguir los objetivos deseados, siendo el principal el suministrar el gas deseado a la presión apropiada y dentro de unos límites de stock [UCT00]. Como objetivo secundario se suele marcar el minimizar la energía necesaria (gasto de las estaciones de compresión) para llevar a cabo dicha tarea. Los aspectos que aconsejan el uso de control on-line, son la presencia de perturbaciones externas, pequeño número de medidas, pobre conocimiento de los estados del sistema [MM88] y demandas que fluctúan con el tiempo y son difíciles de predecir. Datos que muestran su gran variabilidad pueden encontrarse en [UCT00]. A ello se añade la conveniencia de tener sistemas de control capaces de minimizar el consumo de energía a la vez que mantengan al sistema en una región “segura” o una región alejada de aquellas zonas en las que una demanda futura en unas determinadas condiciones no pudiera ser alcanzada.

En 1968 Wong y Larson publican en [WL68] lo que se considera como el primer intento coherente de dar unas reglas de cómo operar sobre un compresor ubicado en un segmento de gasoducto para minimizar su consumo de energía cuando debe suministrar una demanda de gas especificada y variable con el tiempo, a la vez que la presión del gas en el punto de entrega se mantiene por encima de un determinado valor mínimo especificado en el proceso. Utilizaron programación dinámica para obtener soluciones off-line y establecer lo que ellos consideraban un criterio general de funcionamiento, pero no indicaban el modo de conseguirlo. Además utilizaron aproximaciones en diferencias finitas de las ecuaciones en derivadas parciales para modelar el flujo a través de la red.

Aunque hubo otros intentos en años posteriores, no se produjo un avance considerable en la forma de abordar el problema hasta 1988 con el artículo de Marqués y Morari [MM88]. En este trabajo se puede encontrar una revisión de otros trabajos sobre el tema, tras cuyo análisis los autores concluyen que “no se ha conseguido ningún sistema de control automático exitoso que tenga como variable manipulada a la presión de descarga de los compresores”. En su trabajo Marques y Morari utilizan un simulador dinámico de la red, basado en un método de diferencias finitas, para predecir el comportamiento de la red, y un método de optimización cuadrático para determinar la presión de descarga “óptima” de los compresores de modo que se minimice la energía que se aporta al gas a la vez que se cumplen todas las restricciones de la red. Dado que se utiliza un modelo simulado para predecir el

comportamiento del sistema, el control se puede enclavar dentro de los controladores predictivos. Para obtener su solución hacen las siguientes hipótesis: se dispone de datos sobre las futuras variaciones del flujo de carga o de demanda, aunque estas aproximaciones sean muy burdas; suponen que las fuentes proporcionan el gas a unas presiones constantes; además suponen que los compresores son idénticos entre si y trabajan en paralelo con una eficiencia óptima; y finalmente, al igual que en trabajos anteriores, aproximan la región de funcionamiento de los compresores, que es fuertemente no lineal, por una región descrita por restricciones lineales de modo que se pasa de tener una región no convexa a una región convexa.

En [SK95] se formula un controlador H_∞ lineal para una red de distribución de gas muy sencilla descrita por ecuaciones diferenciales ordinarias que se obtienen discretizando un modelo en derivadas parciales. Un modelo más completo y realista en la descripción del sistema se aborda en [WRBS00]. Los autores tratan el problema de minimizar el coste del combustible consumido por el funcionamiento de las estaciones de compresión de la red de distribución en condiciones de estado estacionario. En el artículo se presenta un modelo matemático del sistema en el que se incluyen nodos, gasoductos y estaciones de compresión solamente. Además se incluyen variables de tipo entero para modelar el funcionamiento o no de los compresores, así como la reversibilidad de los gasoductos de la red. Las variables de decisión son las caídas de presión en los nodos, los flujos a través de cada gasoducto de la red y el número de unidades que opera en cada estación de compresión. Aplicando relajaciones tanto en el dominio de los compresores como en la función de coste, consiguen establecer límites inferiores a solución óptima, sin embargo, como indican los autores, el método no resulta adecuado para la optimización de redes de grandes dimensiones.

En [UCT00] se explica un sistema experto para ayudar en la toma de decisiones sobre las operaciones que deben llevarse a cabo sobre los elementos de las redes de gas natural de modo que se satisfagan las demandas de los consumidores con el mínimo coste de operación. El sistema se utiliza como ayuda, pero sin estar totalmente integrado, en parte de la red de una compañía Canadiense de distribución de gas. El sistema informa sobre si se debe aumentar o disminuir la presión en la red, y sobre la potencia necesaria en las estaciones de compresión para cumplir la demanda de los consumidores.

En [ZHM01] se diseña un controlador predictivo para una red de distribución de gas simulada. El sistema corresponde a un sistema real de distribución de gases purificados a industrias desde plantas criogénicas. Utilizan un modelo lineal reducido obtenido a partir de las ecuaciones en derivadas parciales. Como variables de decisión

utilizan la producción de las plantas y como variables manipuladas las presiones en determinados puntos críticos de la red.

Por otra parte en [TT98] se establece una analogía entre un gasoducto por el que circula gas y una red eléctrica a partir de la cual se puede describir el comportamiento del gas en estado transitorio en el interior del gasoducto por ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden. Los resultados obtenidos mediante este método son equiparables a los obtenidos por la resolución aproximada de las ecuaciones en derivadas parciales, y computacionalmente es más eficiente, por lo que el método es susceptible de ser utilizado en el control de las redes de distribución.

Como se desprende de la revisión bibliográfica expuesta, los trabajos han ido dirigidos al control de las estaciones de compresión, sin embargo hay otros elementos susceptibles de ser controlados para el correcto funcionamiento de la red [CRLSR01], tales como la presión de descarga y flujos de salida de algunas de las fuentes.

1.4. Organización y objetivo de la tesis

En este *Capítulo* se han establecido las bases de la investigación desarrollada a lo largo de la tesis. Para ello, se han presentado los aspectos básicos de la cadena que sigue tanto el gas natural como el petróleo y sus derivados desde su extracción hasta su consumo final. En dicha revisión se ha prestado especial atención a la etapa de distribución por poliductos en el caso de los derivados del petróleo, y a la etapa de transporte por gasoductos para el caso del gas natural, por ser dichas etapas el centro de la investigación desarrollada en esta tesis. Además, se ha recopilado el estado del arte en la materia, tanto para la parte logística en la distribución por poliducto como para el control de presiones en el transporte por gasoducto, mostrando los aspectos en los que se puede mejorar cada uno de dichos procesos.

A continuación, se muestra la estructura que sigue la tesis en el resto de los capítulos. Esencialmente, la tesis está compuesta por dos partes diferenciadas. Los *Capítulos 2, 3 y 4* corresponden a la etapa de distribución de los derivados del petróleo mediante redes de poliductos, centrandó la investigación en el desarrollo de los modelos matemáticos que conciernen a dicho proceso y de los algoritmos necesarios para obtener la planificación óptima del modo de operación. Los *Capítulos 5, 6 y 7* corresponden a la etapa de transporte del gas mediante redes de gasoductos, centrandó la investigación en el desarrollo de sistemas de control on-line capaces de generar las consignas de presión necesarias para que el gas llegue a su destino en condiciones

óptimas. Una breve descripción de cada uno de los capítulos que componen la tesis junto con los objetivos perseguidos en cada caso es la siguiente:

El *Capítulo 2* se encarga de establecer los modelos matemáticos que permitan optimizar la estrategia de funcionamiento de redes de distribución de derivados del petróleo. En primer lugar se hace un repaso del modo en el que operan dichas redes de distribución, adoptándose un modelo diferente (continuo o discreto) dependiendo de la topología de la red considerada. A continuación se presenta el modelo que describe el funcionamiento de una red formada por un único poliducto, correspondiente al modelo continuo. Dicho modelo es una extensión de los ya existentes en la literatura, permitiendo planificar tanto el envío de producto para satisfacer la demanda a lo largo de varios periodos, como los instantes en los que producir los diferentes productos en la refinería. Finalmente, se desarrolla el modelo discreto aplicable a redes de poliductos. Dicho modelo es un modelo nuevo que permite planificar la distribución de los diferentes productos a través de una red de poliductos con nodos intermedios dotados de capacidad de bifurcar el producto a su llegada o de almacenarlo temporalmente. Así, **los objetivos perseguidos en el Capítulo 2** son:

- Presentar el modo en el que operan las redes de distribución de derivados del petróleo, extendiendo los modelos ya existentes a modelos que permitan obtener la planificación óptima a lo largo de varios periodos e integren la planificación de la producción como parte del proceso de decisión.
- Generar un nuevo modelo para la planificación óptima de redes de poliductos compuestas por fuentes desde las que tomar el producto, consumidores finales con especificación de la demanda y nodos intermedios con capacidad de redistribuir el producto, o almacenarlo temporalmente para su posterior envío.

En el *Capítulo 3* se utilizan los modelos desarrollados en el *Capítulo 2* para resolver algunos ejemplos de aplicación tanto del modelo continuo como del discreto. Además se muestran unas herramientas desarrolladas en MATLAB para visualizar el modo de operación del sistema correspondiente a las soluciones obtenidas. Todos los ejemplos son resueltos mediante el resolutor comercial CPLEX. Los ejemplos referentes al modelo continuo demuestran su eficiencia a la hora de resolver ciertos problemas presentes en la literatura reduciendo los costes conseguidos hasta el momento. En cuanto al modelo discreto, se demuestra su utilidad a través de tres ejemplos de aplicación. Dos de ellos correspondientes a una red de tamaño medio y un tercero a una red de gran escala que incluye poliductos bidireccionales. Así, **los objetivos perseguidos en el Capítulo 3** son:

- Implementar los modelos desarrollados mediante un lenguaje de modelado como OPL y utilizarlos para resolver algunos ejemplos de aplicación mediante la herramienta comercial CPLEX.
- Desarrollar una herramienta en MATLAB con la que visualizar y validar el funcionamiento del sistema cuando es operado en base a las soluciones obtenidas tras el proceso de optimización, tanto para el modelo continuo como para el discreto.

En el caso del modelo continuo, cuando el número de periodos a lo largo de los que planificar el funcionamiento del sistema es superior a 3, el número de variables binarias en el modelo se hace demasiado grande como para seguir utilizando métodos clásicos. En el caso del modelo discreto, dada la naturaleza combinatoria del tipo de problemas tratados, los métodos clásicos tan solo son capaces de resolver de forma eficiente pequeños ejemplos. Por ello, se desarrollan en el *Capítulo 4* alternativas basadas en métodos heurísticos y su hibridación con métodos clásicos que ayuden a resolver el problema de forma eficiente. Los algoritmos desarrollados son evaluados en varios ejemplos de aplicación mostrando su eficiencia a la hora de resolver este tipo de problemas. Así, **los objetivos perseguidos en el Capítulo 4** son:

- Desarrollar varios algoritmos basados en metaheurísticas de búsqueda para resolver los modelos con los que obtener la planificación óptima en redes de poliductos y evaluar su eficiencia en un caso concreto.
- Desarrollar varios algoritmos basados en metaheurísticas de evolución para resolver los modelos con los que obtener la planificación óptima en redes de poliductos y evaluar su eficiencia en un caso concreto.
- Paralelizar las mejores versiones de metaheurísticas de búsqueda y evolución encontradas y evaluar su eficacia comparando su convergencia con la del resolutor comercial CPLEX a la hora de resolver un caso concreto.

En el *Capítulo 5* se modela la dinámica del flujo de gas en el interior de un gasoducto de sección circular constante inclinado, obteniéndose unos modelos simplificados que permiten su resolución numérica en un computador. También se desarrollan los esquemas numéricos para la integración de dichos modelos en un computador. Además se modela el funcionamiento de las estaciones de compresión, ya que son el otro elemento central en las redes de transporte de gas. Finalmente, se hace una breve mención de los demás elementos que se pueden encontrar en este tipo de redes. Así, **los objetivos perseguidos en el Capítulo 5** son:

- Modelar la dinámica de del flujo de gas en el interior de un gasoducto de sección circular constante inclinado y extraer unos modelos simplificados manejables.
- Desarrollar los esquemas numéricos que permitan la integración de tales modelos simplificados en un computador.
- Modelar el funcionamiento de las estaciones de compresión a partir de los datos experimentales que se poseen.

A partir de los modelos desarrollados en el *Capítulo 5*, se implementa en el *Capítulo 6* una librería en MATLAB–Simulink mediante la que poder simular el comportamiento de cada uno de los elementos que forma una red de distribución de gas. Con dicha librería se pueden construir distintos sistemas experimentales sobre los que probar las estrategias de control desarrolladas en el *Capítulo 7*. Se muestran algunos ejemplos de aplicación en el uso de tal librería, y a continuación, ésta es utilizada para identificar de manera experimental los parámetros del modelo en variables de estado en tiempo discreto utilizado como modelo de predicción en los controladores que se desarrollarán en el *Capítulo 7*. Así, **los objetivos perseguidos en el Capítulo 6** son:

- Implementar la dinámica de cada uno de los elementos de la red en un lenguaje de modelado y simulación como MATLAB–Simulink construyendo una librería de componentes, y mostrar su utilidad mediante la resolución de varios ejemplos de aplicación.
- Mostrar el proceso de identificación de los parámetros de un modelo en variables de estado en tiempo discreto para los gasoductos de la red. Dicho modelo será el modelo de predicción utilizado por los controladores predictivos desarrollados en el *Capítulo 7*.

En el *Capítulo 7* se estudian diferentes algoritmos para controlar la presión del gas en el interior del gasoducto. Las estrategias de control desarrolladas se enmarcan dentro del Control Predictivo Basado en Modelos. Se comienza por formular el problema de optimización equivalente al de control, y a continuación se muestra el algoritmo utilizado para resolverlo, basado en la técnica de Punto Interior. Posteriormente, se ve el control en lazo abierto que resulta de la utilización de un horizonte fijo. A continuación se implementa el control en lazo cerrado, que resulta de la resolución de manera consecutiva de los diferentes problemas de control que se van planteando al desplazar el horizonte de control. Finalmente, se introduce la parte entera del modelo, consecuencia de la utilización de elementos discretos, y se

desarrollan y evalúan los algoritmos propuestos para el control de tales sistemas híbridos. Dichos algoritmos se basan en la hibridación de técnicas tanto clásicas como heurísticas para acelerar la convergencia de los mismos en la búsqueda de soluciones. Así, **los objetivos perseguidos en el Capítulo 7** son:

- Establecer la formulación del modelo de optimización equivalente al problema de control que se desea sobre dicho sistema, que permita controlar el sistema resolviendo el problema de optimización equivalente.
- Implementar los algoritmos de optimización basados en la técnica de Punto Interior dentro de un esquema de horizonte deslizante para llevar a cabo el control en lazo cerrado de la parte continua del sistema.
- Introducir la parte entera del sistema, consecuencia de la parte discreta del mismo, y desarrollar e implementar algoritmos eficientes, basados en la hibridación de técnicas clásicas y heurísticas, para llevar a cabo el control del sistema completo que incluye estados continuos y discretos.

Finalmente, el *Capítulo 8* muestra las conclusiones del trabajo realizado a lo largo de la tesis así como las futuras líneas de investigación en torno al mismo. Además, se han incluido al final de la tesis un par de Apéndices:

El *Apéndice A* titulado “*Resolución numérica de EDPs en Dinámica de Fluidos*” trata las principales propiedades matemáticas de las ecuaciones que rigen la dinámica del sistema modelado en el *Capítulo 5*, así como los aspectos a considerar cuando se pretende resolver dicho modelo en un computador tal y como se muestra en el *Capítulo 6*. Una **breve descripción del Apéndice A** es la siguiente:

- La solución analítica de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales (EDPs) implica expresiones compactas las cuales proporcionan la variación continua de las variables dependientes a través todo el dominio en el que éstas están definidas. En contraste, la solución numérica puede proporcionar respuesta solamente en puntos discretos de dicho dominio, llamados puntos malla, y cuyo espaciado suele ser uniforme, aunque no tiene porqué. La resolución numérica de las ecuaciones es más precisa cuanto menor sea dicho espaciado, pero en contrapartida aumentan los requisitos computacionales.

El *Apéndice B* titulado “*Métodos de Punto Interior aplicados a la Optimización*” muestra una introducción al método de Punto Interior utilizado como núcleo de los

controladores predictivos desarrollados en el *Capítulo 7*. Una **breve descripción del Apéndice B** es la siguiente:

- Los métodos de Punto Interior parten de una aproximación fundamentalmente diferente a la de la que parte el método Simplex para la programación lineal. El método Simplex generalmente se mueve en cada iteración sobre los vértices del politopo generado por las restricciones del problema y normalmente mejorando el valor de la función objetivo en cada paso. Eventualmente, el método alcanza un vértice en el que ya no es posible mejorar el valor de la función objetivo, y que por tanto debe tomarse como la solución del problema lineal.

Capítulo II

Modelado de sistemas de distribución de derivados del petróleo

Las redes de poliductos proporcionan una manera económica para transportar grandes cantidades de varios productos derivados del petróleo a lo largo de grandes distancias. En este tipo de sistemas los diferentes productos son enviados a través del mismo poliducto sin ningún dispositivo de separación entre ambos. La secuencia y tamaño de cada nueva inyección de producto deben ser cuidadosamente seleccionados para satisfacer la demanda a la vez que se minimiza el coste total de la operación teniendo en cuenta además todas las restricciones físicas presentes en el sistema. Este *Capítulo* se encarga de establecer los modelos matemáticos que permitan optimizar la estrategia de funcionamiento de tales redes de distribución de derivados del petróleo. En primer lugar se hace un repaso del modo en el que operan dichas redes, haciendo una distinción entre las que lo hacen de modo continuo y las que operan en modo discreto. A continuación se presenta el modelado matemático que describe el funcionamiento de un único poliducto conectado a una refinería y varios depósitos terminales, correspondiente a la parte continua. Dicho modelo es la extensión del propuesto por [CC04], donde sólo se considera un único periodo de planificación, y la planificación de la producción no forma parte del proceso de decisión. Finalmente, se desarrolla un nuevo modelo discreto aplicable a redes de poliductos. Dicho modelo permite una planificación óptima para el transporte de paquetes de distinto producto a través de una red de poliductos.

Los objetivos de este capítulo son:

- Presentar el modo en el que operan las redes de distribución de derivados del petróleo.
- Establecer el modelo matemático que describe el funcionamiento de un poliducto operando de forma continua.
- Establecer el modelo matemático que describe el funcionamiento de una red de poliductos operando de forma discreta.

2.1 Logística en la distribución de derivados del petróleo

2.1.1 Planteamiento del problema

Las redes de conductos constituyen un medio adecuado para el transporte de hidrocarburos y productos derivados del petróleo. Aunque la inversión inicial requerida para su construcción e instalación es alta, los costes de operación son mucho menores comparados con los que presentan otros medios de transporte como el transporte por carretera, trenes de mercancías, etc... El transporte por redes de conductos presenta unas menores pérdidas a la vez que una mayor fiabilidad. Por tanto, para localizaciones en donde tan solo se requiera una fuente de petróleo estática, las redes de conductos proporcionan un medio de transporte bastante atractivo. Las redes de conductos están presentes en diferentes grados de complejidad. La red más simple está compuesta por una única fuente, un único destino y un único producto a bombear. Este tipo de redes se denominan oleoductos. La planificación de la operación de oleoductos es una tarea relativamente sencilla [Sas97]. Este tipo de redes suelen ser utilizadas para el transporte de crudo desde puertos costeros hasta refinerías ubicadas en el interior. En el siguiente nivel de complejidad, se encuentran las redes con múltiples destinos. Una red más realista debería además ser capaz de distribuir diferentes productos de forma simultánea. Este tipo de redes se denominan poliductos.

A diferencia de los oleoductos convencionales, que transportan solo petróleo crudo, los poliductos transportan una gran variedad de combustibles procesados en las refinerías: keroseno, naftas, gas oil, etc... El transporte se realiza en paquetes sucesivos tal y como se muestra en la figura 2.1.

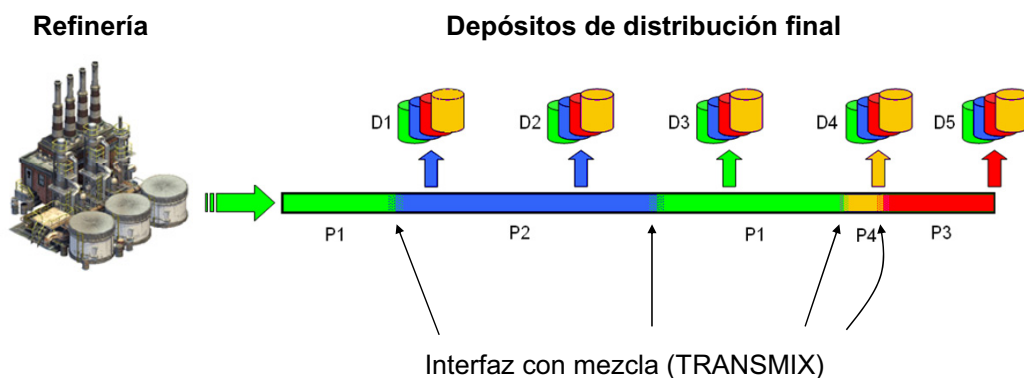


Figura 2.1: Configuración típica de la operación de un poliducto.

Un paquete es una cantidad variable del mismo tipo de producto ubicado a lo largo de un poliducto. Un poliducto largo puede contener cuatro o cinco productos diferentes a lo largo de su recorrido. Los puntos de entrada de productos o fuentes de suministro a los poliductos suelen ser directamente las refinerías o bien puertos de descarga de barcos procedentes de refinerías. Los puntos de entrega son terminales de recepción o estaciones intermedias ubicadas a lo largo de la ruta y que disponen de tanques de almacenamiento. Puesto que no existe ningún dispositivo de separación entre los paquetes con productos diferentes bombeados de forma consecutiva, se genera una mezcla de producto en la región de contacto entre ambos. A condición de que se cumplan ciertas restricciones entre la ordenación de paquetes, el nivel de dicha mezcla tan solo afecta a una mínima fracción de los paquetes involucrados. Dicha fracción suele enviarse de nuevo a la refinería para ser recuperada como producto de menor calidad. El principal problema que se presenta en este tipo de sistemas es la determinación de las secuencias óptimas, duración e instantes de bombeo de los diferentes productos desde la refinería al poliducto, junto con la secuencia de transferencia de producto desde el poliducto a los diferentes depósitos ubicados a lo largo de la ruta. La complejidad de dicho proceso de optimización surge como consecuencia de diferentes aspectos operacionales del sistema:

- Existen secuencias de producto prohibidas.
- El grado de mezcla entre productos diferentes depende de los productos involucrados.
- El bombeo de producto debe tener en cuenta la disponibilidad del mismo en la refinería y el consumo en los depósitos de las estaciones de distribución final.
- Tanto el tamaño de cada paquete está limitado.
- La cantidad de producto que puede almacenarse en los tanques de cada uno de los nodos de la red también está limitada.

Los poliductos de una determinada área geográfica (región, país, etc...) están interconectados entre sí formando redes de poliductos. Para impulsar los productos existen bombas repartidas estratégicamente a lo largo de la red. Desde un punto de vista operativo una red de poliductos está constituida por una serie de nodos con capacidad de almacenamiento, y una serie de poliductos conectando los nodos de la red. La mayoría de las conexiones son unidireccionales, pero por motivos de flexibilidad operativa también pueden existir conexiones bidireccionales. La topología de las redes puede ser muy variada, dependiendo de la actividad petrolífera y

condiciones geográficas de la región. En general, los nodos de la red tienen capacidad de suministro, almacenamiento y recepción de productos [CAHPB03]. Normalmente, los productos son tomados de refinerías, puertos o estaciones de almacenamiento, y son transportados hasta las estaciones de distribución ubicadas en cada región, desde las cuales tiene lugar el transporte final sobre la región correspondiente mediante camiones. La figura 2.2 muestra el tipo de sistema considerado. Aquí solamente se está considerando el transporte desde las fuentes (refinerías, puertos o estaciones de almacenamiento) hasta los depósitos de distribución final.



Figura 2.2: Red de poliductos en España.

A nivel logístico, el problema que se plantea es el de la planificación temporal del transporte de diferentes productos desde nodos fuente (en donde se encuentra el producto a distribuir) hasta nodos destino (en los que se especifica la demanda de producto) pasando por una serie de nodos intermedios (con capacidad de almacenamiento). La planificación debe cumplir un conjunto de restricciones temporales relativas a las fechas mínima y máxima de entrega de los diferentes productos. Además, se deben cumplir las restricciones sobre la disponibilidad de productos en las fuentes, y las físicas derivadas de la utilización de los recursos de la red. La calidad de la solución a dicho problema de distribución se mide en términos del intervalo total del necesario para distribuir la cantidad de producto demandado,

así como de la ordenación apropiada de los paquetes sucesivos para conseguir interfases sin mezcla. Esta medida de la calidad se suele formular como función multiobjetivo de un problema de optimización en el que se trata de minimizar ambos objetivos. Si dos paquetes de diferente producto son lanzados consecutivamente por el mismo poliducto, existe la posibilidad de que ambos queden contaminados en el entorno de la región en contacto, perdiéndose parte del producto transportado. Por tanto, la planificación óptima en la distribución de paquetes por la red debe reducir en la medida de lo posible el número de contactos entre paquetes con productos diferentes, al mismo tiempo que se satisfacen todas las restricciones del problema. La capacidad de almacenamiento de los nodos intermedios se puede utilizar como elemento estratégico para el cumplimiento de las restricciones temporales y la optimización de la función objetivo. Por ejemplo, un producto que deba transportarse desde una fuente de suministro lejana a un nodo final a través de un poliducto que se esté utilizando en ese momento para otro envío, puede adelantarse a un nodo intermedio, más próximo al final, para reemprender su trayecto tan pronto el poliducto ocupado quede libre.

Como se verá más adelante, dicho problema puede modelarse como un problema de optimización mixta–entera con restricciones (MIP, de Mixed Integer Programming en inglés). La resolución de tal problema mediante métodos clásicos podría llegar a ser inabordable computacionalmente hablando para grandes redes [BJS90], [Sch86]. La complejidad de este tipo de problemas ya fue analizada en [MPL03]. Una alternativa para la resolución de este tipo de problemas son los métodos de optimización heurística, especialmente adecuados para la resolución de problemas de tipo combinatorio. Algunos de estos métodos son propuestos por [PCPC03] para resolver un DLSP (de Discrete Lot Sizing and Scheduling Problem en inglés). Los problemas “Lot Sizing” son problemas de planificación de la producción en los cuales los periodos de producción están fijados a priori, y en los cuales la producción de un paquete en un determinado periodo implica algún evento discreto tal como el pago de un cierto coste fijo o la pérdida de una cierta capacidad de producción debido a la puesta en marcha de algún tipo de mecanismo. Este tipo de problemas conlleva típicamente la satisfacción de la demanda de paquetes en los destinos dentro del tiempo de planificación.

Antes de comenzar con el desarrollo de los modelos matemáticos que describen el proceso de transporte, conviene diferenciar entre los dos tipos de redes que se suelen utilizar para tal fin: a) Poliducto simple; y b) Red de poliductos. Como se verá más adelante, esta distinción está basada en el desarrollo de un modelo diferente para cada tipo de red como consecuencia ciertos aspectos relacionados con su topología.

2.1.2 Distribución mediante un poliducto simple

Existen tramos de la red en donde los elementos involucrados en el transporte tan solo utilizan un único poliducto sin ningún tipo de bifurcación. La situación típica suele ser aquella en la que un único poliducto toma los diferentes productos de una única fuente, bien sea una refinería, puerto o estación de almacenamiento, y los distribuye hacia varios depósitos terminales situados a lo largo de la ruta del mismo. Cada uno de estos depósitos suele estar dedicado al abastecimiento de producto sobre la región en la que está ubicado, el cual, suele hacerse por carretera a través de camiones cisterna. Un ejemplo de tal situación sobre una red real se ilustra en la figura 2.3, en donde desde el puerto situado en Somorrostro se alimenta al poliducto que pasa a través de cinco depósitos terminales que abastecen a las regiones de la Rioja, Burgos, Palencia, León y Salamanca.

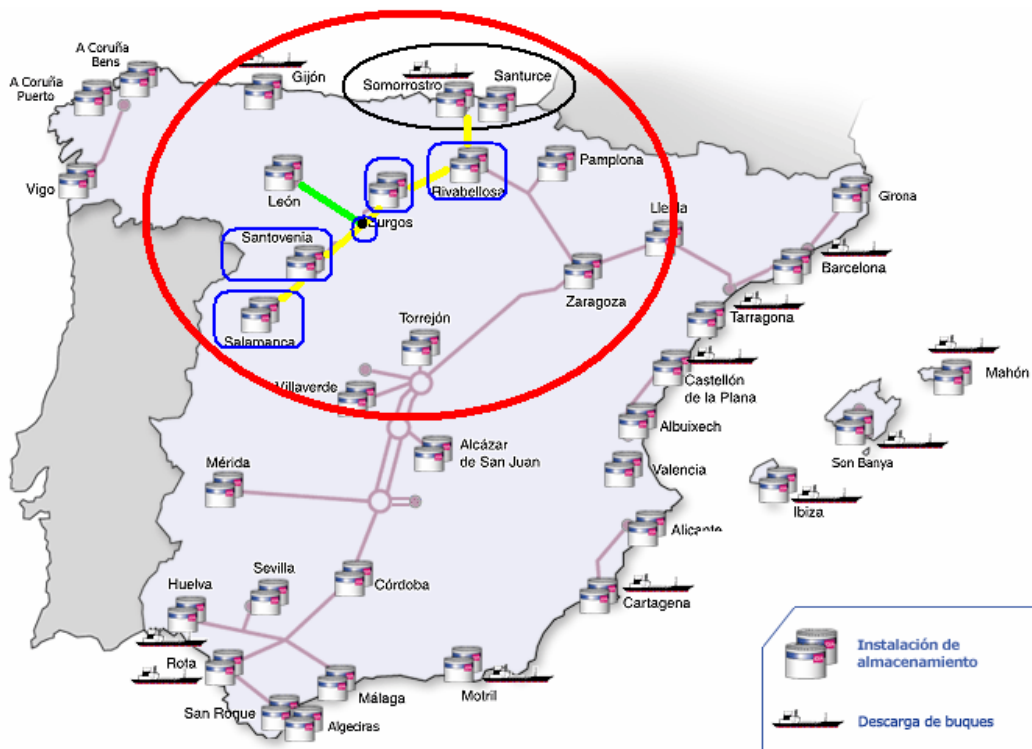


Figura 2.3: Transporte mediante un único poliducto.

Como se verá más adelante, la ausencia de nodos intermedios conectando varios poliductos, permite adoptar una formulación en tiempo continuo en el desarrollo del modelo matemático del problema de distribución a resolver. Esto es de gran importancia, no sólo por la simplificación que supone a la hora de resolver el problema en un computador, sino también por la buena calidad de las soluciones obtenidas al

aproximarse más dicho modelo a la realidad. La figura 2.4 muestra un esquema del modo de operación de un sistema compuesto por un único poliducto.



Figura 2.4: Funcionamiento de un poliducto.

El coste a minimizar en la operación de este tipo de sistemas suele incluir el coste de inventario en cada uno de los tanques tanto de la refinera como de los depósitos de las estaciones de distribución final, el coste asociado al transporte de cada uno de los paquetes desde la refinera a cada uno de dichos terminales, el coste asociado a la contaminación de producto en los volúmenes de contacto entre paquetes que contienen productos diferentes, y el coste asociado al uso del sistema durante determinados intervalos temporales denominados de alto coste.

2.1.3 Distribución mediante una red de poliductos

Otro problema de mayor complejidad que el anterior es el relativo a una red de poliductos. Este problema surge como consecuencia del uso de recursos compartidos. En este caso, el conjunto de poliductos que forman la red comparten fuentes, destinos y depósitos de almacenamiento intermedio. Además, a medida que la topología de dicha red se complica, aumenta el número de posibles soluciones a un mismo problema, haciendo más compleja la búsqueda de la óptima. Un ejemplo de tal situación sobre una red real se ilustra en la figura 2.5 en donde desde dos puertos situados en Somorrostro y Barcelona se alimenta a la red de poliductos que distribuye los productos hasta tres destinos situados en Pamplona, Burgos y Torrejón y pasa a través de dos estaciones de almacenamiento intermedias en Rivabellosa y Zaragoza. Como se verá más adelante, en este tipo de redes es necesario adoptar un enfoque en tiempo discreto para poder controlar los niveles de inventario en las estaciones de almacenamiento intermedio. El uso de un enfoque en tiempo discreto hace que el problema sea combinatorio, y por tanto difícil de resolver en un computador cuando se utilizan técnicas de optimización clásicas. Esto, motivará la utilización de técnicas de optimización heurísticas que ayuden a la búsqueda de una solución lo suficientemente buena en un tiempo de cómputo aceptable.

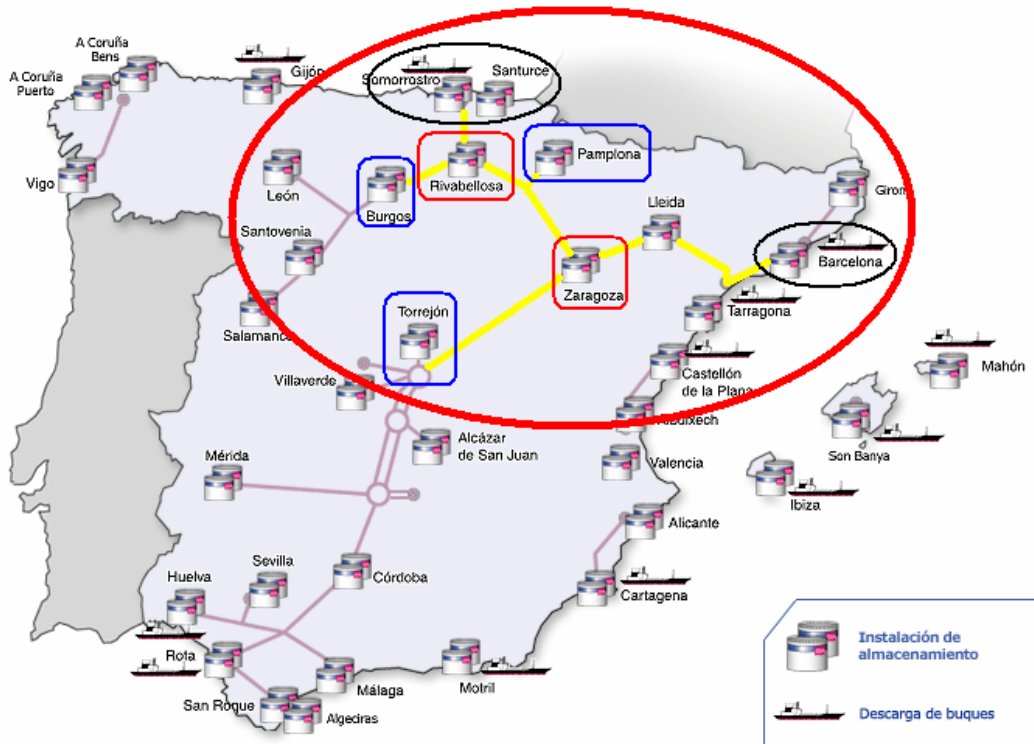


Figura 2.5: Transporte mediante una red de poliductos.

La figura 2.6 muestra un esquema del modo de operación de un sistema compuesto por una red de poliductos. Dado que sólo se puede inyectar producto en determinados instantes, el transporte se hace en paquetes discretos cuyo volumen corresponde a la cantidad que es inyectada de modo continuo durante dos instantes consecutivos.

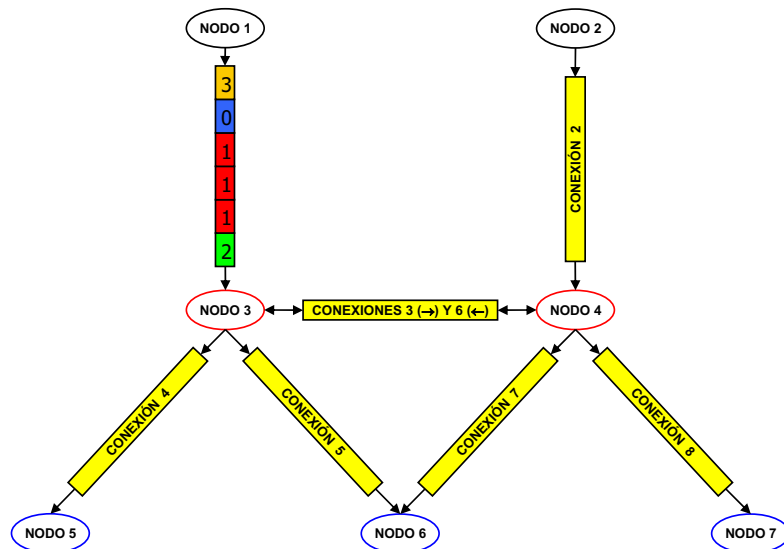


Figura 2.6: Funcionamiento de una red de poliductos.

El coste a minimizar en la operación de este tipo de sistemas suele incluir el coste de inventario en cada uno de los tanques de la refinería y los depósitos intermedios, el coste asociado al transporte de cada uno de los paquetes desde la refinería a cada uno de dichos terminales, el coste asociado a la formación de interfases con mezcla entre paquetes que contienen productos diferentes, y el coste asociado al uso del sistema durante determinados intervalos temporales denominados de alto coste.

2.2 Distribución mediante un poliducto simple

Tal y como se comentó en la sección 2.1.1 existen varios aspectos que hacen que la tarea de planificar la secuencia de bombeo de diferentes productos desde una única refinería a múltiples depósitos ubicados a lo largo de la ruta del poliducto sea una actividad compleja. Los pocos artículos que han sido publicados en éste área en la pasada década consideran la planificación de la secuencia de bombeo de múltiples productos en un sistema con un único poliducto para un único periodo de planificación. Sin embargo, al igual que en cualquier otro problema de fabricación y distribución, la producción y distribución de derivados del petróleo suele requerir la planificación a lo largo de varios periodos cuya duración puede ser de días, semanas o meses. En tales situaciones, existe una demanda específica de producto para cada periodo que debe cumplirse en el mismo.

La utilización de un modelo que tan solo es capaz de planificar un único periodo podría dar lugar a soluciones no factibles para los siguientes periodos. La razón de dicha infactibilidad reside en el hecho de que al no considerarse la demanda para los periodos sucesivos, la solución del modelo monoperiodo trata de satisfacer la demanda del periodo correspondiente a través del inventario previamente almacenado en los depósitos, en lugar de hacerlo mediante operaciones de bombeo de producto en el sistema. Esto, hace que los niveles de inventario en los depósitos caigan rápidamente desde sus niveles iniciales hasta niveles cercanos a los mínimos. Así, cuando se especifica una demanda para el periodo siguiente, el modelo monoperiodo podría no ser capaz de encontrar una solución que satisfaga dicha demanda si la duración de dicho periodo no es suficiente como para que el producto bombeado desde la refinería llegue a través del poliducto al depósito correspondiente (con sus niveles de inventario al mínimo). De hecho, la secuencia de paquetes dentro del poliducto al final de cada periodo de planificación no tiene nada que ver con la demanda en los periodos siguientes cuando se utiliza el modelo monoperiodo para cada periodo de forma independiente. Por tanto, es de esperar, que dicha secuencia no sea la mejor para satisfacer la demanda en periodos sucesivos.

En base a esta discusión, y siguiendo el modelo original propuesto en [CC04] para la planificación durante un único periodo, se propone aquí su extensión a varios periodos obteniendo así un modelo multiperiodo capaz de encontrar la mejor solución cuando se especifica la demanda de producto a lo largo de varios periodos. Además, dicho modelo integra la planificación de la producción como variable de decisión del proceso, lo que permite reducir los costes de la operación al evitar la utilización del sistema durante unos intervalos denominados de alto coste [FO03].

2.2.1 Características del modelo

A continuación se muestra la formulación matemática del modelo continuo. Se trata de un modelo multiperiodo mixto–entero no lineal para la planificación óptima de la producción de múltiples derivados del petróleo en una refinería y su transporte hasta a varias estaciones de distribución final mediante un sistema de un único poliducto. Así, partiendo de los puntos siguientes:

- La configuración del sistema, incluyendo el número de estaciones de distribución final, el diámetro del poliducto y la distancia entre cada depósito y la refinería.
- Los depósitos disponibles en cada estación final, incluyendo su capacidad y el producto asignado a cada uno de ellos.
- La demanda de producto a satisfacer en cada estación de distribución al final del horizonte de planificación
- La secuencia de paquetes antiguos en tránsito por el poliducto y su volumen en el instante inicial.
- La planificación de cada nueva producción (producto, cantidad e intervalo temporal) durante el horizonte de planificación.
- El nivel inicial de inventario de cada producto tanto en la refinería como en todos los depósitos de las estaciones terminales.
- Los niveles máximo y mínimo de inventario permitidos tanto en la refinería como en todos los depósitos de las estaciones terminales para cada producto.

El objetivo del problema es establecer la secuencia óptima de inyección de nuevos paquetes en el poliducto, junto con sus volúmenes originales y el tipo de producto asignado a cada uno de ellos de tal manera que:

- Se satisfaga la demanda de producto en cada uno de los depósitos de las estaciones terminales a tiempo.
- Se mantengan en todo momento los niveles de inventario dentro de su rango permisible tanto en los depósitos de la refinería como en los de todas las estaciones de distribución final ubicadas a lo largo de la ruta.
- Y se minimice la suma de los costes asociados al transporte del producto demandado en las estaciones terminales.

Haciendo uso de los conjuntos, parámetros y variables que aparecen en la *Lista de Símbolos* mostrada al comienzo de la tesis, se puede escribir un modelo matemático compuesto por una serie de restricciones más una función de coste que represente el objetivo del problema a resolver. Todas las ecuaciones que forman el modelo desarrollado pueden clasificarse en los siguientes grupos:

- Función objetivo.
- Planificación de la producción.
- Inyección de nuevos paquetes en el poliducto.
- Seguimiento de paquetes.
- Transferencia de producto a los depósitos.
- Entrega de la demanda a los mercados.
- Control de inventario en la refinería.
- Control de inventario en los depósitos.

2.2.2 Función objetivo

El objetivo del problema es minimizar el coste total de la operación del poliducto, incluyendo los cinco términos siguientes:

- Un coste asociado al bombeo de nuevos productos en el poliducto en condiciones normales.
- Un coste de penalización asociado al bombeo de nuevos productos en el poliducto durante los intervalos de alto coste.

- Un coste asociado al reprocesamiento de la mezcla de producto generada en las proximidades al contacto de paquetes con productos diferentes.
- Un el coste asociado al almacenamiento temporal (inventario) de producto en los depósitos de la refinería.
- Un el coste asociado al almacenamiento temporal de producto en los depósitos de las estaciones de distribución final (terminales).

La ecuación (2.1) muestra una posible función objetivo que contempla todos los costes arriba mencionados. El primer término calcula el coste de bombeo asociado al transporte de cada producto p desde la refinería hasta cada depósito j . Este término utiliza el volumen de cada viejo y nuevo paquete transferido a cada depósito y presenta un coste diferente, $cp_{p,j}$, dependiendo del producto p y del depósito j . El segundo término penaliza a la solución obtenida por el bombeo de producto en el poliducto durante los intervalos de alto coste, utilizando un factor de penalización diferente, $\rho_{k,t}$, dependiendo del intervalo de alto coste k y del periodo t . El tercer término calcula el coste de reprocesamiento, $cf_{p,p'}$, del material en contacto de dos paquetes con productos p y p' diferentes. Finalmente, los dos últimos términos calculan el coste de inventario asociado al almacenamiento temporal de cada producto p tanto en la refinería como en las estaciones terminales j , con costes cir_p y $cid_{p,j}$ respectivamente.

$$\begin{aligned}
 \min z = & \sum_{p=1}^P \sum_{j=1}^J \left(cp_{p,j} \times \sum_{i=1}^I \sum_{t=1}^T \left(\sum_{o=1}^O DV_{o,p,j,i,t} + \sum_{i'=1}^I \sum_{t'=1}^T DV_{i,t,j,i',t'} \right) \right) + \\
 & \sum_{i=1}^I \sum_{t=1}^T \sum_{k=1}^K \rho_{t,k} \times H_{i,t,k} + \\
 & \sum_{i=1}^I \sum_{t=1}^T \sum_{p=1}^P \sum_{p'=1}^P cf_{p,p'} \times WIF_{i,t,p,p'} + \\
 & \sum_{t=1}^T \left(\sum_{p=1}^P cir_p \times \frac{hmax}{I} \cdot \left(\sum_{i=1}^I IRS_{p,t,t} \right) \right) + \\
 & \sum_{t=1}^T \left(\sum_{p=1}^P \sum_{j=1}^J cid_{p,j} \times \frac{hmax}{I} \cdot \left(\sum_{i=1}^I ID_{p,j,i,t} \right) \right)
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Puesto que el modelo aquí desarrollado integra la planificación de la producción como parte del proceso de decisión, se requieren algunos cambios en el cuarto término con respecto al propuesto en [CC04]. Este término, al igual que el quinto para las estaciones terminales, calcula el coste de inventario en la refinería mediante una estimación del inventario real basada en el promedio del inventario de cada producto p en ciertos instantes a lo largo de todos los periodos de planificación. Para llevar a cabo el cálculo de dicho promedio se utilizan las variables que representan el nivel de

inventario de cada producto en la refinería al comienzo de cada nueva inyección de producto, $IRS_{p,i,t}$. Sin embargo, si el instante en el que comienza la inyección del último paquete del periodo t es distinto de $t \times hmax$ (por ejemplo cuando se utiliza como cardinal del conjunto I el número exacto de paquetes necesarios para encontrar una solución factible del problema), entonces existe un intervalo temporal igual a $[t \times hmax - (C_{I,t} - L_{I,t})]$ dentro del cual la refinería puede producir una determinada cantidad de producto si se tiene en cuenta en el cálculo del coste de inventario. Por tanto, si la planificación de la producción forma parte del proceso de decisión, la solución encontrada presentará una producción de la refinería en tal intervalo a menos que el efecto de tal producción se incorpore de alguna manera en el cálculo del inventario. Dicho efecto es tenido en cuenta mediante la incorporación de un término adicional en el cálculo del inventario promedio. Dicho término mide el nivel de inventario en la refinería al final de cada periodo de planificación y se calcula mediante la suma del nivel de inventario al comienzo de la inyección del último paquete del periodo correspondiente, $IRS_{p,I,t}$, y la cantidad del producto correspondiente producida por la refinería en el intervalo $[t \times hmax - (C_{I,t} - L_{I,t})]$. Así la nueva expresión para el cuarto término queda tal y como se muestra en la ecuación (2.2):

$$z_4 = \sum_{t=1}^T \left(\sum_{p=1}^P cir_p \times \frac{hmax}{(I+1)} \cdot \left(\sum_{i=1}^I IRS_{p,i,t} + \left(IRS_{p,I,t} + \sum_{r=1}^R (\gamma_p \cdot LR_{r,p,t} - qu_{I,t,r,p}) \right) \right) \right) \quad (2.2)$$

2.2.3 Planificación de la producción

Es esta sección se muestran el conjunto de restricciones asociadas a la planificación de la producción. Esta parte del modelo supone un avance con respecto al modelo propuesto en [CC04]. La inclusión de las variables relacionadas con la producción de los diferentes derivados del petróleo en la refinería dentro del conjunto de variables de decisión permite sincronizar el bombeo de nuevos paquetes en el poliducto de tal forma que se evite la utilización del mismo dentro de los intervalos temporales de alto coste, reduciendo por tanto el coste total de la operación.

La restricción mostrada en la ecuación (2.3) establece que la *résima* producción de un producto p debe comenzar y terminar en el mismo periodo t . El caso en el que la duración de una producción r de producto p deba extenderse más allá del periodo en el que comienza está implícitamente considerado en el modelo. En tales situaciones la última producción de producto p en el periodo t terminará justo al final de tal periodo, y la primera producción del mismo producto en el periodo siguiente $t+1$ comenzará justamente al principio de tal periodo.

$$(t-1) \cdot hmax \leq CR_{r,p,t} - LR_{r,p,t} \leq CR_{r,p,t} \leq t \cdot hmax \quad ; \quad \forall (r, p, t) \quad (2.3)$$

Las siguientes restricciones hacen referencia al orden que debe seguir la secuencia de producciones de cada producto en la refinería. La refinería es capaz de producir diferentes tipos de producto simultáneamente descargándolos en los tanques designados a cada tipo. Sin embargo, las diferentes producciones r de un determinado producto p en un periodo t están cronológicamente ordenadas. El orden cronológico que deben seguir las mismas está fijado por la ecuación (2.4)

$$CR_{r,p,t} - LR_{r,p,t} \geq CR_{r-1,p,t} \quad ; \quad \forall (r, p, t) : r > 1 \quad (2.4)$$

El número de producciones de un producto necesarias en cada periodo no se conoce a priori, por lo que se debe suponer un número relativamente grande para R . Sin embargo, en una solución óptima, solamente un cierto número de las primeras producciones serán llevadas a cabo. Por lo tanto, el conjunto de restricciones mostradas en las ecuaciones (2.5) y (2.6) deben ser añadidas al modelo. M_1 es una constante relativamente grande cuyo valor se puede fijar a $M_1 = 1.1 \times hmax$.

$$yp_{r,p,t} \leq yp_{r-1,p,t} \quad ; \quad \forall (r, p, t) : r > 1 \quad (2.5)$$

$$LR_{r,p,t} \leq M_1 \cdot yp_{r,p,t} \quad ; \quad \forall (r, p, t) \quad (2.6)$$

Finalmente, se debe imponer una restricción sobre la duración mínima de cada una de las producciones de cada producto, ya que no merece la pena poner en funcionamiento la refinería si no es para producir más de una cantidad mínima de producto. La restricción mostrada en la ecuación (2.7) establece la duración mínima de cada producción siempre que ésta tenga lugar.

$$CR_{r,p,t} \geq yp_{r,p,t} \cdot PRmin \quad ; \quad \forall (r, p, t) \quad (2.7)$$

2.2.4 Inyección de nuevos paquetes en el poliducto

En esta sección se muestran el conjunto de restricciones asociadas a la inyección de nuevos paquetes en el poliducto. En este caso las restricciones son similares a las propuestas en [CC04] pero extendidas al caso multiperiodo. Esta extensión hace necesaria la inclusión de unas restricciones adicionales en el modelo para medir el número real de paquetes inyectados en el poliducto en cada periodo.

En primer lugar se muestran las restricciones similares a las mostradas en la ecuación (2.3) pero para la inyección de paquetes en el poliducto en lugar de para la

producción de los mismos. La restricción mostrada en la ecuación (2.8) establece que el i ésimo paquete inyectado en el periodo t debe comenzar y terminar en el mismo periodo t . El caso en el que la inyección de un paquete i deba extenderse más allá del periodo en el que comienza está implícitamente considerado en el modelo. En tales situaciones el último paquete inyectado en el periodo t terminará justo al final de tal periodo, y el primero en ser inyectado en el periodo siguiente $t+1$ comenzará justamente al principio de tal periodo. Además, ambos paquetes contendrán el mismo producto.

$$(t-1) \cdot hmax \leq C_{i,t} - L_{i,t} \leq C_{i,t} \leq t \cdot hmax \quad ; \quad \forall(i,t) \quad (2.8)$$

Se debe imponer además una restricción que limite a 1 el número de productos que pueden ser asignados a cada uno de los paquetes inyectados en el poliducto. Tal limitación está forzada mediante la restricción mostrada en la ecuación (2.9).

$$\sum_{p=1}^P y_{i,t,p} \leq 1 \quad ; \quad \forall(i,t) \quad (2.9)$$

Las siguientes restricciones hacen referencia al orden que debe seguir la secuencia en la que se deben inyectar los nuevos paquetes en el poliducto. La inyección de un nuevo paquete en el poliducto nunca debe comenzar antes de que finalice la inyección del anterior y pase el tiempo necesario para realizar el cambio de manguera en el caso de que los productos sean diferentes. Este requisito está forzado mediante las restricciones mostradas en la ecuación (2.10). La primera restricción corresponde al caso en el que los dos paquetes son inyectados en el mismo periodo y la segunda corresponde a la secuencia que deben seguir el último paquete inyectado en el periodo $t-1$ y el primer paquete inyectado en el periodo siguiente, t .

$$\begin{aligned} C_{i,t} - L_{i,t} &\geq C_{i-1,t} + \tau_{p,p'} \cdot (y_{i-1,t,p} + y_{i,t,p'} - 1) \quad ; \quad \forall(i,t,p,p') : i > 1 \\ C_{1,t} - L_{1,t} &\geq C_{I,t-1} + \tau_{p,p'} \cdot (y_{t-1,p}^I + y_{1,t,p'} - 1) \quad ; \quad \forall(t,p,p') : t > 1 \end{aligned} \quad (2.10)$$

A continuación se muestran las restricciones asociadas a la relación existente entre el volumen y la longitud de cada paquete inyectado en el poliducto así como las duraciones máxima y mínima permitidas para cada nueva inyección. El volumen del i ésimo paquete inyectado en el poliducto en el periodo t debe estar dentro de los límites mínimo y máximo de volumen que puede ser bombeado durante el intervalo de tiempo $(C_{i,t} - L_{i,t}, C_{i,t})$. Dicha limitación queda establecida mediante la restricción mostrada en la ecuación (2.11). Además, la longitud temporal de los paquetes inyectados en cada periodo está limitada siempre y cuando dicho paquete sea realmente inyectado en el poliducto según se muestra en la ecuación (2.12).

$$vbmin \cdot L_{i,t} \leq Q_{i,t} \leq vbmax \cdot L_{i,t} \quad ; \quad \forall(i,t) \quad (2.11)$$

$$\left(\sum_{p=1}^P y_{i,t,p} \right) \cdot lmin \leq L_{i,t} \leq \left(\sum_{p=1}^P y_{i,t,p} \right) \cdot lmax \quad ; \quad \forall(i,t) \quad (2.12)$$

Al igual que para el número de veces que producir un determinado producto, el número de paquetes que se deben inyectar en cada periodo no se conoce a priori, por lo que se debe suponer un número relativamente grande para I . Sin embargo, en una solución óptima, solamente un cierto número de los primeros paquetes serán inyectados. Por lo tanto, la siguiente restricción debe ser añadida al modelo:

$$\sum_{p=1}^P y_{i,t,p} \leq \sum_{p=1}^P y_{i-1,t,p} \quad ; \quad \forall(i,t) : i > 1 \quad (2.13)$$

La extensión del modelo de [CC04] a un modelo multiperiodo, hace necesaria la inclusión de unas restricciones adicionales para medir el número de paquetes que realmente son inyectados en el poliducto en cada periodo. Este número debe ser menor o igual que I , y se puede calcular mediante la ecuación (2.14) que debe ser incorporada al modelo como una restricción más.

$$N_t = \sum_{i=1}^I \sum_{p=1}^P y_{i,t,p} \quad ; \quad \forall t \quad (2.14)$$

Una vez fijado el valor de N_t mediante la ecuación (2.14), el tipo de producto que contiene el último paquete inyectado en el periodo t queda determinado por la variable $yl_{t,p}$. El valor de dicha variable binaria queda fijado por las restricciones mostradas en las ecuaciones (2.15) y (2.16).

$$yl_{t,p} \geq 1 + i \cdot y_{i,t,p} - N_t \quad ; \quad \forall(i,t,p) \quad (2.15)$$

$$\sum_{p=1}^P yl_{t,p} \leq 1 \quad ; \quad \forall t \quad (2.16)$$

A continuación se muestran el conjunto de restricciones relacionadas con el contacto de los paquetes inyectados de forma consecutiva en el poliducto. En primer lugar se muestran en la ecuación (2.17) el conjunto de restricciones que determinan el volumen de la región de contacto entre dichos paquetes. La primera de dichas restricciones establece el volumen de la región de contacto para dos paquetes inyectados de forma consecutiva en el mismo periodo del horizonte de planificación. La segunda determina el volumen de contacto entre el último paquete inyectado el periodo $t-1$ y el primero inyectado en el periodo siguiente, t . Finalmente, la tercera

restricción fija el volumen de contacto entre el último de los paquetes antiguos que se encuentran en el poliducto al comienzo del horizonte de planificación y el primer paquete inyectado en el primer periodo.

$$\begin{aligned}
 WIF_{i,t,p,p'} &\geq IF_{p,p'} \cdot (y_{i-1,t,p} + y_{i,t,p'} - 1) \quad ; \quad \forall (i,t,p,p') : i > 1 \\
 WIF_{1,t,p,p'} &\geq IF_{p,p'} \cdot (y_{t-1,p} + y_{1,t,p'} - 1) \quad ; \quad \forall (t,p,p') : t > 1 \\
 WIF_{1,1,p,p'} &\geq IF_{p,p'} \cdot (y_{0,p} + y_{1,1,p'} - 1) \quad ; \quad \forall (p,p')
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

En segundo lugar se muestran en la ecuación (2.18) el conjunto de restricciones que determinan las secuencias de producto prohibidas en la inyección de nuevos paquetes en el poliducto. Debido a la alta contaminación de ciertos productos diferentes cuando estos se encuentran en contacto, algunas secuencias de dichos productos están prohibidas. Sea S el conjunto de pares (p,p') que representan secuencias de productos prohibidas. Entonces, las restricciones que evitan que tales secuencias de productos se encuentren en la solución al problema se muestran en la ecuación (2.18). La primera de dichas restricciones corresponde a dos paquetes inyectados de forma consecutiva en el mismo periodo del horizonte de planificación. La segunda establece las secuencias prohibidas entre el último paquete inyectado el periodo $t-1$ y el primero inyectado en el periodo siguiente, t . Finalmente, la tercera restricción se aplica sobre el último de los paquetes antiguos que se encuentran en el poliducto al comienzo del horizonte de planificación y el primer paquete inyectado en el primer periodo.

$$\begin{aligned}
 y_{i-1,t,p} + y_{i,t,p'} &\leq 1 \quad ; \quad \forall (i,t) : i > 1 \quad ; \quad (p,p') \in S \\
 y_{t-1,p} + y_{1,t,p'} &\leq 1 \quad ; \quad \forall t : t > 1 \quad ; \quad (p,p') \in S \\
 y_{0,p} + y_{1,1,p'} &\leq 1 \quad ; \quad ; \quad (p,p') \in S
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

Para terminar con el conjunto de restricciones relativas a la inyección de nuevos paquetes en el poliducto, se muestran a continuación las relacionadas con la inyección de tales productos durante los intervalos de alto coste. Para ello, es necesario definir un par de variables binarias, incluidas en el modelo mediante las restricciones mostradas en la ecuación (2.19). Dichas variables son:

- La variable $u_{i,t,k}$ cuyo valor es 1 si la inyección de un nuevo paquete i en el periodo t comienza después del límite inferior del $k^{\text{ésimo}}$ intervalo de alto coste del mismo periodo.
- La variable $v_{i,t,k}$ cuyo valor es 1 si la inyección de un nuevo paquete i en el periodo t termina antes de la finalización del $k^{\text{ésimo}}$ intervalo de alto coste del mismo periodo.

$$\begin{aligned}
 C_{i,t} - L_{i,t} &\geq IPH_{k,t} \cdot u_{i,t,k} && ; \quad \forall(i,t,k) \\
 C_{i,t} - L_{i,t} &\leq IPH_{k,t} + u_{i,t,k} \cdot M_1 && ; \quad \forall(i,t,k) \\
 C_{i,t} &\leq FPH_{k,t} + (1 - v_{i,t,k}) \cdot M_1 && ; \quad \forall(i,t,k) \\
 C_{i,t} &\geq FPH_{k,t} \cdot (1 - v_{i,t,k}) && ; \quad \forall(i,t,k)
 \end{aligned} \tag{2.19}$$

Para calcular el valor de la porción de cada nuevo paquete i inyectado en el poliducto en el periodo t que queda dentro del k ésimo intervalo de alto coste del mismo periodo, $H_{i,t,k}$, se deben considerar los cuatro casos que se describen a continuación:

- $u_{i,t,k}=0$ y $v_{i,t,k}=0$. En este caso, la inyección del i ésimo paquete en el periodo t comienza antes de $IPH_{k,t}$ y termina después de $FPH_{k,t}$. Por lo tanto, la restricción mostrada en la ecuación (2.20) se satisface haciendo que $H_{i,t,k}=FPH_{k,t} - IPH_{k,t}$ en el óptimo.

$$H_{i,t,k} \geq FPH_{k,t} - IPH_{k,t} - u_{i,t,k} \cdot M_1 - v_{i,t,k} \cdot M_1 \quad ; \quad \forall(i,t,k) \tag{2.20}$$

- $u_{i,t,k}=0$ y $v_{i,t,k}=1$. En este caso, solamente el instante en el que concluye la inyección del i ésimo paquete en el periodo t cae dentro del k ésimo intervalo de alto coste del mismo periodo, presentándose dos casos diferentes dependiendo del valor de $C_{i,t}$. Si $C_{i,t}$ es menor que $IPH_{k,t}$, entonces la inyección del i ésimo paquete del periodo t ocurre enteramente fuera del k ésimo intervalo de alto coste del mismo periodo y por tanto $H_{i,t,k}$ valdrá cero. Como consecuencia la restricción mostrada en la ecuación (2.21) se hace redundante. En caso contrario, la inyección del i ésimo paquete del periodo t ocurre parcialmente dentro del k ésimo intervalo de alto coste del mismo periodo y por tanto, $H_{i,t,k}=C_{i,t} - IPH_{k,t}$ en el óptimo.

$$H_{i,t,k} \geq C_{i,t} - IPH_{k,t} - (1 - v_{i,t,k}) \cdot M_1 - u_{i,t,k} \cdot M_1 \quad ; \quad \forall(i,t,k) \tag{2.21}$$

- $u_{i,t,k}=1$ y $v_{i,t,k}=0$. En este caso, solamente el instante en el que comienza la inyección del i ésimo paquete en el periodo t cae dentro del k ésimo intervalo de alto coste del mismo periodo, presentándose dos casos diferentes dependiendo del valor de $C_{i,t} - L_{i,t}$. Si $C_{i,t} - L_{i,t}$ es mayor que $FPH_{k,t}$, entonces la inyección del i ésimo paquete del periodo t ocurre enteramente fuera del k ésimo intervalo de alto coste del mismo periodo y por tanto $H_{i,t,k}$ valdrá cero. Como consecuencia la restricción mostrada en la ecuación (2.22) se hace redundante. En caso contrario, la inyección del i ésimo paquete del periodo t ocurre parcialmente dentro del k ésimo intervalo de alto coste del mismo periodo y por tanto, $H_{i,t,k}=FPH_{k,t} - (C_{i,t} - IPH_{k,t})$ en el óptimo.

$$H_{i,t,k} \geq FPH_{k,t} - (C_{i,t} - L_{i,t}) - (1 - u_{i,t,k} \cdot M_1) - v_{i,t,k} \cdot M_1 \quad ; \quad \forall (i,t,k) \quad (2.22)$$

- $u_{i,t,k}=1$ y $v_{i,t,k}=1$. En este caso, la inyección del $i^{\text{ésimo}}$ paquete en el periodo t comienza después de $IPH_{k,t}$ y termina antes de $FPH_{k,t}$. Por lo tanto, la restricción mostrada en la ecuación (2.20) se satisface haciendo que $H_{i,t,k}=L_{i,t}$ en el óptimo.

$$H_{i,t,k} \geq L_{i,t} + (u_{i,t,k} + v_{i,t,k} - 2) \cdot M_1 \quad ; \quad \forall (i,t,k) \quad (2.23)$$

2.2.5 Seguimiento de paquetes

Se muestran aquí el conjunto de restricciones asociadas a la ubicación exacta de cada uno de los paquetes dentro del poliducto en cada instante. Las restricciones sobre las coordenadas de los paquetes antiguos se muestran en la ecuación (2.24). La primera de dichas restricciones fija el valor de la coordenada superior de los paquetes antiguos excepto el último en el instante $C_{i,t}$. La segunda determina la coordenada superior para el último de los paquetes antiguos que es inmediatamente seguido por el primer paquete inyectado en el primer periodo.

$$\begin{aligned} Fo_{o,i,t} &= Fo_{o+1,i,t} + Wo_{o,i,t} \quad ; \quad \forall (o,i,t) : o < O \\ Fo_{O,i,t} &= F_{1,1,i,t} + Wo_{O,i,t} \quad ; \quad \forall (i,t) \end{aligned} \quad (2.24)$$

En cuanto a los paquetes nuevos, se tienen las restricciones mostradas en la ecuación (2.25). Las dos primeras restricciones establecen las relaciones entre las coordenadas superiores de los paquetes inyectados en periodos diferentes mientras que las dos últimas son aplicables a paquetes inyectados en el mismo periodo.

$$\begin{aligned} F_{i,t,i',t'} &= F_{i+1,t,i',t'} + W_{i,t,i',t'} \quad ; \quad \forall (i,t,i',t') : i > I, t < t' \\ F_{I,t,i',t'} &= F_{1,t+1,i',t'} + W_{I,t,i',t'} \quad ; \quad \forall (t,i',t') : t < t', t < T \\ F_{i,t,i',t} &= F_{i+1,t,i',t} + W_{i,t,i',t} \quad ; \quad \forall (i,t,i') : i > i' \\ F_{i,t,i,t} &= W_{i,t,i,t} \quad ; \quad \forall (i,t) \end{aligned} \quad (2.25)$$

2.2.6 Transferencia de producto a los depósitos

Esta sección muestra el conjunto de restricciones asociadas a la transferencia de producto desde el poliducto a los depósitos de distribución ubicados a lo largo de la ruta. Las restricciones asociadas a los paquetes antiguos se muestran en la ecuación (2.26). La primera de dichas restricciones establece el volumen transferido cuando se inyecta un nuevo paquete en cualquier periodo. La segunda es similar a la primera pero para el caso en el que se inyecta el primer paquete de cada periodo. La última restricción establece que el volumen transferido desde un paquete antiguo cuando se

inyecta el primer paquete nuevo del primer periodo es igual a su volumen original menos el volumen que posee en $C_{I,I}$.

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=1}^J D_{o,j,i,t} &= W_{o,i-1,t} - W_{o,i,t} \quad ; \quad \forall (o,i,t) : i > 1 \\
 \sum_{j=1}^J D_{o,j,1,t} &= W_{o,I,t-1} - W_{o,1,t} \quad ; \quad \forall (o,t) : t > 1 \\
 \sum_{j=1}^J D_{o,j,1,1} &= W_{0,o} - W_{o,1,1} \quad ; \quad \forall o
 \end{aligned} \tag{2.26}$$

Análogamente, se tienen las restricciones asociadas a la transferencia de producto desde los paquetes nuevos. Las restricciones son similares a las anteriores siendo las dos primeras aplicables a paquetes inyectados en periodos diferentes y las dos últimas a paquetes inyectados en el mismo periodo.

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=1}^J D_{i,t,j,i',t'} &= W_{i,t,i'-1,t'} - W_{i,t,i',t'} \quad ; \quad \forall (i,t,i',t') : i' > 1, t < t' \\
 \sum_{j=1}^J D_{i,t,j,1,t'} &= W_{i,t,I,t'-1} - W_{i,t,1,t'} \quad ; \quad \forall (i,t,t') : t < t' \\
 \sum_{j=1}^J D_{i,t,j,i',t} &= W_{i,t,i'-1,t} - W_{i,t,i',t} \quad ; \quad \forall (i,t,i') : i < i' \\
 \sum_{j=1}^J D_{i,t,j,i,t} &= Q_{i,t} - W_{i,t,i,t} \quad ; \quad \forall (i,t)
 \end{aligned} \tag{2.27}$$

La transferencia de producto desde un paquete s_1 ubicado en el poliducto a un depósito j cuando se inyecta un paquete posterior s_2 debe cumplir ciertas condiciones de factibilidad. En concreto se deben satisfacer las dos condiciones siguientes: a) la coordenada inferior del paquete s_1 cuando finaliza la inyección del paquete anterior a s_2 debe ser menor que la coordenada del depósito j ; y b) la coordenada superior del paquete s_1 cuando finaliza la inyección del paquete s_2 menos el volumen de contacto del paquete s_1 debe ser mayor que la coordenada del depósito j . Para establecer estas condiciones se hace uso de las variables binarias $x_{0o,j,i',t'}$ y $x_{i,t,j,i',t'}$ que valen 1 si el depósito j es alcanzable por el o ésimo paquete antiguo o el i ésimo paquete inyectado en el periodo t respectivamente cuando se inyecta el i' ésimo paquete del periodo t' . Por lo tanto, por definición deben satisfacerse las restricciones mostradas en las ecuaciones (2.28) y (2.29) para paquetes antiguos y nuevos respectivamente. La primera de las restricciones mostrada en la ecuación (2.29) corresponde a paquetes inyectados en periodos diferentes mientras que la segunda a paquetes inyectados en el mismo periodo. La constante M_2 es un límite superior sobre la cantidad máxima de material

que se puede transferir a un depósito cada vez que se inyecta un nuevo paquete en el poliducto. Es recomendable tomar $M_2=1.1 \times vbmax \times hmax$.

$$Do_{o,j,i,t} \leq xo_{o,j,i,t} \quad ; \quad \forall(o,j,i,t) \quad (2.28)$$

$$\begin{aligned} D_{i,t,j,i',t'} &\leq M_2 \cdot x_{i,t,j,i',t'} \quad ; \quad \forall(i,t,j,i',t') : t < t' \\ D_{i,t,j,i',t} &\leq M_2 \cdot x_{i,t,j,i',t} \quad ; \quad \forall(i,t,j,i') : i \leq i' \end{aligned} \quad (2.29)$$

La condición b) sobre todos los depósitos menos el último queda implementada en el modelo a través de las restricciones mostradas en las ecuaciones (2.30) y (2.31) para paquetes antiguos y nuevos respectivamente. La primera de las restricciones mostrada en la ecuación (2.31) corresponde a paquetes inyectados en periodos diferentes mientras que la segunda a paquetes inyectados en el mismo periodo.

$$Fo_{o,i,t} - WIF0_o \geq \sigma_j \cdot xo_{o,j,i,t} \quad ; \quad \forall(o,j,i,t) : j < J \quad (2.30)$$

$$\begin{aligned} F_{i,t,i',t'} - \sum_{p=1}^P \sum_{p'=1}^P WIF_{i,t,p,p'} &\geq \sigma_j \cdot x_{i,t,j,i',t'} \quad ; \quad \forall(i,t,j,i',t') : j < J, t < t' \\ F_{i,t,i',t} - \sum_{p=1}^P \sum_{p'=1}^P WIF_{i,t,p,p'} &\geq \sigma_j \cdot x_{i,t,j,i',t} \quad ; \quad \forall(i,t,j,i') : j < J, i \leq i' \end{aligned} \quad (2.31)$$

Para el último depósito deben satisfacerse las restricciones mostradas en las ecuaciones (2.32) para los paquetes antiguos y (2.33) para los nuevos. En este caso no es necesario sustraer el volumen de contacto a la coordenada superior ya que el material contenido en dicho volumen necesita ser inyectado en dicho depósito para su posterior reprocesamiento. La primera de las restricciones mostrada en la ecuación (2.33) corresponde a paquetes inyectados en periodos diferentes mientras que la segunda a paquetes inyectados en el mismo periodo.

$$Fo_{o,i,t} \geq \sigma_J \cdot xo_{o,J,i,t} \quad ; \quad \forall(o,i,t) \quad (2.32)$$

$$\begin{aligned} F_{i,t,i',t'} &\geq \sigma_J \cdot x_{i,t,J,i',t'} \quad ; \quad \forall(i,t,i',t') : t < t' \\ F_{i,t,i',t} &\geq \sigma_J \cdot x_{i,t,J,i',t} \quad ; \quad \forall(i,t,i') : i \leq i' \end{aligned} \quad (2.33)$$

Tal y como se ha dicho anteriormente, puede transferirse producto desde un paquete en el poliducto a un depósito siempre y cuando dicho depósito sea alcanzable por el paquete. Pero además, debe existir un límite superior sobre el volumen de material que puede ser transferido a tal depósito. Dicho límite queda establecido mediante las restricciones mostradas en la ecuaciones (2.34) y (2.35) para paquetes antiguos y nuevos respectivamente.

$$\begin{aligned}
 Do_{o,j,i,t} &\leq \sigma_j - Fo_{o+1,i-1,t} - \sum_{j'=1}^{j-1} Do_{o,j',i,t} + (1 - xo_{o,j,i,t}) \cdot M_2 \quad ; \quad \forall (o,j,i,t) : o < O, i > 1 \\
 Do_{O,j,i,t} &\leq \sigma_j - F_{1,1,i-1,t} - \sum_{j'=1}^{j-1} Do_{O,j',i,t} + (1 - xo_{O,j,i,t}) \cdot M_2 \quad ; \quad \forall (j,i,t) : i > 1 \\
 Do_{O,j,1,t} &\leq \sigma_j - F_{1,1,I,t-1} - \sum_{j'=1}^{j-1} Do_{O,j',1,t} + (1 - xo_{O,j,1,t}) \cdot M_2 \quad ; \quad \forall (j,t) : t > 1 \\
 Do_{O,j,1,1} &\leq \sigma_j - \sum_{j'=1}^{j-1} Do_{O,j',1,1} + (1 - xo_{O,j,1,1}) \cdot M_2 \quad ; \quad \forall j \\
 Do_{o,j,1,1} &\leq \sigma_j - Fo_{o+1} - \sum_{j'=1}^{j-1} Do_{o,j',1,1} + (1 - xo_{o,j,1,1}) \cdot M_2 \quad ; \quad \forall (o,j) : o < O
 \end{aligned} \tag{2.34}$$

$$\begin{aligned}
 D_{i,t,j,i',t'} &\leq \sigma_j - F_{i+1,t,i'-1,t'} - \sum_{j'=1}^{j-1} D_{i,t,j',i',t'} + (1 - x_{i,t,j,i',t'}) \cdot M_2 \quad ; \quad \forall (i,t,j,i',t') : i < I, i' > 1, t < t' \\
 D_{I,t,j,i',t'} &\leq \sigma_j - F_{1,t+1,i'-1,t'} - \sum_{j'=1}^{j-1} D_{I,t,j',i',t'} + (1 - x_{I,t,j,i',t'}) \cdot M_2 \quad ; \quad \forall (t,j,i',t') : i' > 1, t < t' \\
 D_{I,t,j,1,t'} &\leq \sigma_j - F_{1,t+1,I,t'-1} - \sum_{j'=1}^{j-1} D_{I,t,j',1,t'} + (1 - x_{I,t,j,1,t'}) \cdot M_2 \quad ; \quad \forall (t,j,t') : t < t'-1 \\
 D_{I,t,j,1,t+1} &\leq \sigma_j - \sum_{j'=1}^{j-1} D_{I,t,j',1,t+1} + (1 - x_{I,t,j,1,t+1}) \cdot M_2 \quad ; \quad \forall (t,j) : t < T \\
 D_{i,t,j,1,t'} &\leq \sigma_j - F_{i+1,t,I,t'-1} - \sum_{j'=1}^{j-1} D_{i,t,j',1,t'} + (1 - x_{i,t,j,1,t'}) \cdot M_2 \quad ; \quad \forall (i,t,j,t') : i < I, t < t' \\
 D_{i,t,j,i+1,t} &\leq \sigma_j - \sum_{j'=1}^{j-1} D_{i,t,j',i+1,t} + (1 - x_{i,t,j,i+1,t}) \cdot M_2 \quad ; \quad \forall (i,t,j) : i < I \\
 D_{i,t,j,i',t} &\leq \sigma_j - F_{i+1,t,i'-1,t} - \sum_{j'=1}^{j-1} D_{i,t,j',i',t} + (1 - x_{i,t,j,i',t}) \cdot M_2 \quad ; \quad \forall (i,t,j,i') : i < i'-1
 \end{aligned} \tag{2.35}$$

Anteriormente, se estableció que la condición a) para la transferencia de producto del paquete s_1 al depósito j requería que la coordenada inferior del paquete s_1 cuando finaliza la inyección del paquete anterior a s_2 debe ser menor que la coordenada del depósito j . Esta condición queda implementada en el modelo de forma automática a través de las restricciones mostradas en la ecuación (2.35). Para ver esto, tómesese por ejemplo la primera de dichas restricciones. Nótese, que dicha ecuación puede reescribirse de la forma mostrada en la ecuación (2.36). Puesto que $D_{i,t,j,i',t'} > 0$, entonces $F_{i+1,t,i'-1,t} \leq \sigma_j + (1 - x_{i,t,j,i',t'}) \cdot M_2$. Por tanto, la condición a) queda satisfecha mediante esta restricción para el rango de índices en el que es aplicable.

$$F_{i+1,t,i'-1,t} \leq \sigma_j - \sum_{j'=1}^j D_{i,t,j',i',t'} + (1 - x_{i,t,j,i',t'}) \cdot M_2 \quad ; \quad \forall (i,t,j,i',t') : i < I, i' > 1, t < t' \tag{2.36}$$

Debido a la incompresibilidad del fluido, el volumen total de producto transferido desde todos los paquetes en tránsito en el poliducto cuando se inyecta el $i^{\text{ésimo}}$ paquete del periodo t' debe ser igual al volumen original de dicho paquete, $Q_{i',t'}$. Esta condición

queda implementada en el modelo a través de la restricción mostrada en la ecuación (2.37). En dicha restricción se observan tres términos en el lado izquierdo. El primero de ellos tiene en cuenta el volumen correspondiente a los paquetes $i=1, \dots, i'$ inyectados en el mismo periodo que i' . El segundo tiene en cuenta el volumen correspondiente a todos los paquetes que fueron inyectados en periodos anteriores $t=1, \dots, t'-1$. Finalmente, el tercero tiene en cuenta el volumen correspondiente a los paquetes antiguos $o=1, \dots, O$.

$$\sum_{i=1}^{i'} \sum_{j=1}^J D_{i',j,i',t'} + \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{t=1}^{t'-1} D_{i,t,j,i',t'} + \sum_{o=1}^O \sum_{j=1}^J D_{o,j,i',t'} = Q_{i',t'} \quad ; \quad \forall (i', t') \quad (2.37)$$

La cantidad de producto que puede ser transferida desde un paquete en el poliducto a todos los depósitos ubicados a lo largo de la ruta también está limitada. El volumen total de producto transferido desde el paquete s_1 en el poliducto a los depósitos $j=1, \dots, J-1$ cuando se inyecta el paquete s_2 durante el intervalo $(C_{s_2} - L_{s_2}, C_{s_2})$ debe ser inferior al volumen aprovechable (exceptuando el volumen de contacto ya que está contaminado) del paquete s_1 en el instante en el que finaliza la inyección del paquete anterior a s_2 . Sin embargo, todo el volumen (incluyendo el de contacto) puede ser transferido a los depósitos cuando se incluye el último ya que el volumen de contacto puede ser transferido al mismo para su reprocesamiento. Tal limitación queda implementada en el modelo a través de las restricciones mostradas en las ecuaciones (2.38) y (2.39) para paquetes antiguos y nuevos respectivamente. Las tres primeras restricciones de la ecuación (2.38) se aplican al caso en el que se debe excluir el volumen de contacto, mientras que las tres últimas son aplicables al caso en el que todo el volumen puede ser transferido.

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{J-1} D_{o,j,i,t} &\leq W_{o,i-1,t} - WIF0_o \quad ; \quad \forall (o, i, t) : i > 1 \\ \sum_{j=1}^{J-1} D_{o,j,1,t} &\leq W_{o,I,t-1} - WIF0_o \quad ; \quad \forall (o, t) : t > 1 \\ \sum_{j=1}^{J-1} D_{o,j,1,1} &\leq W0_o - WIF0_o \quad ; \quad \forall o \\ \sum_{j=1}^J D_{o,j,i,t} &\leq W_{o,i-1,t} \quad ; \quad \forall (o, i, t) : i > 1 \\ \sum_{j=1}^J D_{o,j,1,t} &\leq W_{o,I,t-1} \quad ; \quad \forall (o, t) : t > 1 \\ \sum_{j=1}^J D_{o,j,1,1} &\leq W0_o \quad ; \quad \forall o \end{aligned} \quad (2.38)$$

Análogamente, las cuatro primeras restricciones de la ecuación (2.39) se aplican al caso en el que se debe excluir el volumen de contacto, mientras que las cuatro últimas son aplicables al caso en el que todo el volumen puede ser transferido.

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=1}^{J-1} D_{i,t,j,i',t'} &\leq W_{i,t,i'-1,t'} - \sum_{p=1}^P \sum_{p'=1}^P WIF_{i,t,p,p'} && ; \quad \forall (i,t,i',t') : i' > 1, t < t' \\
 \sum_{j=1}^{J-1} D_{i,t,j,1,t'} &\leq W_{i,t,I,t'-1} - \sum_{p=1}^P \sum_{p'=1}^P WIF_{i,t,p,p'} && ; \quad \forall (i,t,t') : t < t' \\
 \sum_{j=1}^{J-1} D_{i,t,j,i',t} &\leq W_{i,t,i'-1,t} - \sum_{p=1}^P \sum_{p'=1}^P WIF_{i,t,p,p'} && ; \quad \forall (i,t,i') : i < i' \\
 \sum_{j=1}^{J-1} D_{i,t,j,i,t} &\leq Q_{i,t} - \sum_{p=1}^P \sum_{p'=1}^P WIF_{i,t,p,p'} && ; \quad \forall (i,t) \\
 \sum_{j=1}^{J-1} D_{i,t,j,i',t'} &\leq W_{i,t,i'-1,t'} && ; \quad \forall (i,t,i',t') : i' > 1, t < t' \\
 \sum_{j=1}^{J-1} D_{i,t,j,1,t'} &\leq W_{i,t,I,t'-1} && ; \quad \forall (i,t,t') : t < t' \\
 \sum_{j=1}^{J-1} D_{i,t,j,i',t} &\leq W_{i,t,i'-1,t} && ; \quad \forall (i,t,i') : i < i' \\
 \sum_{j=1}^{J-1} D_{i,t,j,i,t} &\leq Q_{i,t} && ; \quad \forall (i,t)
 \end{aligned} \tag{2.39}$$

2.2.7 Entrega de la demanda a los mercados

Aquí se muestran el conjunto de restricciones asociadas al cumplimiento de la demanda en los mercados. En primer lugar se muestran en la ecuación (2.40) el conjunto de restricciones que especifican el caudal al que se debe entregar la demanda desde los depósitos a los mercados locales. La primera de estas restricciones se aplica al intervalo $(C_{1,t}, hmax \cdot (t-1))$, la segunda al $(C_{i,t}, C_{i-1,t})$ y la tercera al $(hmax \cdot t, C_{I-1,t})$.

$$\begin{aligned}
 qm_{p,j,1,t} &\leq (C_{1,t} - hmax \cdot (t-1)) \cdot vm && ; \quad \forall (t,p,j) \\
 qm_{p,j,i,t} &\leq (C_{i,t} - C_{i-1,t}) \cdot vm && ; \quad \forall (i,t,p,j) : 1 < i < I \\
 qm_{p,j,I,t} &\leq (hmax \cdot t - C_{I-1,t}) \cdot vm && ; \quad \forall (t,p,j)
 \end{aligned} \tag{2.40}$$

Además, el volumen de producto p transferido del depósito j al mercado local durante el periodo t debe ser suficiente como para satisfacer la demanda total para ese periodo $qd_{p,t,j}$. Dicha condición queda implementada en el modelo a través de la restricción mostrada en la ecuación (2.41).

$$\sum_{i=1}^I qm_{p,j,i,t} = qd_{p,t,j} \quad ; \quad \forall (t,p,j) \tag{2.41}$$

2.2.8 Control de inventario en la refinería

Para establecer las restricciones sobre el inventario de cada producto en los tanques de la refinería es necesario medir los niveles de los mismos. Para ello, es necesario definir las variables binarias siguientes:

- La variable $zu_{r,p,i,t}$ cuyo valor es 1 si una porción del $i^{\text{ésimo}}$ paquete inyectado en el periodo t puede ser transferida al depósito j mientras se inyecta el $i^{\text{ésimo}}$ paquete del periodo t' .
- La variable $zl_{r,p,i,t}$ cuyo valor es 1 si la inyección del $i^{\text{ésimo}}$ paquete del periodo t comienza después de que la $r^{\text{ésima}}$ producción de producto p en el mismo periodo halla concluido.

Por definición los valores de dichas variables quedan fijados mediante las restricciones mostradas en las ecuaciones (2.42) y (2.43).

$$(CR_{r,p,t} - LR_{r,p,t}) \cdot zu_{i,t,r,p} \leq C_{i,t} \leq CR_{r,p,t} - LR_{r,p,t} + hmax \cdot t \cdot zu_{i,t,r,p} \quad ; \quad \forall (i,t,r,p) \quad (2.42)$$

$$CR_{r,p,t} \cdot zu_{i,t,r,p} \leq C_{i,t} - L_{i,t} \leq CR_{r,p,t} + hmax \cdot t \cdot zl_{i,t,r,p} \quad ; \quad \forall (i,t,r,p) \quad (2.43)$$

La variable $qu_{r,p,i,t}$ es el volumen de la $r^{\text{ésima}}$ producción de producto p en el periodo t disponible en la refinería en el instante $C_{i,t}$. De acuerdo con esto, pueden darse los tres casos siguientes:

- $C_{i,t} \geq CR_{r,p,t}$, entonces $zu_{r,p,i,t} = 1$ y todo el material producido en la $r^{\text{ésima}}$ producción de producto p en el periodo t ya ha sido descargada al tanque correspondiente de la refinería en el instante $C_{i,t}$.
- $C_{i,t} \leq CR_{r,p,t} - LR_{r,p,t}$, entonces $zu_{r,p,i,t} = 0$ y la $r^{\text{ésima}}$ producción de producto p en el periodo t aún no ha comenzado.
- $CR_{r,p,t} - LR_{r,p,t} \leq C_{i,t} \leq CR_{r,p,t}$, entonces $zu_{r,p,i,t} = 1$ y una porción del material producido en la $r^{\text{ésima}}$ producción de producto p en el periodo t ya ha sido descargada al tanque correspondiente de la refinería durante el intervalo $(CR_{r,p,t} - LR_{r,p,t}, C_{i,t})$.

Considerando los tres casos anteriores, se puede establecer un límite superior sobre la variable $qu_{r,p,i,t}$ a través de las restricciones no lineales mostradas en las ecuaciones (2.44) y (2.45).

$$qu_{i,t,r,p} \leq vr_p \cdot LR_{r,p,t} \cdot zu_{i,t,r,p} \quad ; \quad \forall (i,t,r,p) \quad (2.44)$$

$$qu_{i,t,r,p} \leq vr_p \cdot \left[C_{i,t} - (CR_{r,p,t} - LR_{r,p,t}) \cdot zu_{i,t,r,p} \right] ; \quad \forall (i,t,r,p) \quad (2.45)$$

La variable $ql_{r,p,i,t}$ es el volumen de la r ésima producción de producto p en el periodo t disponible en la refinería en el instante $C_{i,t} - L_{i,t}$. De acuerdo con esto, pueden darse los dos casos siguientes:

- $(C_{i,t} - L_{i,t}) \geq CR_{r,p,t}$, entonces $zl_{r,p,i,t} = 1$ y todo el material producido en la r ésima producción de producto p en el periodo t ya ha sido descargada al tanque correspondiente de la refinería en el instante $(C_{i,t} - L_{i,t})$.
- $(C_{i,t} - L_{i,t}) \leq CR_{r,p,t}$, entonces $zl_{r,p,i,t} = 1$ y una porción del material producido en la r ésima producción de producto p en el periodo t ya ha sido descargada al tanque correspondiente de la refinería durante el intervalo $(C_{i,t} - L_{i,t})$.

Considerando los dos casos anteriores, se puede establecer un límite superior sobre la variable $ql_{r,p,i,t}$ a través de las restricciones no lineales mostradas en las ecuaciones (2.46) y (2.47), donde la constante M_3 se determina mediante $M_3 = 1.1 \times \max(vr_p) \times hmax$.

$$ql_{i,t,r,p} \geq vr_p \cdot LR_{r,p,t} \cdot zl_{i,t,r,p} ; \quad \forall (i,t,r,p) \quad (2.46)$$

$$ql_{i,t,r,p} \geq vr_p \cdot \left[(C_{i,t} - L_{i,t}) - (CR_{r,p,t} - LR_{r,p,t}) \right] - M_3 \cdot zl_{i,t,r,p} ; \quad \forall (i,t,r,p) \quad (2.47)$$

Cada vez que se inyecta un nuevo paquete en el poliducto, su volumen es retirado del tanque de la refinería que contiene el mismo tipo de producto. Por ello, es necesario incluir en el modelo restricciones que tengan en cuenta este hecho para poder medir adecuadamente los niveles de inventario de producto en todos los tanques de la refinería. El volumen de material retirado del tanque de la refinería conteniendo producto p e inyectado en el i ésimo paquete del periodo t es igual al volumen original de dicho paquete, $Q_{i,t}$, si dicho producto ha sido asignado a dicho paquete, es decir, $y_{i,t,p} = 1$. En otro caso, no se retirará material del tanque correspondiente de la refinería durante el intervalo $(C_{i,t} - L_{i,t}, C_{i,t})$. Estas restricciones quedan implementadas en el modelo a través de las ecuaciones (2.48) y (2.49).

$$A_{i,t,p} \leq M_2 \cdot y_{i,t,p} ; \quad \forall (i,t,p) \quad (2.48)$$

$$\sum_{p=1}^P A_{i,t,p} = Q_{i,t} ; \quad \forall (i,t) \quad (2.49)$$

Se supone que el caudal con el que se inyectan los paquetes en el poliducto es siempre mayor o igual que el caudal de procesamiento para cualquier producción r .

Basado en esta suposición, la peor situación para extraer producto p del correspondiente tanque de la refinería como consecuencia de la inyección de un paquete conteniendo dicho producto en el periodo t ocurre en el instante en el que concluye la inyección de dicho paquete. Por tanto, para asegurar que los niveles de inventario no caigan por debajo de un cierto límite inferior $IRmin_p$ es suficiente con imponer que dichos niveles sean superiores a $IRmin_p$ en los instantes en los que finaliza la inyección de cada nuevo paquete en el poliducto. Dicha restricción queda implementada en el modelo a través de la ecuación (2.50).

$$IRF_{p,i,1} = IR0_p + \sum_{r=1}^R qu_{i,1,r,p} - \sum_{i'=1}^i A_{i',1,p} \geq IRmin_p \quad ; \quad \forall(i,p)$$

$$IRF_{p,i,t} = IRF_{p,i,t-1} + \sum_{r=1}^R qu_{i,t,r,p} - \sum_{i'=1}^i A_{i',t,p} \geq IRmin_p \quad ; \quad \forall(i,t,p): t > 1$$
(2.50)

Análogamente, la peor situación para descargar el producto p al correspondiente tanque de la refinería como consecuencia de la $résima$ producción de producto p en el periodo t ocurre en el instante en el que comienza la inyección de un paquete en el poliducto conteniendo el mismo producto p . Por tanto, para asegurar que los niveles de inventario no excedan un cierto límite superior $IRmax_p$ es suficiente con imponer que dichos niveles sean inferiores a $IRmax_p$ en los instantes en los que comienza la inyección de cada nuevo paquete en el poliducto. Dicha restricción queda implementada en el modelo a través de la ecuación (2.51).

$$IRS_{p,i,1} = IR0_p + \sum_{r=1}^R ql_{i,1,r,p} - \sum_{i'=1}^i A_{i',1,p} \geq IRmax_p \quad ; \quad \forall(i,p)$$

$$IRS_{p,i,t} = IRS_{p,i,t-1} + \sum_{r=1}^R ql_{i,t,r,p} - \sum_{i'=1}^i A_{i',t,p} \geq IRmax_p \quad ; \quad \forall(i,t,p): t > 1$$
(2.51)

2.2.9 Control de inventario en los depósitos

Finalmente, en esta sección se establecen las restricciones sobre el inventario de cada producto en los tanques de cada uno de los depósitos de distribución final. La cantidad de producto p que puede ser transferida desde un paquete i inyectado en el periodo t y conteniendo dicho producto p a cada uno de los depósitos j cada vez que se inyecta otro paquete i' en el periodo t' , $DV_{i,t,p,j,i',t'}$, será igual a $D_{i,t,j,i',t'}$ si $y_{i,t,p}=1$ e igual a cero en caso contrario. Esta restricción queda implementada en el modelo a través de las ecuaciones (2.52) y (2.53) para paquetes antiguos y de las ecuaciones (2.54) y (2.55) para nuevos.

$$DV_{o,p,j,i,t} \leq M_2 \cdot y_{o,p} \quad ; \quad \forall(o,p,j,i,t)$$
(2.52)

$$\sum_{p=1}^P DV_{o,p,j,i,t} = D_{o,j,i,t} \quad ; \quad \forall (o,j,i,t) \quad (2.53)$$

$$\begin{aligned} DV_{i,t,p,j,i',t'} &\leq M_2 \cdot y_{i,t,p} \quad ; \quad \forall (i,t,p,j,i',t') : t < t' \\ DV_{i,t,p,j,i',t} &\leq M_2 \cdot y_{i,t,p} \quad ; \quad \forall (i,t,p,j,i') : i \leq i' \end{aligned} \quad (2.54)$$

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^P DV_{i,t,p,j,i',t'} &= D_{i,t,j,i',t'} \quad ; \quad \forall (i,t,p,i',t') : t < t' \\ \sum_{p=1}^P DV_{i,t,p,j,i',t} &= D_{i,t,j,i',t} \quad ; \quad \forall (i,t,p,i') : i \leq i' \end{aligned} \quad (2.55)$$

Una vez determinada la cantidad de producto que se puede transferir desde los paquetes en tránsito por el poliducto a cada uno de los depósitos, ya se está en disposición de establecer los límites permitidos para el nivel de inventario en los mismos. Dichos límites se imponen mediante la restricción mostrada en la ecuación (2.56), donde la variable $ID_{p,j,i,t}$ se calcula a través del conjunto de restricciones mostradas en la ecuación (2.57).

$$ID_{min_{p,j}} \leq ID_{p,j,i,t} \leq ID_{max_{p,j}} \quad ; \quad \forall (p,j,i,t) \quad (2.56)$$

$$\begin{aligned} ID_{p,j,i',t'} &= ID_{p,j,i'-1,t'} + \left(\sum_{i=1}^{i'} DV_{i,t',p,j,i',t'} + \sum_{i=1}^I \sum_{t=1}^{t'-1} DV_{i,t,p,j,i',t'} + \sum_{o=1}^O DV_{o,p,j,i',t'} \right) \\ &\quad - qm_{p,j,i',t'} \quad ; \quad \forall (p,j,i',t') : i' > 1 \\ ID_{p,j,1,t'} &= ID_{p,j,1,t'-1} + \left(DV_{1,t',p,j,1,t'} + \sum_{i=1}^I \sum_{t=1}^{t'-1} DV_{i,t,p,j,1,t'} + \sum_{o=1}^O DV_{o,p,j,1,t'} \right) \\ &\quad - qm_{p,j,i',t'} \quad ; \quad \forall (p,j,t') : t' > 1 \\ ID_{p,j,1,1} &= ID_{p,j} + \left(DV_{1,1,p,j,1,1} + \sum_{o=1}^O DV_{o,p,j,1,1} \right) \\ &\quad - qm_{p,j,1,1} \quad ; \quad \forall (p,j) \end{aligned} \quad (2.57)$$

2.3 Distribución mediante una red de poliductos

Otro problema de mayor complejidad que el anterior es el relativo a una red de poliductos. Este problema surge como consecuencia del uso de recursos compartidos. En este caso, el conjunto de poliductos que forman la red comparten fuentes, destinos y conexiones intermedias. Además, a medida que la topología de dicha red se complica, aumenta el número de posibles soluciones a un mismo problema, haciendo más compleja la búsqueda de la óptima. En el caso en el que se trate de una red compuesta de varios poliductos con conexiones intermedias es necesario adoptar un

enfoque en tiempo discreto para poder controlar los niveles de inventario en dichas conexiones.

2.3.1 Características del modelo

La red de poliductos bajo estudio se puede representar inicialmente mediante un conjunto de nodos N , conexiones C y tipos de producto P , cuya actividad viene determinada por un intervalo de tiempo T en donde se debe satisfacer la demanda. La figura 2.7 muestra un ejemplo de red con estas características. Esta red está compuesta por dos nodos fuente (1 y 2), dos nodos intermedios (3 y 4) y tres nodos destino (4, 5 y 6). En el poliducto que interconecta los nodos 3 y 4 el producto puede fluir en ambos sentidos.

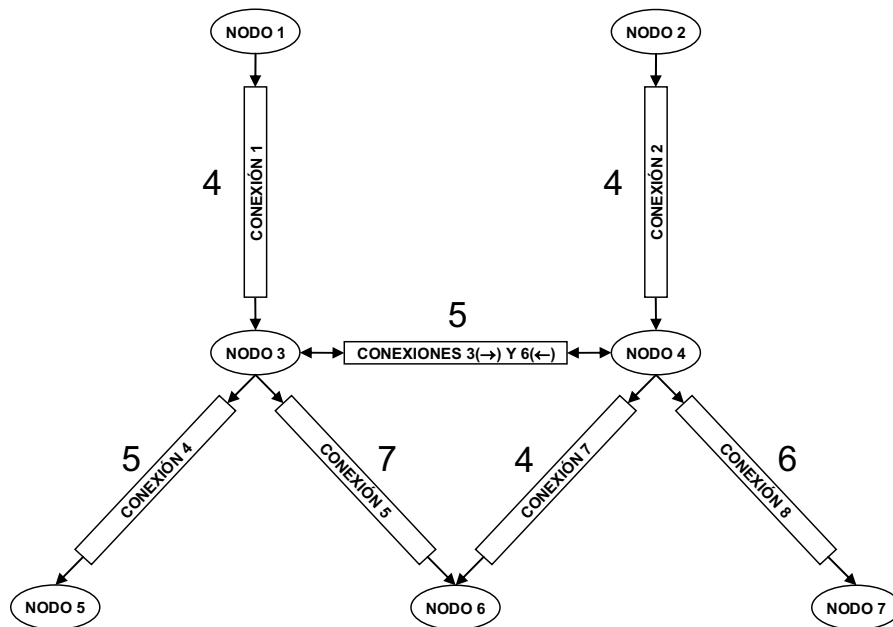


Figura 2.7: Modelo de red.

En cuanto a los componentes de la red, $N=NF\cup NI\cup ND$ es el conjunto de nodos de la misma, siendo NF el subconjunto de nodos fuente, NI el subconjunto de nodos intermedios y ND el subconjunto de nodos destino. Por nodos fuente se entiende aquellos que sólo tienen conexiones salientes, por nodos destino aquellos que sólo tienen conexiones entrantes y por nodos intermedios aquellos que tienen conexiones tanto salientes como entrantes. C es el conjunto de conexiones de la red, a partir del cual se definen los conjuntos CB , CE_n y CS_n . CB es el conjunto de conexiones para las que existe la conexión opuesta. Dicho conjunto es bidimensional ya que dichas

conexiones se definen por pares. Por ejemplo, para la red de la figura 2.7, el conjunto de todas las conexiones de la red viene dado por $C=\{c_1,c_2,c_3,c_4,c_5,c_6,c_7,c_8\}$, mientras que $CB=\{(c_3,c_6),(c_6,c_3)\}$. Se definen CE_n y CS_n como los subconjuntos de conexiones entrantes y salientes del nodo n respectivamente. Por ejemplo, para el nodo 3 de la red considerada se tienen los subconjuntos $CE_n=\{c_1,c_6\}$ y $CS_n=\{c_3,c_4,c_5\}$. Finalmente, P es el conjunto de tipos de producto que se pueden distribuir a través de la red. Dicho conjunto incluye un producto adicional (codificado como 0) para impulsar los productos ubicados dentro del poliducto hasta su destino en el caso de que no haya más productos disponibles en las fuentes.

Para simplificar el problema se supone que todos los poliductos tienen el mismo diámetro y características. Además se supone que los diferentes tipos de producto avanzan con la misma velocidad ocupando el mismo volumen en el interior del poliducto. Cada nodo fuente o intermedio puede cambiar el tipo de producto que lanza a través de un poliducto sólo en unos instantes fijos a priori $t=0,T_s,2\times T_s,3\times T_s,\dots,T\times T_s$. El periodo T_s está normalizado a la unidad. De esta forma el modo en el que dichos nodos suministran el producto a la red está discretizado. Un ejemplo de dicho modo de operación para uno de los nodos de la red se muestra en la figura 2.8:

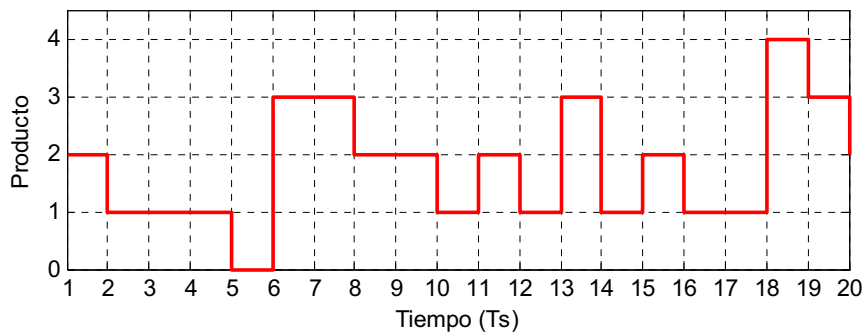


Figura 2.8: Modo de operación para la inyección de paquetes.

Por tanto, el transporte de producto puede verse como el transporte de paquetes discretos. Cada paquete contiene la cantidad de producto lanzada por un nodo por unidad de tiempo (T_s) y también está normalizada a la unidad. La figura 2.9 muestra la evolución temporal de estos paquetes en el interior de un poliducto para el modo de operación mostrado en la figura 2.8. En dicha figura, t es el instante actual y los números indican el tipo de producto reservando el 0 para el caso en el que se envíe producto de relleno. Cada segmento cilíndrico representa la unidad utilizada para medir la longitud de los poliductos y coincide con el volumen que ocupa cada paquete en el interior del poliducto.

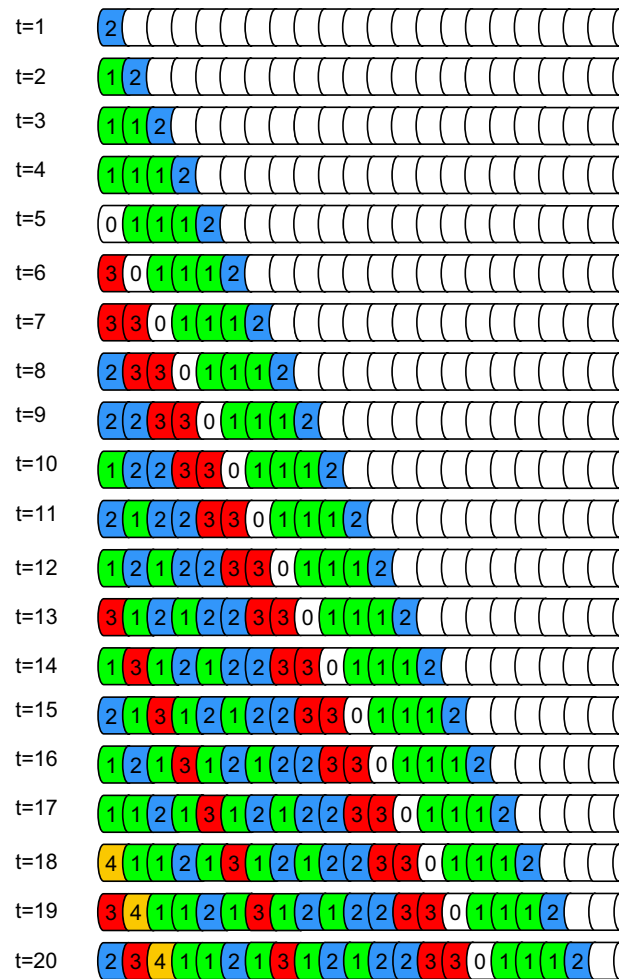


Figura 2.9: Evolución temporal de los paquetes en el interior de un poliducto.

A través de la red pueden distribuirse tantos tipos de paquetes diferentes como número de productos existan. Cada nodo intermedio y destino tienen tanques para almacenar cada uno de los diferentes tipos de productos que puede recibir. Se supone también que los nodos fuente envían el producto desde tanques en donde éste está almacenado. El tamaño de dichos tanques se mide en términos del número de paquetes que pueden almacenar. Los números que aparecen al lado de cada una de las conexiones de la figura 2.7 proporcionan la distancia normalizada de cada uno de los poliductos de la red en términos del número de unidades de tiempo que necesita un paquete para recorrer todo el poliducto. Por ejemplo, el número 7 en la conexión 5 significa que un paquete invierte 7 unidades de tiempo para ir desde el nodo 3 al nodo 6 a través del poliducto correspondiente a dicha conexión, o que el poliducto puede contener 7 paquetes en cada instante de tiempo.

Haciendo uso de los conjuntos, parámetros y variables que aparecen en la *Lista de Símbolos* mostrada al comienzo de la tesis, se puede escribir un modelo matemático compuesto por una serie de restricciones más una función de coste que represente el objetivo del problema a resolver. La situación de no lanzamiento de paquete a través de la conexión c en el instante t está implícitamente modelada cuando $y_{t,c}=0$, y todos los nodos se encuentran en dicha situación en los periodos 0 y $T+1$. El periodo 0 corresponde al periodo inmediatamente anterior al comienzo de la planificación. Análogamente, el periodo $T+1$ corresponde al periodo inmediatamente posterior al término de la planificación. Todas las ecuaciones que forman el modelo desarrollado pueden clasificarse en los siguientes grupos:

- Función objetivo.
- Inyección de nuevos paquetes en el poliducto.
- Seguimiento de paquetes.
- Control de inventario en los depósitos.

2.3.2 Función objetivo

El objetivo del problema es minimizar el coste total de la operación del poliducto incluyendo los cinco términos siguientes:

- Un coste asociado al bombeo de nuevos productos en el poliducto en condiciones normales.
- Un coste de penalización asociado al bombeo de nuevos productos en el poliducto durante ciertos intervalos de tiempo denominados de alto coste.
- Un coste asociado al reprocesamiento de la mezcla de producto generada en las proximidades al contacto de paquetes con productos diferentes.
- Un coste asociado al almacenamiento temporal (inventario) de producto en los depósitos de la refinería.
- Un coste asociado al almacenamiento temporal de producto en los depósitos de las estaciones de distribución final (terminales).

La ecuación (2.58) muestra una posible función objetivo que contempla todos los costes arriba mencionados. El primer término calcula el coste de bombeo asociado al transporte de cada producto p a través de cada conexión c . Este término presenta un

coste diferente, $CI_{c,p}$, dependiendo del producto p y de la conexión c . El segundo término penaliza a la solución obtenida por el bombeo de producto en cada poliducto durante los intervalos de alto coste, utilizando un factor de penalización diferente, $CT_{t,c}$, dependiendo del intervalo de alto coste t y de la conexión c . El tercer término calcula el coste de reprocesamiento, $CR_{p,p'}$, del material mezclado en el volumen de contacto de dos paquetes con productos p y p' diferentes inyectados de forma consecutiva en el mismo poliducto. Finalmente, los dos últimos términos calculan el coste de inventario debido al almacenamiento temporal de cada producto p en cada refinería o depósito intermedio n , con un coste $CA_{n,p}$, diferente para cada nodo n y producto p .

$$\begin{aligned}
 \min z = & \sum_{t=1}^T \sum_{c=1}^C \sum_{p=0}^P CI_{c,p} \times y_{t,c,p} + \\
 & \sum_{t=1}^T \sum_{c=1}^C CT_{t,c} \times \sum_{p=0}^P y_{t,c,p} + \\
 & \sum_{t=1}^T \sum_{c=1}^C \sum_{p=1}^P \sum_{p'=1}^P CR_{p,p'} \times v_{t,c,p,p'} + \\
 & \sum_{t=1}^T \sum_{t \in NS} \sum_{p=0}^P CA_{n,p} \times a_{t,n,p} + \\
 & \sum_{t=1}^T \sum_{t \in NI} \sum_{p=0}^P CA_{n,p} \times a_{t,n,p}
 \end{aligned} \tag{2.58}$$

2.3.3 Inyección de nuevos paquetes en cada poliducto

En esta sección se describen las restricciones relacionadas con la inyección de nuevos paquetes en la red. En primer lugar se muestran el conjunto de restricciones relacionadas con la máxima cantidad de producto que puede inyectarse en cada poliducto por unidad de tiempo. Dichas restricciones se muestran en la ecuación (2.59), que limita a 1 el número máximo de paquetes que pueden inyectarse por la cada conexión en cada instante. Si la suma es cero, entonces no se inyecta ningún paquete por la conexión c en el instante t .

$$\sum_{p=0}^P y_{t,c,p} \leq 1 \quad ; \quad \forall (t,c) \tag{2.59}$$

En los poliductos bidireccionales sólo se puede propagar producto en un sentido. Por tanto, para cada poliducto bidireccional con conexiones (c,c') se debe cumplir la restricción mostrada en la ecuación (2.60). Como puede verse dicha ecuación limita la inyección de paquetes en cada instante a través de una y sólo una de las conexiones pertenecientes a cada poliducto bidireccional.

$$\sum_{p=0}^P (y_{t,c,p} + y_{t,c',p}) \leq 1 \quad ; \quad \forall (t,c,c') : (c,c') \in CB \quad (2.60)$$

A continuación se muestran el conjunto de restricciones relacionadas con el contacto de los paquetes inyectados de forma consecutiva en el poliducto.

$$\begin{aligned} v_{t,c,p,p'} &\geq VC_{p,p'} \cdot (x_{t-1,c,1,p} + y_{t,c,p'} - 1) \quad ; \quad \forall (t,c,p,p') : t > 1 \\ v_{1,c,p,p'} &\geq VC_{p,p'} \cdot (x_{0,c,1,p} + y_{1,c,p'} - 1) \quad ; \quad \forall (c,p,p') \end{aligned} \quad (2.61)$$

Debido a la alta contaminación de ciertos productos diferentes cuando estos se encuentran en contacto, algunas secuencias de dichos productos están prohibidas. Las restricciones que evitan que tales secuencias de productos se encuentren en la solución al problema se muestran en la ecuación (2.62).

$$\begin{aligned} x_{t-1,c,1,p} + y_{t,c,p'} &\leq 1 \quad ; \quad \forall (t,c,p,p') : t > 1, (p,p') \in S \\ x_{0,c,1,p} + y_{1,c,p'} &\leq 1 \quad ; \quad \forall (c,p,p') : (p,p') \in S \end{aligned} \quad (2.62)$$

2.3.4 Seguimiento de paquetes

Aquí se muestran las restricciones relacionadas con la ubicación exacta de cada paquete inyectado en cada uno de los poliductos de la red. La ubicación de los paquetes que se encuentran en la red en el instante inicial se conoce a través del parámetro $x_{0,c,b,p}$. En los instantes siguientes, solamente puede haber un único paquete en cada una de las posiciones de la red. Dicha condición queda reflejada en el modelo mediante la ecuación (2.63).

$$\sum_{p=0}^P x_{t,c,b,p} = 1 \quad ; \quad \forall (t,c,b,p) \quad (2.63)$$

Por otro lado, dada la incompresibilidad del fluido transportado, los paquetes avanzarán una posición siempre y cuando se inyecte un nuevo paquete en el poliducto en el que se encuentran. La inyección o no de un paquete por la conexión c en el instante t está determinada por la variable $s_{t,c}$ cuyo valor queda fijado mediante la ecuación (2.64). En cuanto al avance de los productos en función del valor de dicha variable, se tienen las restricciones mostradas en las ecuaciones (2.65) y (2.66) para las conexiones que no pertenezcan a poliductos bidireccionales, y las ecuaciones (2.67), (2.68) y (2.69) para las pertenecientes a poliductos bidireccionales.

$$s_{t,c} = \sum_{p=0}^P y_{t,c,p} \quad ; \quad \forall (t,c) \quad (2.64)$$

$$\begin{aligned}
 x_{t,c,b,p} &\leq x_{t-1,c,b-1,p} + (1 - s_{t,c}) \cdot M && ; \quad \forall (t,c,b,p) : t > 1, c \notin CB, b > 1 \\
 x_{1,c,b,p} &\leq xo_{c,b-1,p} + (1 - s_{1,c}) \cdot M && ; \quad \forall (c,b,p) : c \notin CB, b > 1 \\
 x_{t,c,1,p} &\leq y_{t,c,p} + (1 - s_{t,c}) \cdot M && ; \quad \forall (t,c,p) : t > 1, c \notin CB
 \end{aligned} \tag{2.65}$$

$$\begin{aligned}
 x_{t,c,b,p} &\leq x_{t-1,c,b,p} + s_{t,c} \cdot M && ; \quad \forall (t,c,b,p) : t > 1, c \notin CB \\
 x_{1,c,b,p} &\leq xo_{c,b,p} + s_{1,c} \cdot M && ; \quad \forall (c,b,p) : c \notin CB
 \end{aligned} \tag{2.66}$$

$$\begin{aligned}
 x_{t,c,b,p} &\leq x_{t-1,c,b-1,p} + (1 - s_{t,c}) \cdot M && ; \quad \forall (t,c,b,p) : t > 1, (c,c') \in CB, b > 1 \\
 x_{1,c,b,p} &\leq xo_{c,b-1,p} + (1 - s_{1,c}) \cdot M && ; \quad \forall (c,b,p) : (c,c') \in CB, b > 1 \\
 x_{t,c,1,p} &\leq y_{t,c,p} + (1 - s_{t,c}) \cdot M && ; \quad \forall (t,c,p) : t > 1, (c,c') \in CB \\
 x_{t,c',b,p} &\leq x_{t-1,c',b+1,p} + (1 - s_{t,c'}) \cdot M && ; \quad \forall (t,c,c',b,p) : t > 1, (c,c') \in CB, b < B_c \\
 x_{1,c',b,p} &\leq xo_{c',b+1,p} + (1 - s_{1,c'}) \cdot M && ; \quad \forall (c,c',b,p) : (c,c') \in CB, b < B_c \\
 x_{t,c',1,p} &\leq y_{t,c',p} + (1 - s_{t,c'}) \cdot M && ; \quad \forall (t,c,c',p) : t > 1, (c,c') \in CB
 \end{aligned} \tag{2.67}$$

$$\begin{aligned}
 x_{t,c',b,p} &\leq x_{t-1,c',b-1,p} + (1 - s_{t,c'}) \cdot M && ; \quad \forall (t,c,b,p) : t > 1, (c,c') \in CB, b > 1 \\
 x_{1,c',b,p} &\leq xo_{c',b-1,p} + (1 - s_{1,c'}) \cdot M && ; \quad \forall (c,b,p) : (c,c') \in CB, b > 1 \\
 x_{t,c',1,p} &\leq y_{t,c',p} + (1 - s_{t,c'}) \cdot M && ; \quad \forall (t,c,p) : t > 1, (c,c') \in CB \\
 x_{t,c,b,p} &\leq x_{t-1,c,b+1,p} + (1 - s_{t,c}) \cdot M && ; \quad \forall (t,c,c',b,p) : t > 1, (c,c') \in CB, b < B_c \\
 x_{1,c,b,p} &\leq xo_{c,b+1,p} + (1 - s_{1,c}) \cdot M && ; \quad \forall (c,c',b,p) : (c,c') \in CB, b < B_c \\
 x_{t,c,1,p} &\leq y_{t,c,p} + (1 - s_{t,c}) \cdot M && ; \quad \forall (t,c,c',p) : t > 1, (c,c') \in CB
 \end{aligned} \tag{2.68}$$

$$\begin{aligned}
 x_{t,c,b,p} &\leq x_{t-1,c,b,p} + (s_{t,c} + s_{t,c'}) \cdot M && ; \quad \forall (t,c,b,p) : t > 1, (c,c') \in CB \\
 x_{t,c',b,p} &\leq x_{t-1,c',b,p} + (s_{t,c} + s_{t,c'}) \cdot M && ; \quad \forall (t,c,b,p) : t > 1, (c,c') \in CB \\
 x_{1,c,b,p} &\leq xo_{c,b,p} + (s_{t,c} + s_{t,c'}) \cdot M && ; \quad \forall (c,b,p) : (c,c') \in CB \\
 x_{1,c',b,p} &\leq xo_{c',b,p} + (s_{t,c} + s_{t,c'}) \cdot M && ; \quad \forall (c,b,p) : (c,c') \in CB
 \end{aligned} \tag{2.69}$$

2.3.5 Control de inventario en los depósitos

Para terminar, se muestran aquí las restricciones relacionadas con el balance de producto en cada uno de los nodos de la red. Dicho balance debe tener en cuenta el nivel de inventario en cada depósito de la red, cuyo valor está sujeto además a unos valores iniciales y finales. Dichas restricciones dependen de la topología. En primer lugar se muestran en la ecuación (2.70) las restricciones asociadas a los nodos fuente. La primera restricción corresponde al instante inicial, la segunda a los estados intermedios y la tercera al instante final. Como puede verse, seleccionando unos valores adecuados para los parámetros $AO_{n,p}$ y $AT_{n,p}$ se puede obligar a que una determinada cantidad de cada producto sea inyectada en la red desde cada nodo fuente (refinería).

$$\begin{aligned}
 a_{t,n,p} &= a_{t-1,n,p} - \sum_{c \in CS_n} y_{t,c,p} \quad ; \quad \forall (t,n,p) : t > 1, n \in NS \\
 a_{1,n,p} &= A\theta_{n,p} - \sum_{c \in CS_n} y_{1,c,p} \quad ; \quad \forall (n,p) : n \in NS \\
 AT_{n,p} &= a_{T,n,p} \quad ; \quad \forall (n,p) : n \in NS
 \end{aligned} \tag{2.70}$$

En segundo lugar, la ecuación (2.71) muestra las restricciones asociadas a los nodos intermedios. De nuevo, la primera restricción corresponde al instante inicial, la segunda a los estados intermedios y la tercera al instante final.

$$\begin{aligned}
 a_{t,n,p} &= a_{t-1,n,p} - \sum_{c \in CS_n} y_{t,c,p} + \sum_{c \in CE_n} x_{t,c,B_c,p} \cdot s_{t,c} \quad ; \quad \forall (t,n,p) : t > 1, n \in NI \\
 a_{1,n,p} &= A\theta_{n,p} - \sum_{c \in CS_n} y_{1,c,p} + \sum_{c \in CE_n} x_{1,c,B_c,p} \cdot s_{1,c} \quad ; \quad \forall (n,p) : n \in NI \\
 AT_{n,p} &= a_{T,n,p} \quad ; \quad \forall (n,p) : n \in NI
 \end{aligned} \tag{2.71}$$

Finalmente, la ecuación (2.72) muestra las restricciones asociadas a los nodos destino. Igual que en los dos casos anteriores, la primera restricción corresponde al instante inicial, la segunda a los estados intermedios y la tercera al instante final. Como puede verse, seleccionando unos valores adecuados para los parámetros $A\theta_{n,p}$ y $AT_{n,p}$ se puede obligar a que una determinada cantidad de cada producto llegue a cada nodo destino dentro del horizonte de planificación.

$$\begin{aligned}
 a_{t,n,p} &= a_{t-1,n,p} + \sum_{c \in CE_n} x_{t,c,B_c,p} \cdot s_{t,c} \quad ; \quad \forall (t,n,p) : t > 1, n \in ND \\
 a_{1,n,p} &= A\theta_{n,p} + \sum_{c \in CE_n} x_{1,c,B_c,p} \cdot s_{1,c} \quad ; \quad \forall (n,p) : n \in ND \\
 AT_{n,p} &= a_{T,n,p} \quad ; \quad \forall (n,p) : n \in ND
 \end{aligned} \tag{2.72}$$

Los nodos fuente solamente tienen conexiones salientes por lo que el contenido de sus tanques sólo puede disminuir desde $A\theta_{n,p}$ hasta $AT_{n,p}$. Los nodos destino solamente tienen conexiones entrantes por lo que el contenido de sus tanques sólo puede aumentar desde $A\theta_{n,p}$ hasta $AT_{n,p}$. Sin embargo, los nodos intermedios tienen conexiones entrantes y salientes por lo que el contenido de sus tanques puede aumentar y disminuir haciendo necesaria la incorporación al modelo de restricciones que aseguren que los niveles de inventario permanezcan dentro de sus límites. Dichas restricciones se muestran en la ecuación (2.73) mediante el uso de los límites $Amin$ y $Amax$. Además, fijando a cero ambos límites se puede obligar a que no se permita el almacenamiento temporal de producto en los nodos intermedios, por lo que la funcionalidad de dichos nodos como bifurcadores de producto sin almacén queda automáticamente implementada en el modelo.

$$Amin_{n,p} \leq a_{t,n,p} \leq Amax_{n,p} \quad ; \quad \forall (t,n,p) : n \in NI \quad (2.73)$$

2.3.6 Modelo reducido

Existen determinadas situaciones en las que se puede adoptar un modelo en el que se reduce de forma considerable el número de variables (sobre todo binarias) asociadas al modelo. La mayor simplificación se produce en el caso en el que no se permiten paradas en el funcionamiento del sistema durante todo el intervalo de planificación T . En este caso, no es necesario utilizar las restricciones relacionadas con el seguimiento de paquetes en la red. Dichas restricciones son necesarias para fijar el valor de las variables x utilizadas en las ecuaciones (2.71) y (2.72).

En primer lugar véase la simplificación que sufre la función objetivo mostrada en la ecuación (2.74). Dicha ecuación difiere de la (2.58) en que se han suprimido los dos primeros términos, referentes a la inyección de nuevos productos dentro de cada poliducto. Dado que el sistema no admite paradas, ya no tiene sentido incluir ningún término asociado a la inyección de nuevos productos en ciertos instantes del horizonte de planificación. Por la misma razón también se ha suprimido el término asociado al bombeo de productos en cada conexión, ya que éste es continuo durante todo el horizonte de planificación.

$$\begin{aligned} \min z = & \sum_{t=1}^T \sum_{c=1}^C \sum_{p=1}^P \sum_{p'=1}^P CR_{p,p'} \times uc_{t,c,p,p'} + \\ & \sum_{t=1}^T \sum_{t \in NS} \sum_{p=0}^P CA_{n,p} \times a_{t,n,p} + \\ & \sum_{t=1}^T \sum_{t \in NI} \sum_{p=0}^P CA_{n,p} \times a_{t,n,p} \end{aligned} \quad (2.74)$$

A continuación se describen las restricciones relacionadas con la inyección de nuevos paquetes en el poliducto. Dado que en cada poliducto sólo se debe inyectar un producto por unidad de tiempo, la ecuación (2.59) se transforma en la ecuación (2.75). Esta condición queda implementada en el modelo a través de la ecuación (2.71). Además, dicha ecuación sólo se aplica a los instantes inferiores a $T-B_c+2$, ya que no debe salir producto por un poliducto si éste no va a llegar a su destino. Para los instantes restantes se inyecta producto de relleno con el objetivo de empujar el producto en el interior de cada poliducto haciendo que éste llegue a su destino. Esta condición se implementa mediante la restricción mostrada en la ecuación (2.76).

$$\sum_{p=0}^P y_{t,c,p} = 1 \quad ; \quad \forall (t,c) : t < T - B_c + 2 \quad (2.75)$$

$$\begin{aligned} y_{t,c,p} &= 0 & ; & \quad \forall (t,c,p) : t > T - B_c + 1, p > 0 \\ y_{t,c,0} &= 1 & ; & \quad \forall (t,c) : t > T - B_c + 1 \end{aligned} \quad (2.76)$$

Dicho modelo también contempla la existencia de poliductos bidireccionales en la red. Sin embargo, la ecuación (2.60) debe ser modificada debido a la no existencia de paradas en el funcionamiento del sistema. Si se inyecta producto en un instante de tiempo t por un poliducto bidireccional formado por B_c tramos en un sentido, en el otro sentido no se puede lanzar producto en los instantes $t, \dots, t+B_c-1$. Por tanto, para cada par $(c,c') \in CB$ se debe cumplir la restricción mostrada en la ecuación (2.77).

$$\sum_{p=1}^P (y_{t,c,p} + y_{t',c',p}) \leq 1 \quad ; \quad \forall (t,t',c,c') : t < T - B_c + 2, t \leq t' \leq T + B_c - 1, (c,c') \in CB \quad (2.77)$$

La ecuación (2.78) implementa el conjunto de restricciones relacionadas con el contacto de los paquetes inyectados de forma consecutiva en el poliducto. Dichas restricciones difieren de las mostradas en la ecuación (2.61) en que ya no aparece la variable x (excluida del modelo reducido).

$$\begin{aligned} v_{t,c,p,p'} &\geq VC_{p,p'} \cdot (y_{t-1,c,p} + y_{t,c,p'} - 1) & ; & \quad \forall (t,c,p,p') : t > 1 \\ v_{1,c,p,p'} &\geq VC_{p,p'} \cdot (y_{1,c,p} - 1) & ; & \quad \forall (c,p,p') : p > 0 \\ v_{1,c,0,p'} &\geq VC_{0,p'} \cdot y_{1,c,p'} & ; & \quad \forall (c,p') \end{aligned} \quad (2.78)$$

Análogamente, se muestran en las ecuaciones (2.79) las restricciones modificadas correspondientes a la existencia de secuencias de paquetes prohibidas.

$$\begin{aligned} y_{t-1,c,p} + y_{t,c,p'} &\leq 1 & ; & \quad \forall (t,c,p,p') : t > 1, (p,p') \in S \\ y_{1,c,p'} &\leq 1 & ; & \quad \forall (c,p,p') : (p,p') \in S \end{aligned} \quad (2.79)$$

Finalmente, se muestran las restricciones relacionadas con el balance de producto en cada uno de los nodos de la red que además está sujeto a valores iniciales y finales de cada uno de los tanques de la misma. Dichas restricciones son las que fijan el nivel de inventario en todos los depósitos de la red y son similares a las mostradas en las ecuaciones (2.70–72), pero sin la utilización de la variable x tal y como se muestra en las ecuaciones (2.80–82). Además se mantiene la restricción sobre los límites superior e inferior de tales niveles de inventario.

$$\begin{aligned} a_{t,n,p} &= a_{t-1,n,p} - \sum_{c \in CS_n} y_{t,c,p} & ; & \quad \forall (t,n,p) : t > 1, n \in NS \\ a_{1,n,p} &= A0_{n,p} - \sum_{c \in CS_n} y_{1,c,p} & ; & \quad \forall (n,p) : n \in NS \\ AT_{n,p} &= a_{T,n,p} & ; & \quad \forall (n,p) : n \in NS \end{aligned} \quad (2.80)$$

$$\begin{aligned} \alpha_{t,n,p} &= \alpha_{t-1,n,p} - \sum_{c \in CS_n} y_{t,c,p} + \sum_{c \in CE_n} y_{t-B_c,c,p} \quad ; \quad \forall (t,n,p) : t > 1, n \in NI \\ \alpha_{1,n,p} &= A\theta_{n,p} - \sum_{c \in CS_n} y_{1,c,p} \quad ; \quad \forall (n,p) : n \in NI \end{aligned} \quad (2.81)$$

$$AT_{n,p} = \alpha_{T,n,p} + \sum_{c \in CE_n} y_{T+1-B_c,c,p} \quad ; \quad \forall (n,p) : n \in NI$$

$$\begin{aligned} \alpha_{t,n,p} &= \alpha_{t-1,n,p} + \sum_{c \in CE_n} y_{t-B_c,c,p} \quad ; \quad \forall (t,n,p) : t > 1, n \in ND \\ \alpha_{1,n,p} &= A\theta_{n,p} \quad ; \quad \forall (n,p) : n \in ND \end{aligned} \quad (2.82)$$

$$AT_{n,p} = \alpha_{T,n,p} + \sum_{c \in CE_n} y_{T+1-B_c,c,p} \quad ; \quad \forall (n,p) : n \in ND$$

$$Amin_{n,p} \leq \alpha_{t,n,p} \leq Amax_{n,p} \quad ; \quad \forall (t,n,p) : n \in NI \quad (2.83)$$

2.3.7 Modelos simplificados

Un caso especial es aquel en el que el tanto el volumen de contacto (VC) como el coste asociado al reprocesamiento de la mezcla de productos diferentes (CR) sea el mismo. En tal situación ya no es necesaria la utilización de las variables vc , desapareciendo por tanto las ecuaciones (2.78) y (2.79). Además, el término de la función objetivo asociado a dicho reprocesamiento se puede escribir en función del número de cambios de producto tal y como se muestra en la ecuación (2.84). La suma se realiza para la primera sección de cada poliducto en instantes de tiempo consecutivos. El factor $\frac{1}{2}$ aparece para no contar dos veces las ocasiones en las que tiene lugar un cambio de producto, que es precisamente el cálculo deseado para la función objetivo.

$$z_{reprocesamiento} = CR \times VC \cdot \left(\sum_{c=1}^C (1 - y_{1,c,0}) + \frac{1}{2} \sum_{t=2}^T \sum_{c=1}^C \sum_{p=0}^P |y_{t-1,c,p} - y_{t,c,p}| \right) \quad (2.84)$$

Como puede verse, dicho término es no lineal. Dado que los algoritmos para programación lineal y cuadrática son más eficientes que los no lineales, se puede tratar de buscar una alternativa para dicho término. Una alternativa cuadrática es la mostrada en la ecuación (2.85).

$$z_{reprocesamiento} = CR \times VC \cdot \left(\sum_{c=1}^C (1 - y_{1,c,0}) + (T - 1) \cdot C - \sum_{t=2}^T \sum_{c=1}^C \sum_{p=0}^P y_{t-1,c,p} \cdot y_{t,c,p} \right) \quad (2.85)$$

2.3.8 Eliminación de las variables almacén

Esta sección muestra un modelo reducido que no hace uso de las variables almacén, útil a la hora de resolver dicho modelo mediante técnicas heurísticas tal y como se verá en el *Capítulo 4*. Para la obtención de dicho modelo tan solo se debe tener en cuenta que la cantidad de cada producto que sale de cada uno de los nodos fuente durante todo el intervalo de planificación debe ser igual a la diferencia entra los valores inicial y final para el tanque correspondiente. Dicha condición queda implementada en el modelo a través de la ecuación (2.86).

$$\sum_{c \in CS_n} \sum_{t=1}^T y_{t,c,p} = A0_{n,p} - AT_{n,p} \quad ; \quad (n,p) : n \in NS, p > 0 \quad (2.86)$$

Análogamente, la cantidad de cada producto que llega a cada uno de los nodos destino durante todo el intervalo de planificación debe ser igual a la diferencia entre los valores inicial y final para el tanque correspondiente. Dicha condición queda implementada en el modelo a través de la ecuación (2.87).

$$\sum_{c \in CE_n} \sum_{t=B_c}^T y_{t-B_c+1,c,p} = AT_{n,p} - A0_{n,p} \quad ; \quad \forall (n,p) : n \in ND, p > 0 \quad (2.87)$$

Finalmente, para los nodos intermedios es posible calcular el valor exacto del número de paquetes de cada producto contenido en cada uno de dichos nodos. Para ello, basta con despejar la variable $a_{t,n,p}$ de la segunda restricción mostrada en la ecuación (2.81) e ir sustituyendo $a_{t-1,n,p}$ en la expresión resultante hasta llegar a $a_{1,n,p}$, cuyo valor se obtiene de la primera de tales restricciones. Siguiendo este proceso se obtiene el resultado mostrado en la ecuación (2.88).

$$a_{t,n,p} = A0_{n,p} - \sum_{c \in CS_n} \sum_{t'=1}^t y_{t',c,p} + \sum_{c \in CE_n} \sum_{t' > B_c}^t y_{t-B_c,c,p} \quad ; \quad \forall (t,n,p) : n \in NI, p > 0 \quad (2.88)$$

Ahora, se puede utilizar dicha ecuación para sustituir las variables almacén en la restricción mostrada en la ecuación (2.83) obteniendo así un modelo en el que dichas variables no aparecen.

2.3.9 Comparación de los diferentes modelos desarrollados

Para terminar con el modelo discreto, se muestra a continuación una comparación entre los diferentes modelos (completo, reducido, simplificado ABS y simplificado QUAD) que pueden adoptarse a la hora de llevar a cabo la planificación. Dicha

comparación se ha hecho en base al número de características que se deseen incluir en dicho modelo. Las posibles características que pueden ser incluidas en el modelo son:

- a) Posibilidad de paradas en el funcionamiento del sistema.
- b) Existencia de poliductos bidireccionales.
- c) Volúmenes de mezcla diferentes.
- d) Existencia de secuencias de productos prohibidas.
- e) Coste de inventario en las fuentes.
- f) Coste de inventario en los nodos intermedios.
- g) Coste de reprocesamiento de los volúmenes de mezcla.
- h) Coste asociado a la inyección de paquetes en cada poliducto.
- i) Penalización por la utilización del sistema dentro de los intervalos de alto coste.

Teniendo en cuenta esta lista, la tabla 2.1 muestra un resumen de las características incluidas en cada uno de los modelos aquí desarrollados. Como puede verse, el modo completo incluye todas las características y el modelo simplificado carece de las asociadas a la existencia de paradas en el funcionamiento de la red. A continuación se muestran otros dos modelos, llamados modelos simplificados ABS y QUAD. Dichos modelos corresponden al modelo simplificado cuando se utilizan las ecuaciones (2.84) ó (2.85) para el término asociado al reprocesamiento de las mezclas en la función objetivo cuando todos los costes y volúmenes son iguales para cada par de productos.

Tabla 2.1: Características incluidas en cada modelo.

Características	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)	(g)	(h)	(i)
Modelo completo	x	x	x	x	x	x	x	x	x
Modelo reducido		x	x	x	x	x	x		
Modelo simplificado ABS		x			x	x	x		
Modelo simplificado QUAD		x			x	x	x		

Capítulo III

Planificación óptima del sistema

En el *Capítulo* anterior se desarrollaron los modelos matemáticos necesarios para planificar de manera óptima el modo de operación tanto de un poliducto como de redes de poliductos destinadas a la distribución de derivados del petróleo. En este *Capítulo*, se resuelven dichos modelos. En ambos casos, se muestran en primer lugar ciertos aspectos prácticos a considerar cuando se pretenden resolver dichos modelos mediante técnicas clásicas a través de un resolutor comercial como CPLEX. Entre tales aspectos prácticos se encuentran la linealización de términos no lineales y la adición de restricciones redundantes para acelerar la convergencia del algoritmo utilizado. A continuación se presentan los visualizadores de soluciones desarrollados con la herramienta MATLAB, útiles para evaluar las soluciones obtenidas en ambos casos. Finalmente, se resuelven tres ejemplos de aplicación en cada caso. Los ejemplos relativos al modelo continuo han sido escogidos para mostrar las mejoras que se consiguen al utilizar dicho modelo con respecto a los ya existentes en la literatura para resolver el mismo tipo de problemas. Dichas mejoras incluyen la planificación multiperiodo y la planificación de la producción en la refinería. En cuanto al modelo discreto, los dos primeros ejemplos involucran una pequeña red de distribución, cuyo único objetivo es mostrar la utilidad del nuevo modelo desarrollado para resolver este tipo de problemas. A continuación se resuelve un ejemplo de mayor tamaño, mostrando la dificultad de los algoritmos clásicos a la hora de resolver este tipo de problemas combinatorios y sugiriendo, por tanto, la utilización de métodos heurísticos.

Los objetivos de este capítulo son:

- Presentar los aspectos prácticos para la implementación y resolución mediante CPLEX de los modelos desarrollados en el *Capítulo* anterior.
- Mostrar las herramientas desarrolladas para la visualización de las soluciones obtenidas tras el proceso de optimización.
- Resolver algunos ejemplos de aplicación del modelo continuo que demuestren su utilidad y mejora con respecto a los ya existentes en la literatura.
- Resolver algunos ejemplos de aplicación del modelo discreto, mostrando su utilidad.

3.1 Implementación del modelo continuo

3.1.1 Resolución del modelo mediante CPLEX

En esta sección se presentan ciertos aspectos a tener en cuenta a la hora de implementar y resolver en un computador mediante una herramienta comercial el modelo continuo desarrollado en el *Capítulo* anterior. En concreto, aquí se utilizará el resolutor CPLEX sobre el modelo implementado en la versión 4.2 de la herramienta ILOG–OPL Studio. En primer lugar, se ha de tener en cuenta que la mayoría de las herramientas comerciales sólo permiten el uso de modelos lineales, por lo que las restricciones no lineales mostradas en las ecuaciones (2.43)–(2.46) del *Capítulo* anterior deben ser linealizadas. Dichas no linealidades son consecuencia de la incorporación las variables asociadas a la planificación de la producción como parte del conjunto de variables de decisión. Todas las no linealidades presentes en dichas ecuaciones son debidas a términos cuadráticos consecuencia del producto de una variable continua y otra binaria. Tales términos se pueden linealizar fácilmente mediante la incorporación al modelo de variables continuas adicionales, más las restricciones asociadas a dichas variables necesarias para que los modelos, original y linealizado, sean equivalentes. Para ello, es necesario definir las variables mostradas en la ecuación (3.1).

$$\begin{aligned}
 CRzu_{i,t,r,p} &= CR_{t,r,p} \times zu_{i,t,r,p} & ; & \quad \forall (i,t,r,p) \\
 LRzu_{i,t,r,p} &= LR_{t,r,p} \times zu_{i,t,r,p} & ; & \quad \forall (i,t,r,p) \\
 CRzl_{i,t,r,p} &= CR_{t,r,p} \times zl_{i,t,r,p} & ; & \quad \forall (i,t,r,p) \\
 LRzl_{i,t,r,p} &= LR_{t,r,p} \times zl_{i,t,r,p} & ; & \quad \forall (i,t,r,p)
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Dichas variables deben satisfacer las restricciones mostradas en las ecuaciones (3.2)–(3.5) donde la constante M_4 determina mediante $M_4=1.1 \times T \times hmax$.

$$\begin{aligned}
 CRzu_{i,t,r,p} &\geq CR_{t,r,p} + M_4 \cdot zu_{i,t,r,p} - M_4 & ; & \quad \forall (i,t,r,p) \\
 CRzu_{i,t,r,p} &\leq CR_{t,r,p} & ; & \quad \forall (i,t,r,p) \\
 CRzu_{i,t,r,p} &\leq M_4 \cdot zu_{i,t,r,p} & ; & \quad \forall (i,t,r,p)
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned}
 LRzu_{i,t,r,p} &\geq LR_{t,r,p} + M_4 \cdot zu_{i,t,r,p} - M_4 & ; & \quad \forall (i,t,r,p) \\
 LRzu_{i,t,r,p} &\leq LR_{t,r,p} & ; & \quad \forall (i,t,r,p) \\
 LRzu_{i,t,r,p} &\leq M_4 \cdot zu_{i,t,r,p} & ; & \quad \forall (i,t,r,p)
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned}
 CRzl_{i,t,r,p} &\geq CR_{t,r,p} + M_4 \cdot zl_{i,t,r,p} - M_4 & ; & \quad \forall (i,t,r,p) \\
 CRzl_{i,t,r,p} &\leq CR_{t,r,p} & ; & \quad \forall (i,t,r,p) \\
 CRzl_{i,t,r,p} &\leq M_4 \cdot zl_{i,t,r,p} & ; & \quad \forall (i,t,r,p)
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned}
 LRz l_{i,t,r,p} &\geq LR_{t,r,p} + M_4 \cdot z l_{i,t,r,p} - M_4 && ; \quad \forall (i,t,r,p) \\
 LRz l_{i,t,r,p} &\leq LR_{t,r,p} && ; \quad \forall (i,t,r,p) \\
 LRz l_{i,t,r,p} &\leq M_4 \cdot z l_{i,t,r,p} && ; \quad \forall (i,t,r,p)
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Entonces, las restricciones no lineales mostradas en las ecuaciones (2.43)–(2.46) se pueden sustituir por el siguiente conjunto de restricciones lineales:

$$CRz u_{i,t,r,p} - LRz u_{i,t,r,p} \leq C_{i,t} \leq CR_{r,p,t} - LR_{r,p,t} + hmax \cdot t \cdot z u_{i,t,r,p} \quad ; \quad \forall (i,t,r,p) \tag{3.6}$$

$$CRz u_{i,t,r,p} \leq C_{i,t} - L_{i,t} \leq CR_{r,p,t} + hmax \cdot t \cdot z l_{i,t,r,p} \quad ; \quad \forall (i,t,r,p) \tag{3.7}$$

$$q u_{i,t,r,p} \leq v r_p \cdot LRz u_{i,t,r,p} \quad ; \quad \forall (i,t,r,p) \tag{3.8}$$

$$q u_{i,t,r,p} \leq v r_p \cdot [C_{i,t} - (CRz u_{i,t,r,p} - LRz u_{i,t,r,p})] \quad ; \quad \forall (i,t,r,p) \tag{3.9}$$

$$q l_{i,t,r,p} \geq v r_p \cdot LRz l_{i,t,r,p} \quad ; \quad \forall (i,t,r,p) \tag{3.10}$$

Además de las ecuaciones asociadas a la linealización de los términos no lineales presentes en el modelo, se incorporan al mismo un conjunto de restricciones redundantes que aceleran la convergencia del algoritmo Branch&Bound en la búsqueda del óptimo. Dichas restricciones tienen en cuenta que debido a la incompresibilidad del fluido cada paquete en el poliducto se moverá cada vez que se inyecte uno nuevo. El primer conjunto de restricciones, mostrado en las ecuaciones (3.11) y (3.12), establece que la coordenada superior de cada paquete se incrementa con el tiempo. El conjunto de restricciones asociadas a los paquetes antiguos se muestran en la ecuación (3.11) y el asociado a los nuevos paquetes inyectados en el poliducto se muestra en la ecuación (3.12). En ambos casos, las dos primeras restricciones se aplican sobre paquetes inyectados en periodos diferentes mientras que la última es válida para paquetes inyectados en el mismo periodo.

$$\begin{aligned}
 F_{o,i,t} &\geq F_{o,i-1,t} && ; \quad \forall (o,i,t) : i > 1 \\
 F_{o,1,t} &\geq F_{o,I,t-1} && ; \quad \forall (o,t) : t > 1 \\
 F_{o,1,1} &\geq F_{O} && ; \quad \forall o
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

$$\begin{aligned}
 F_{i,t,i',t'} &\geq F_{i,t,i'-1,t'} && ; \quad \forall (i,t,i',t') : i' > 1, t < t' \\
 F_{i,t,1,t'} &\geq F_{i,t,I,t'-1} && ; \quad \forall (i,t,t') : t < t' \\
 F_{i,t,i',t} &\geq F_{i,t,i'-1,t} && ; \quad \forall (i,t,i') : i < i'
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

Análogamente, las coordenadas inferiores de todos los paquetes deberán aumentar con el tiempo. Las restricciones asociadas a los paquetes antiguos se muestran en la ecuación (3.13) y las asociadas a los nuevos en la (3.14).

$$\begin{aligned}
 Fo_{o,i,t} - Wo_{o,i,t} &\geq Fo_{o,i-1,t} - Fo_{o,i-1,t} && ; \quad \forall (o,i,t) : i > 1 \\
 Fo_{o,1,t} - Wo_{o,1,t} &\geq Fo_{o,I,t-1} - Wo_{o,I,t-1} && ; \quad \forall (o,t) : t > 1 \\
 Fo_{o,1,1} - Wo_{o,1,1} &\geq Fo_o - Wo_o && ; \quad \forall o
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

$$\begin{aligned}
 F_{i,t,i',t'} - W_{i,t,i',t'} &\geq F_{i,t,i'-1,t'} - W_{i,t,i'-1,t'} && ; \quad \forall (i,t,i',t') : i' > 1, t < t' \\
 F_{i,t,1,t'} - W_{i,t,1,t'} &\geq F_{i,t,I,t'-1} - W_{i,t,I,t'-1} && ; \quad \forall (i,t,t') : t < t' \\
 F_{i,t,i',t} - W_{i,t,i',t} &\geq F_{i,t,i'-1,t} - W_{i,t,i'-1,t} && ; \quad \forall (i,t,i') : i < i'
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

Finalmente, el conjunto de restricciones mostradas en las ecuaciones (3.15) y (3.16) para paquetes antiguos y nuevos respectivamente establecen que el volumen de cada paquete en tránsito en el poliducto es siempre un límite inferior en el valor de su coordenada volumétrica superior.

$$Fo_{o,i,t} \geq Wo_{o,i,t} \quad ; \quad \forall (o,i,t) \tag{3.15}$$

$$\begin{aligned}
 F_{i,t,i',t'} &\geq W_{i,t,i',t'} && ; \quad \forall (i,t,i',t') : t < t' \\
 F_{I,t,i',t} &\geq W_{I,t,i',t} && ; \quad \forall (i,t,i') : i \leq i'
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

3.1.2 Construcción de un visualizador de soluciones en MATLAB

Una vez obtenida una solución al problema tras la optimización del proceso, es útil disponer de herramientas que ayuden al chequeo de la misma. Dichas herramientas, además de reproducir el modo de operación del sistema frente a cada una de las soluciones propuestas de forma visual, son muy útiles a la hora de detectar posibles errores en la construcción del modelo. Por ello, se ha desarrollado una herramienta sobre MATLAB para visualizar el comportamiento del sistema cuando opera según las soluciones obtenidas. Además, dicha herramienta incorpora una simulación del inventario real en los tanques de la refinería y cada uno de los depósitos ya que el calculado en la función objetivo del modelo es tan solo una estimación del mismo. El visualizador desarrollado se muestra en la figura 3.1. Los principales elementos del mismo son:

- El poliducto por el que transitan cada uno de los paquetes inyectados en el mismo desde la refinería.
- Un reloj situado entre la refinería y la boca del poliducto mostrando el avance temporal durante toda la operación.
- Cada uno de los tanques de la refinería y todos los depósitos ubicados a lo largo de la ruta, así como su ubicación con respecto al origen situado en la refinería.

- Gráficas que muestran la evolución temporal del nivel de inventario de cada producto en cada uno de los tanques de la refinería y todos los depósitos del sistema.

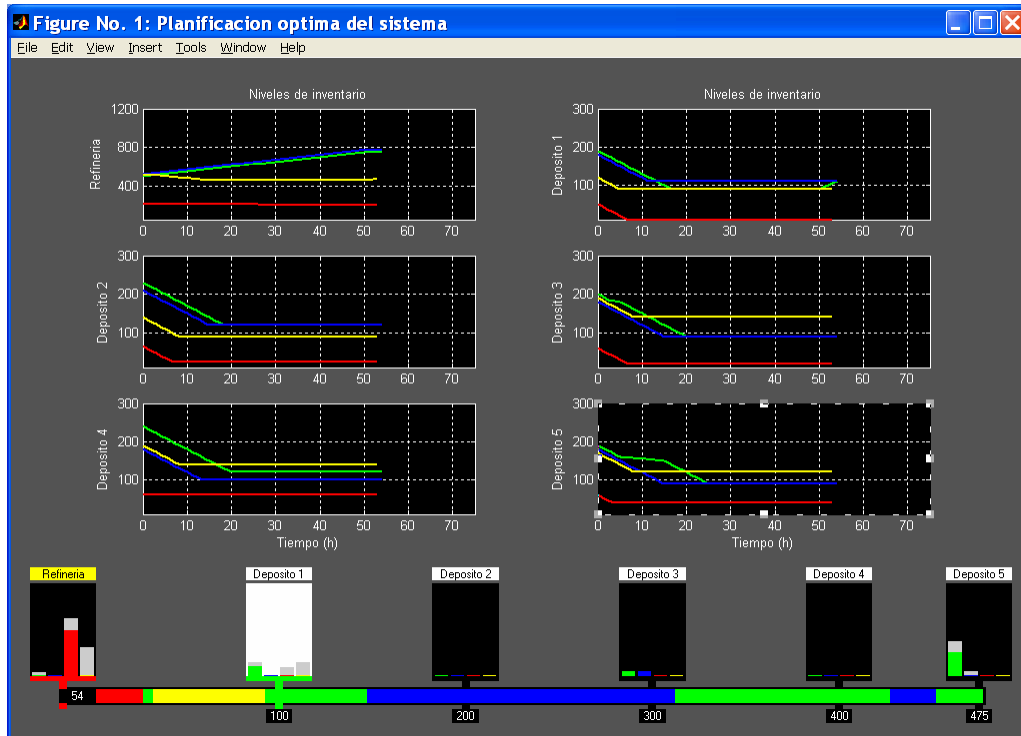


Figura 3.1: Visualizador de soluciones y simulador del inventario real.

A continuación se describe el funcionamiento de cada uno de los elementos que componen dicho visualizador–simulador de soluciones indicando sus principales características:

- Cuando un paquete es inyectado en el poliducto, la válvula de la refinería se vuelve del color del producto que dicho paquete contiene. Dicho paquete impulsa a los que le preceden haciendo que se muevan dentro del poliducto de forma continua desde la refinería a los depósitos.
- Análogamente, cada vez que una determinada cantidad de producto es inyectada desde uno de los paquetes dentro del poliducto a un depósito, la válvula correspondiente se vuelve del color del producto inyectado y el depósito se ilumina indicando que está en funcionamiento.
- Dentro de la refinería hay unas barras verticales indicando la cantidad de cada uno de los productos que debe ser inyectada en el poliducto según la solución que

se está simulando. A medida que los paquetes son inyectados en el mismo, dichas barras disminuyen hasta desaparecer al final de la simulación dejando detrás de las mismas otras barras grises que indicando la cantidad de producto que contenía cada una de ellas al comienzo de la simulación del proceso.

- Análogamente, en cada uno de los depósitos hay unas barras verticales grises indicando la cantidad de cada uno de los productos que debe ser inyectada desde el poliducto a los depósitos según la solución que se está simulando. A medida que los paquetes son inyectados en los mismos, dichas barras cambian de color según el producto inyectado desde abajo a arriba indicando el llenado progresivo hasta completarse al final de la simulación.
- Finalmente, se muestran en la parte superior las gráficas de la evolución temporal del nivel de inventario de cada uno de los productos en los tanques de la refinería y todos los depósitos de distribución. Dichas gráficas se actualizan a medida que se va calculando el inventario real en cada paso de la simulación.

3.2 Ejemplos de aplicación del modelo continuo

Para comprobar el funcionamiento y utilidad del modelo continuo propuesto en el *Capítulo* anterior, pueden resolverse algunos problemas de planificación a lo largo de varios periodos. En concreto se resuelven en este apartado tres ejemplos. Los dos primeros involucran dos periodos mientras que el tercero es un ejemplo más complicado que demuestra la necesidad de utilizar un algoritmo basado en técnicas heurísticas cuando el problema se hace demasiado complicado como para resolverlo de forma eficiente mediante el uso de técnicas clásicas. Los datos para el primer periodo en todos los ejemplos han sido tomados del ejemplo introducido primeramente por [RP03] y luego por [CC04] en sus respectivos artículos. Los datos para el segundo periodo se han elegido para demostrar el ahorro en el coste de la operación que se produce al utilizar el modelo multiperiodo aquí desarrollado en comparación al modelo monoperiodo propuesto en dichos artículos. Los datos para el tercer periodo del último ejemplo se han elegido únicamente para aumentar la complejidad del problema.

Todos los ejemplos están basados en un sistema compuesto por un único poliducto transportando cuatro derivados del petróleo (P1: gasolina; P2: diesel; P3: LPG; y P4: jet fuel) hasta terminales o depósitos de distribución (D1, D2, D3, D4 y D5) localizados a lo largo de la ruta. La ubicación de dichos depósitos con respecto al origen situado en la refinería es 100, 200, 300, 400 y 475 respectivamente medido en unidades de 100

metros cúbicos. Los datos comunes a todos los ejemplos se muestran en las tablas 3.1 y 3.2. La tabla 3.1 muestra los niveles máximo, mínimo e inicial de cada uno de los tanques de la refinería y todos los depósitos, junto con los costes de inventario y bombeo. El volumen de contacto y su coste asociado se muestra en la tabla 3.2. Las secuencias de producto prohibidas se indican con una \times . Otros parámetros del modelo son $l_{min}=1$ h, $l_{max}=h_{max}$, $\rho=5000$ US\$/m³, $vb_{min}=vb_{max}=v_m=500$ m³/h y $\tau=0$ s.

Tabla 3.1: Niveles de inventario y costes de inventario y bombeo de producto.

Producto	Característica	Refinería	Depósitos				
			D1	D2	D3	D4	D5
P1	Nivel mínimo ($\times 10^2$ m ³)	270	90	90	90	90	90
	Nivel máximo ($\times 10^2$ m ³)	1200	400	400	400	400	400
	Nivel inicial ($\times 10^2$ m ³)	500	190	230	200	240	190
	Coste de inventario (US\$/m ³ h))	0.070	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100
	Coste de bombeo (US\$/m ³)	\times	3.5	4.5	5.5	6.0	6.9
P2	Nivel mínimo ($\times 10^2$ m ³)	270	90	90	90	90	90
	Nivel máximo ($\times 10^2$ m ³)	1200	400	400	400	400	400
	Nivel inicial ($\times 10^2$ m ³)	520	180	210	180	180	180
	Coste de inventario (US\$/m ³ h))	0.080	0.155	0.155	0.155	0.155	0.155
	Coste de bombeo (US\$/m ³)	\times	3.6	4.6	5.6	6.2	7.3
P3	Nivel mínimo ($\times 10^2$ m ³)	50	10	10	10	10	10
	Nivel máximo ($\times 10^2$ m ³)	350	70	70	70	70	70
	Nivel inicial ($\times 10^2$ m ³)	210	50	65	60	60	60
	Coste de inventario (US\$/m ³ h))	0.095	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200
	Coste de bombeo (US\$/m ³)	\times	4.8	5.7	6.8	7.9	8.9
P4	Nivel mínimo ($\times 10^2$ m ³)	270	90	90	90	90	90
	Nivel máximo ($\times 10^2$ m ³)	1200	400	400	400	400	400
	Nivel inicial ($\times 10^2$ m ³)	515	120	140	190	190	170
	Coste de inventario (US\$/m ³ h))	0.090	0.170	0.170	0.170	0.170	0.170
	Coste de bombeo (US\$/m ³)	\times	3.7	4.7	5.7	6.1	7.0

Tabla 3.2: Volumen y coste de contacto.

Producto	Volumen de contacto (m ³)				Coste de contacto (US\$/m ³)			
	P1	P2	P3	P4	P1	P2	P3	P4
P1	0	30	37	35	0	100	100	100
P2	30	0	\times	38	100	0	\times	100
P3	35	\times	0	\times	100	\times	0	\times
P4	37	38	\times	0	100	100	\times	0

El cardinal del conjunto I , es decir, el número de nuevos paquetes que se pueden inyectar en el poliducto durante todo el intervalo de planificación, se supone inicialmente igual al número de diferentes productos derivados del petróleo, es decir, el cardinal de P . Tras resolver el modelo, se aumenta en una unidad el cardinal de I y se resuelve de nuevo el modelo. Este procedimiento se repite hasta que no se produzca disminución en el coste de la operación al resolver dicho modelo. En los dos primeros ejemplos la solución óptima se encuentra en la primera iteración mientras que el último es demasiado complicado como para ser resuelto mediante técnicas clásicas. EL modelo MILP aquí propuesto se resuelve mediante CPLEX a través de ILOG-OPL Studio 4.2 [ILO03] sobre un procesador Intel Xeon a 2.8GHz y 2GB de RAM.

3.2.1 Ejemplo 1: Búsqueda de una solución factible

El primer ejemplo comprende dos periodos de 75 horas cada uno. Además hay un par de intervalos de alto coste en cada periodo (15–25 y 40–50 en el primer periodo; 90–100 y 115–125 en el segundo) en los que el coste de bombeo es superior al que hay en condiciones normales. Normalmente, la inyección de producto en el poliducto se para durante dichos intervalos, al menos que una no satisfacción de la demanda fuerce a mantener la inyección de producto durante los mismos. Los siguientes puntos son tratados en este ejemplo:

- En primer lugar se resuelve el modelo para el primer periodo, comparando los resultados obtenidos con los presentados en el artículo [CC04] del que se han extraído los datos para dicho periodo. Se esperan algunas diferencias ya que aquí se usa un término diferente para calcular el coste de inventario en la refinería, que incluye el cálculo del inventario de producto en la misma al final del horizonte de planificación.
- Tal y como se dijo en el apartado 2.2.9 el término utilizado en la función objetivo para calcular el coste de inventario en la refinería y todos los depósitos es una estimación del valor real basada en un promedio del inventario de cada producto durante todo el horizonte de planificación. Sin embargo, una vez resuelto el modelo, es posible calcular el valor real del coste de inventario consecuencia de la solución obtenida tras el proceso de optimización. Así, tras simular la solución proporcionada por el optimizador, ambos costes (estimado y real) pueden ser comparados con el objetivo de evaluar la bondad de dicha aproximación.
- Finalmente, se resuelve el problema para el segundo periodo a partir de la situación proporcionada tras la optimización del primer periodo, y se comparan los resultados con los obtenidos cuando se resuelve el mismo problema pero

tendiendo en cuenta ambos periodos mediante el modelo multiperiodo. Puesto que el modelo multiperiodo tiene en cuenta los datos de ambos periodos para llevar cabo la optimización, es de esperar un ahorro en el coste de la operación.

Los datos utilizados en el ejemplo 1 se encuentran en las tablas 3.3 y 3.4. La tabla 3.3 proporciona la demanda de cada producto a satisfacer en cada uno de los periodos que componen el horizonte de planificación. La tabla 3.4 incluye información a cerca de cada una de las producciones de producto que tienen lugar en la refinería durante todo el horizonte de planificación. Inicialmente hay cinco paquetes (S5–S4–S3–S2–S1) dentro del poliducto conteniendo los productos (P1–P2–P1–P2–P1) ordenados según esta secuencia, y con los volúmenes (75–175–125–25–75) medidos en unidades de 100 metros cúbicos. El paquete S1 ocupa la posición más alejada de la refinería.

Tabla 3.3: Demanda de producto en cada periodo para el ejemplo 1.

Producto	Demanda para el periodo 1 ($\times 10^2 \text{ m}^3$)					Demanda para el periodo 2 ($\times 10^2 \text{ m}^3$)				
	D1	D2	D3	D4	D5	D1	D2	D3	D4	D5
P1	100	110	120	120	150	20	20	20	20	20
P2	70	90	100	80	100	20	20	20	20	20
P3	60	40	40	0	20	20	20	20	20	20
P4	60	50	50	50	50	20	20	20	20	40

Tabla 3.4: Producción planificada en cada periodo para el ejemplo 1.

Datos para el periodo 1				Datos para el periodo 2			
Producto	Volumen ($\times 10^2 \text{ m}^3$)	Caudal ($\times 10^2 \text{ m}^3/\text{h}$)	Intervalo (h)	Producto	Volumen ($\times 10^2 \text{ m}^3$)	Caudal ($\times 10^2 \text{ m}^3/\text{h}$)	Intervalo (h)
P1	250	5	0–50	P1	250	5	75–125
P2	250	5	0–50	P2	250	5	75–125
P3	125	5	50–75	P3	125	5	125–150
P4	125	5	50–75	P4	125	5	125–150

La figura 3.2 muestra la planificación óptima para la inyección de nuevos productos cuando sólo se tiene en cuenta la demanda para el primer periodo. El coste de la operación es 33103.33 expresado en cientos de dólares. El modelo involucra 2193 restricciones y 1540 variables. La solución se encontró en 32.98 segundos. Esta solución se puede comparar con la proporcionada en [CC04] mostrada en la figura 3.3 y cuyo coste de operación es 32746.83 expresado en cientos de dólares. Puesto que el modelo desarrollado en el *Capítulo* anterior utiliza un término diferente para calcular el coste de inventario en los tanques de la refinería, es de esperar algunas diferencias

en los resultados obtenidos. En este caso, las soluciones solamente difieren en la fragmentación del último paquete de volumen $120.37 \times 10^2 \text{ m}^3$. Además, puede verse como en ambos casos se inyecta el paquete S7 con el tamaño mínimo permitido ($5 \times 10^2 \text{ m}^3$) para evitar el contacto entre los paquetes S6 y S8.

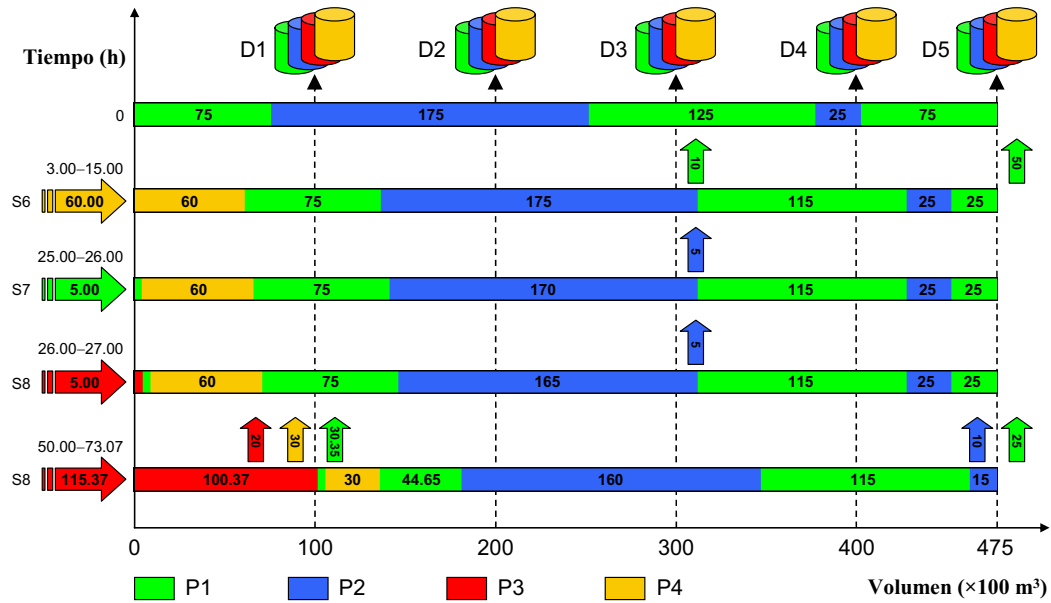


Figura 3.2: Planificación óptima para el primer periodo (común a todos los ejemplos).

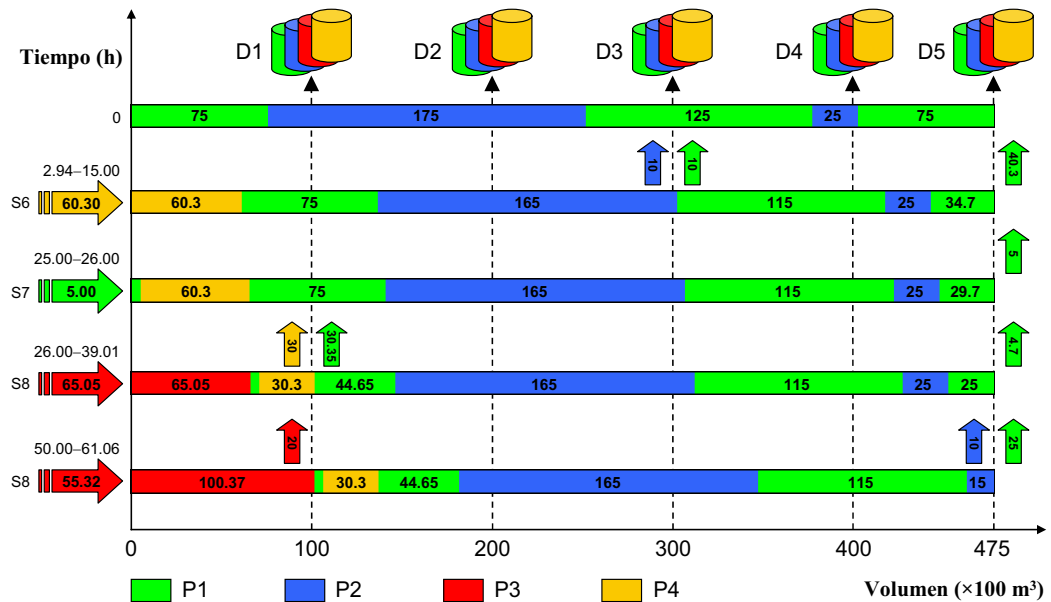


Figura 3.3: Planificación óptima para el primer periodo del ejemplo 1 propuesto en [CC04].

Una vez optimizado el proceso, la solución puede ser visualizada mediante la herramienta desarrollada en el apartado 3.1.2, obteniendo además, gracias al simulador que dicho visualizador lleva incorporado, la variación temporal exacta del inventario de cada producto en cada uno de los tanques de la refinería y todos los depósitos del sistema. Tales variaciones se muestran en la figura 3.4 para la solución mostrada en la figura 3.2. Tal y como se observa en las gráficas, los niveles de inventario se mantienen dentro de su rango permisible en todos los tanques durante todo el horizonte de planificación. Además, los niveles de inventario en los depósitos tienden a permanecer cercanos a sus valores mínimos durante todo el horizonte consecuencia del alto coste de inventario.

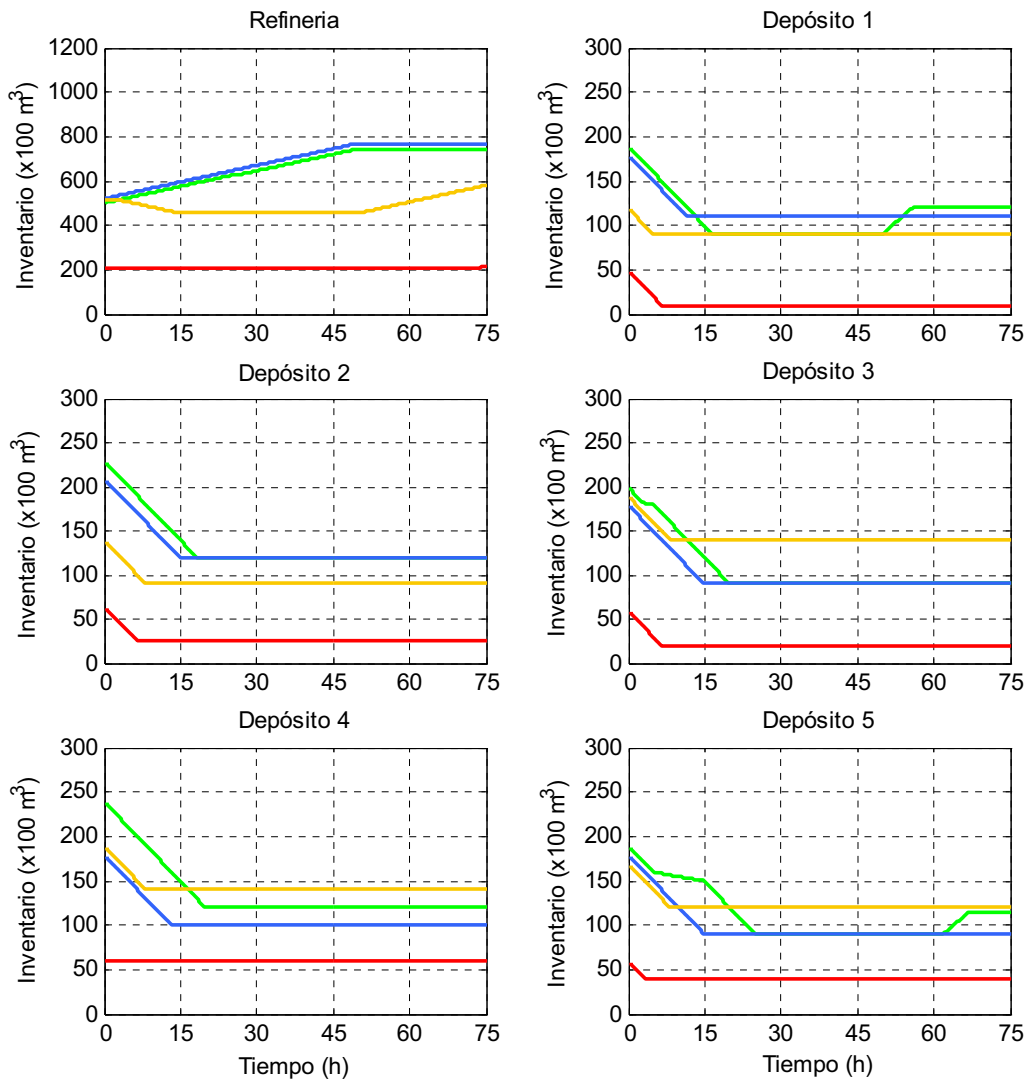


Figura 3.4: Evolución de los niveles de inventario correspondiente a la solución mostrada en la figura 6.2.

Tal y como se dijo en el apartado 2.2.9 el término utilizado en la función objetivo para calcular el coste de inventario en la refinería y todos los depósitos es una estimación del valor real basada en un promedio del inventario de cada producto durante todo el horizonte de planificación. Por tanto, un primer análisis que puede llevarse a cabo una vez obtenida la solución al problema consiste en calcular el coste de inventario real mediante los niveles obtenidos tras la simulación del proceso y compararlo con el estimado por el modelo de optimización para comprobar la bondad de tal aproximación. Los resultados de dicho cálculo se encuentran recogidos en la tabla 3.5. En esta tabla, se puede ver como la diferencia entre los valores real y estimado es menor al 2% para la refinería y al 6% para todos los depósitos del sistema, por tanto, la utilización de la aproximación lineal como alternativa al cálculo exacto (no lineal) está justificada.

Tabla 3.5: Comparación entre los costes de inventario real y estimado.

Coste	Refinería	Depósitos				
		D1	D2	D3	D4	D5
Estimado ($\times 10^2$ US\$)	12122.7232	3326.9437	3855.0000	3862.5000	4803.7500	4010.6250
Real ($\times 10^2$ US\$)	12343.7590	3500.5297	4085.7182	4090.4972	4987.6083	4161.9268
Diferencia (%)	1.79 %	4.96 %	5.65 %	5.57 %	3.69 %	3.64 %

Por otro lado, a partir de la figura 3.2, se puede ver como el poliducto permanece operativo durante el intervalo 3.00h–73.07h con dos paradas de 15h–25h y 27h–50h que incluyen a los intervalos de alto coste. En otras palabras, el sistema permanece en funcionamiento 47.93 horas por debajo de sus posibilidades (el horizonte de planificación está compuesto por 75 horas). Por tanto, la capacidad del sistema excede ampliamente la demanda a ser satisfecha en los consumidores mediante la inyección de nuevos paquetes de producto en el poliducto. Sólo tres paquetes (S8–S7–S6) conteniendo los productos (P3–P1–P4) en las cantidades (120.37–5–60) expresadas en unidades de 100 metros cúbicos son inyectados en el poliducto durante todo el intervalo de planificación. Por tanto, si a continuación se establece una demanda demasiado alta para el siguiente periodo, se podría llegar a una situación en la que no sea posible encontrar ninguna solución factible para tal periodo cuando se parte desde el estado final en el que queda el sistema tras la optimización del modelo sobre el primer periodo. Es decir, la demanda podría no ser satisfecha para el segundo periodo. Sin embargo, el tiempo durante el cual el sistema permaneció inoperativo durante el primer periodo podría haberse utilizado para inyectar producto (adicional sobre el necesario para satisfacer la demanda del primer periodo) en el poliducto, quedando almacenado en los tanques de los depósitos con el objetivo de ayudar a la satisfacción

de la demanda para el segundo periodo. Obviamente, la única manera de que el optimizador proporcione tal solución (con un coste superior al óptimo para el primer periodo) es utilizar un modelo multiperiodo capaz de tener en cuenta la información relativa a ambos periodos en el mismo modelo.

Para ilustrar esta idea, se comienza por ejecutar el modelo monopериodo con los datos para el segundo periodo y utilizando como estado inicial el estado final en el que queda el sistema tras funcionar durante el primer periodo de acuerdo a la solución obtenida para el mismo. Tal estado se muestra en la última imagen del poliducto mostrada en la figura 3.2. Como puede verse, dicho estado está compuesto por una secuencia de 7 paquetes (S7-S6-S5-S4-S3-S2-S1), los cuales contienen los productos (P3-P1-P4-P1-P2-P1-P2) con volúmenes (100.37-5-30-44.65-160-115-15) en este orden y medidos en unidades de 100 metros cúbicos. El primer paquete ocupa la posición más alejada del origen situado en la refinería. Cuando se utiliza dicho estado como estado de partida para la operación en el segundo periodo con la demanda y producción especificadas en las tablas 3.3 y 3.4, el modelo monopериodo es incapaz de encontrar ningún tipo de solución factible para la operación sobre tal periodo. Esto es debido a que el optimizador es incapaz de encontrar una solución en la que se satisfaga la demanda de producto P4 en el depósito 5. Nótese como dicha demanda es de 40 unidades para el segundo periodo, mientras que el depósito 5 tan solo dispone de 30. Esta situación podría haberse evitado si tal cantidad de producto P4 se hubiese anticipado durante el tiempo en el que el sistema permaneció inoperativo en el primer periodo. Sin embargo, el modelo monopериodo es incapaz de encontrar tal solución ya que no tiene en cuenta la información relativa a otros periodos distintos al tratado.

A continuación, se resuelve el problema para los dos periodos mediante el modelo multiperiodo aquí propuesto. La solución obtenida se muestra en la figura 3.5. El coste de la operación es 65964.53 expresado en cientos de dólares. El modelo involucra 8428 restricciones y 5020 variables. La solución se encontró en 4885.57 segundos. Como se puede ver, mediante la utilización del modelo multiperiodo es posible obtener una solución factible y óptima. La solución está compuesta por 5 paquetes, sin embargo, el modelo usa 8 (4 para cada periodo correspondientes a la cardinalidad del conjunto I) permitiendo un cálculo más exacto del coste de inventario en la función objetivo. Tal y como se ve en la figura 3.5 una gran cantidad de producto P1 se inyecta en el último paquete. Además, se utiliza una porción de los intervalos de alto coste para inyectar material en el poliducto. Dicha porción es de 37 sobre el total de 40 horas que comprenden tales intervalos lo que corresponde al 92.5% de los mismos. Esto es necesario para conseguir impulsar 10 unidades del paquete S6 hasta el último depósito con el objetivo de satisfacer la demanda para el segundo periodo.

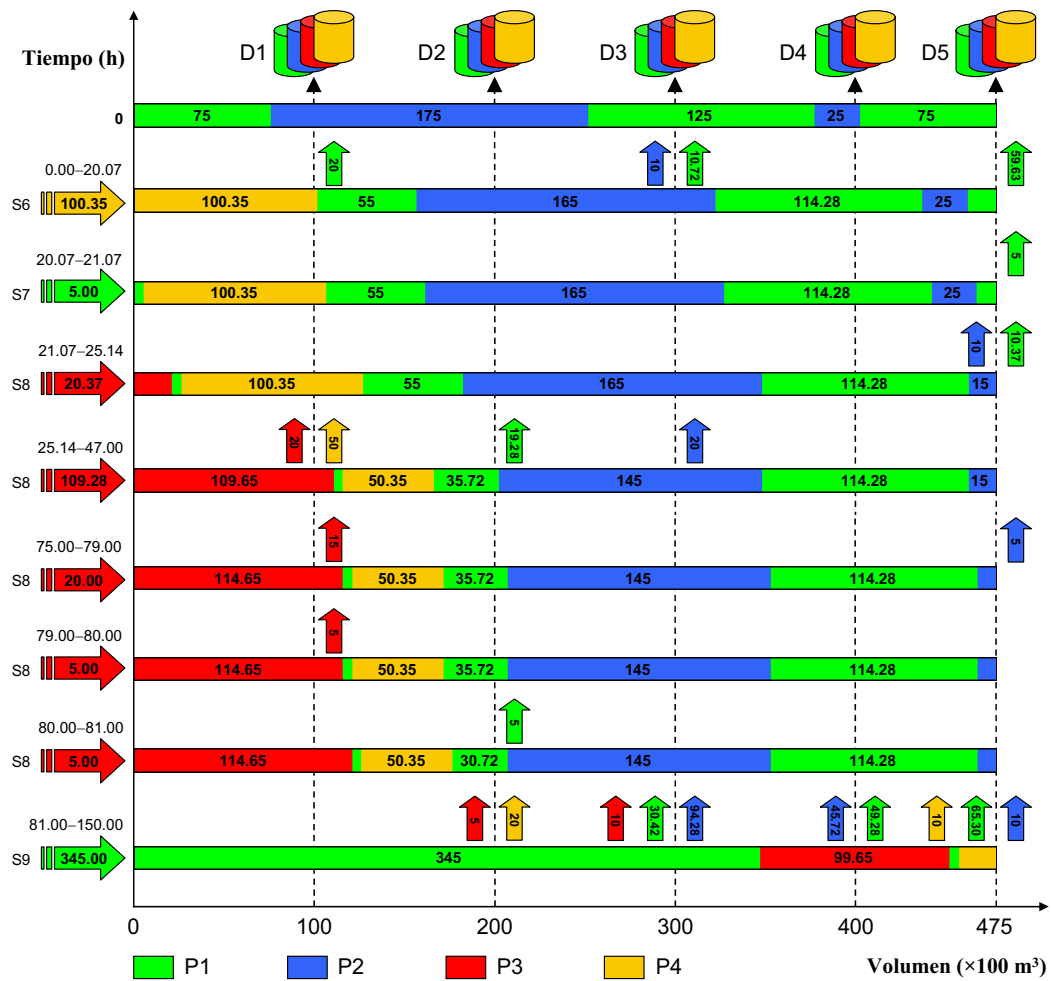


Figura 3.5: Planificación óptima para los dos periodos del ejemplo 1 obtenida mediante el modelo multiperiodo.

Las variaciones con el tiempo de los niveles de inventario de producto en los tanques de la refinería y todos los depósitos se muestran en la figura 3.6 correspondiente a la solución mostrada en la figura 3.5. Tal y como se observa en las gráficas, los niveles de inventario se mantienen dentro de su rango permisible en todos los tanques durante todo el horizonte de planificación. En este caso, los niveles de inventario en los depósitos ya no tienden a permanecer cercanos a sus valores mínimos durante todo el horizonte puesto que todo el producto contenido en los paquetes S1, S2, S3, S4 y S5 debe entrar en los depósitos para conseguir entregar las 10 unidades del producto P4 contenidas en el paquete S6 al último depósito. Además se observa una disminución de los niveles de inventario en la refinería durante el primer periodo con respecto a los presentados en la figura 3.4. Esto es debido, como se ha mencionado anteriormente, a la utilización del tiempo durante el que el sistema

permanecía inoperativo en la solución mostrada en la figura 3.2 para inyectar producto adicional que ayude satisfacer la demanda en el segundo periodo.

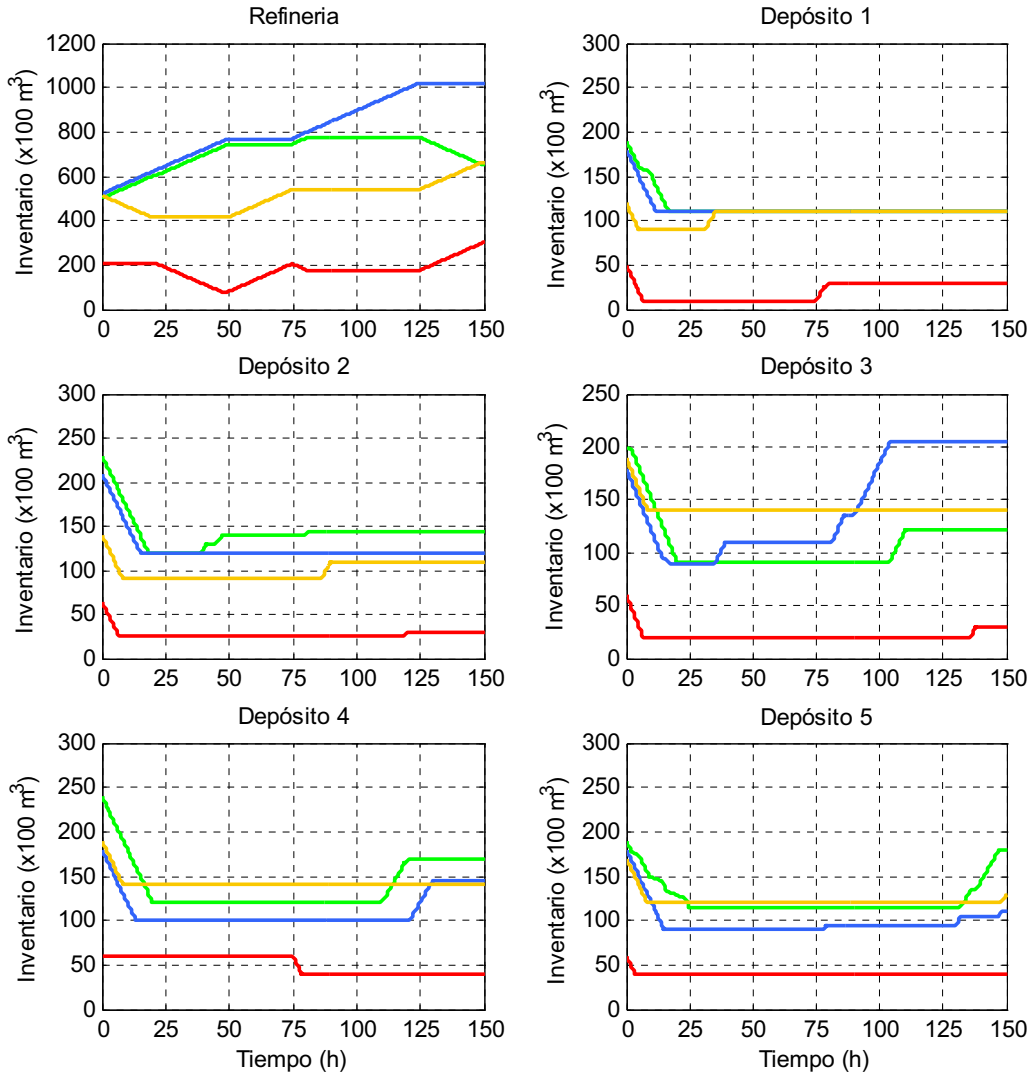


Figura 3.6: Evolución de los niveles de inventario correspondiente a la solución mostrada en la figura 6.5.

3.2.2 Ejemplo 2: Mejora de una solución factible y planificación de la producción

El segundo ejemplo aquí mostrado comprende los mismos periodos tratados en el ejemplo 1. Sin embargo, la demanda para el segundo periodo ha sido seleccionada de tal manera que sea posible alcanzar una solución factible mediante la utilización del modelo monoperiodo desde el estado final dejado por el primer periodo. Los siguientes puntos son tratados en este ejemplo:

- En primer lugar, el problema se resuelve de forma independiente para cada uno de los periodos mediante el modelo monopериодо. Como se verá, en este caso, es posible encontrar una solución factible y óptima para cada uno de los periodos, siendo el coste total de la operación la suma de los obtenidos en cada uno de los periodos ejecutados de forma independiente.
- En segundo lugar, ambos periodos son tenidos en cuenta de forma conjunta en la misma optimización mediante la utilización del modelo multiperiодо aquí propuesto. La solución obtenida en este caso es comparada con la obtenida cuando ambos periodos son optimizados de forma independiente, mostrándose el ahorro que se consigue al utilizar el modelo multiperiодо.
- Finalmente, el mismo problema es resuelto mediante la utilización del modelo multiperiодо e incluyendo todas las variables relacionadas con la planificación de la producción dentro del conjunto de variables de decisión. Con este modelo es posible sincronizar la inyección de nuevos paquetes en el poliducto de tal forma que se evite la inyección de los mismos dentro de los intervalos de alto coste, con el correspondiente ahorro en el coste de la operación que esto supone.

Los datos utilizados en el ejemplo 2 se encuentran en las tablas 3.6 y 3.7. La tabla 3.6 proporciona la demanda de cada producto a satisfacer en cada uno de los periodos. La tabla 3.7 incluye información acerca de cada una de las producciones de producto que tienen lugar en la refinería durante todo el horizonte de planificación.

Tabla 3.6: Demanda de producto en cada periodo para el ejemplo 2.

Producto	Demanda para el periodo 1 ($\times 10^2 \text{ m}^3$)					Demanda para el periodo 2 ($\times 10^2 \text{ m}^3$)				
	D1	D2	D3	D4	D5	D1	D2	D3	D4	D5
P1	100	110	120	120	150	20	20	20	20	20
P2	70	90	100	80	100	20	20	20	20	20
P3	60	40	40	0	20	20	20	20	20	20
P4	60	50	50	50	50	20	20	20	20	20

Tabla 3.7: Producción planificada en cada periodo para el ejemplo 2.

Producto	Datos para el periodo 1			Producto	Datos para el periodo 2		
	Volumen ($\times 10^2 \text{ m}^3$)	Caudal ($\times 10^2 \text{ m}^3/\text{h}$)	Intervalo (h)		Volumen ($\times 10^2 \text{ m}^3$)	Caudal ($\times 10^2 \text{ m}^3/\text{h}$)	Intervalo (h)
P1	250	5	0–50	P1	250	5	75–125
P2	250	5	0–50	P2	250	5	75–125
P3	125	5	50–75	P3	125	5	125–150
P4	125	5	50–75	P4	125	5	125–150

La solución óptima para el primer periodo ya se mostró en la figura 3.2. Por tanto, la solución a ambos periodos cuando son resueltos de forma independiente mediante el modelo monoperiodo que se muestra en la figura 3.7 se compone de la solución obtenida para el primer periodo (figura 3.2) seguida de la obtenida para el segundo. En cuanto al primer periodo recuérdese que el coste de la operación fue de 33103.33 expresado en cientos de dólares, el modelo involucró 2193 restricciones y 1540 variables, y la solución se encontró en 32.98 segundos. La solución obtenida para el segundo periodo se obtiene utilizando como estado inicial para el mismo el estado final del sistema tras la finalización del primero junto con los datos mostrados en las tablas 3.6 y 3.7. En este caso, el coste de la operación es 33859.57 expresado en cientos de dólares. El modelo, de nuevo involucra 2193 restricciones y 1540 variables y la solución se encontró en 28.20 segundos. El coste total de la operación es, por tanto, de 66962.91 medido en cientos de dólares.

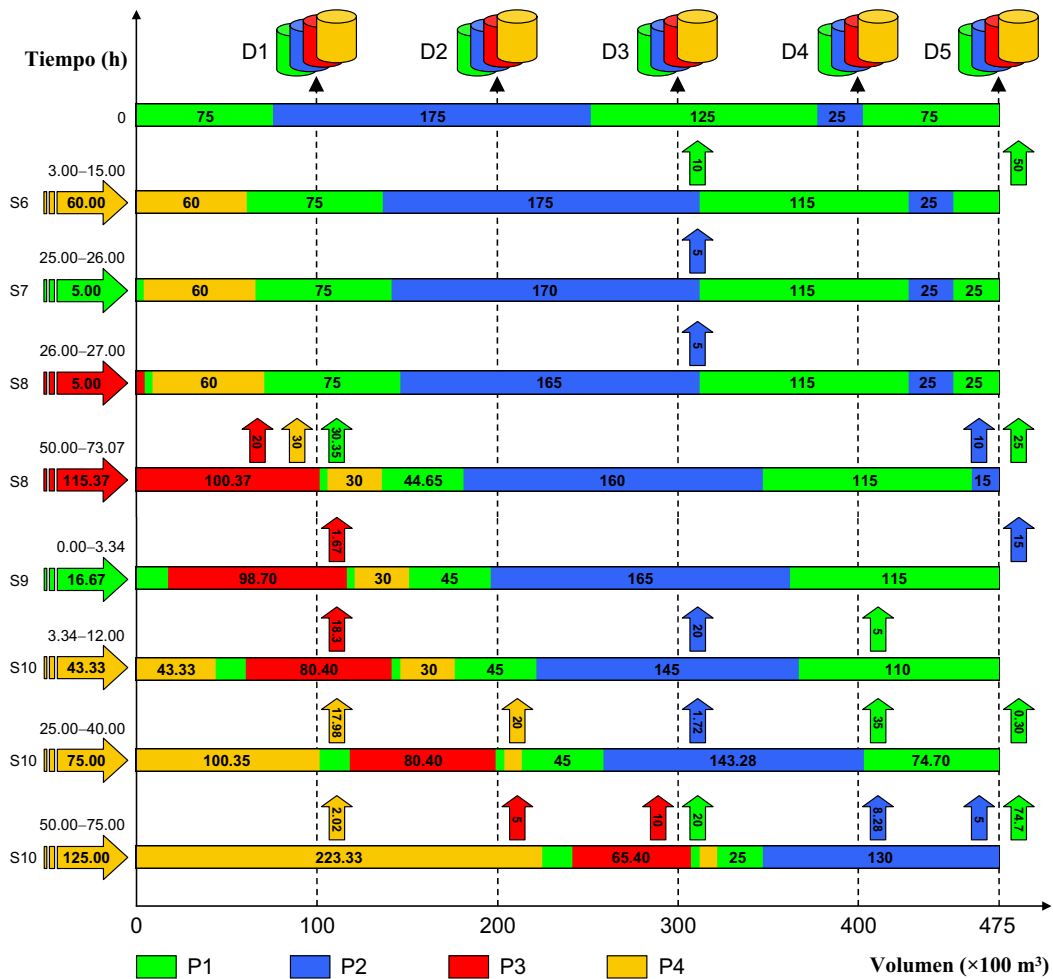


Figura 3.7: Planificación óptima para los dos periodos del ejemplo 2 obtenida mediante el modelo monoperiodo.

La figura 3.8 muestra la variación temporal de los niveles de inventario de producto en los tanques de la refinería y todos los depósitos correspondiente a la solución mostrada en la figura 3.7. Tal y como se observa en las gráficas, los niveles de inventario se mantienen dentro de su rango permisible en todos los tanques durante todo el horizonte de planificación.

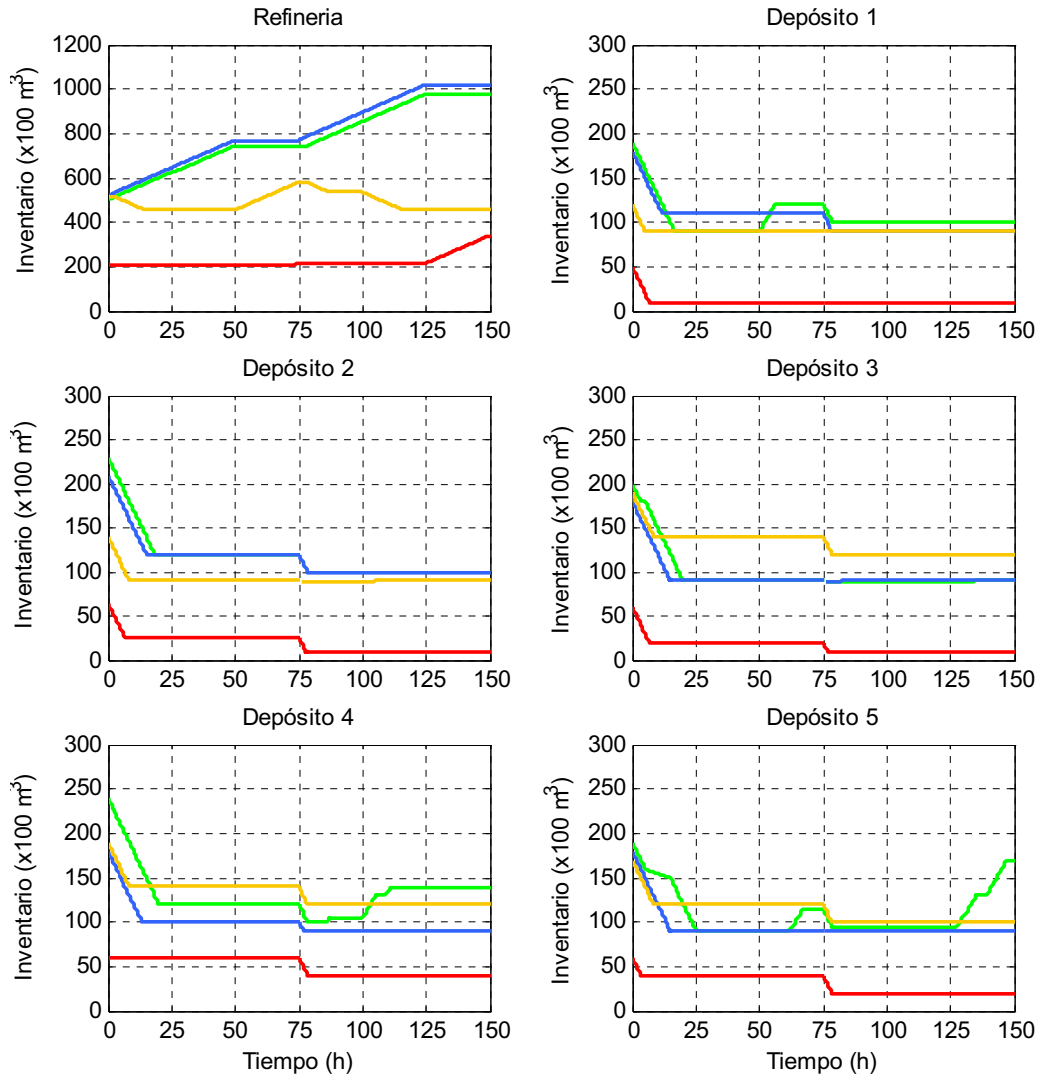


Figura 3.8: Evolución de los niveles de inventario correspondiente a la solución mostrada en las figuras 6.2 y 6.7.

A continuación, se resuelve el mismo problema mediante el modelo multiperiodo aquí propuesto. La solución obtenida se muestra en la figura 3.9. El coste de la operación es 64370.27 expresado en cientos de dólares. El modelo involucra 8428 restricciones y 5020 variables. La solución se encontró en 4948.16 segundos. Como se puede ver, mediante la utilización del modelo multiperiodo es posible obtener una

solución factible y óptima. La solución está compuesta por 6 paquetes, sin embargo, el modelo usa 8 (4 para cada periodo correspondientes a la cardinalidad del conjunto D) permitiendo un cálculo más exacto del coste de inventario en la función objetivo. Además, se utiliza una porción de los intervalos de alto coste para inyectar material en el poliducto. Dicha porción es de 25.07 sobre el total de 40 horas que comprenden tales intervalos lo que corresponde al 62.67% de los mismos.

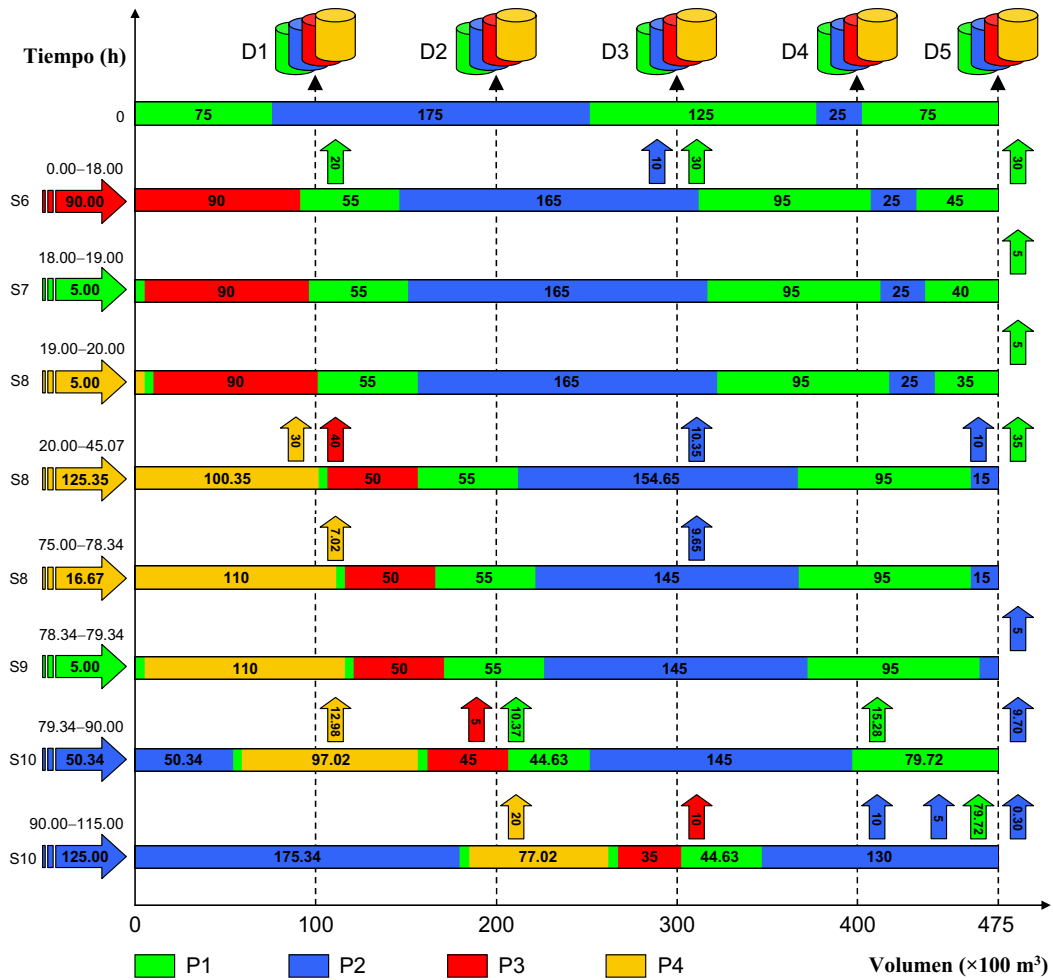


Figura 3.9: Planificación óptima para los dos periodos del ejemplo 2 obtenida mediante el modelo multiperiodo.

La figura 3.10 muestra la variación temporal de los niveles de inventario de producto en los tanques de la refinería y todos los depósitos correspondiente a la solución mostrada en la figura 3.9. Tal y como se observa en las gráficas, los niveles de inventario se mantienen dentro de su rango permisible en todos los tanques durante todo el horizonte de planificación.

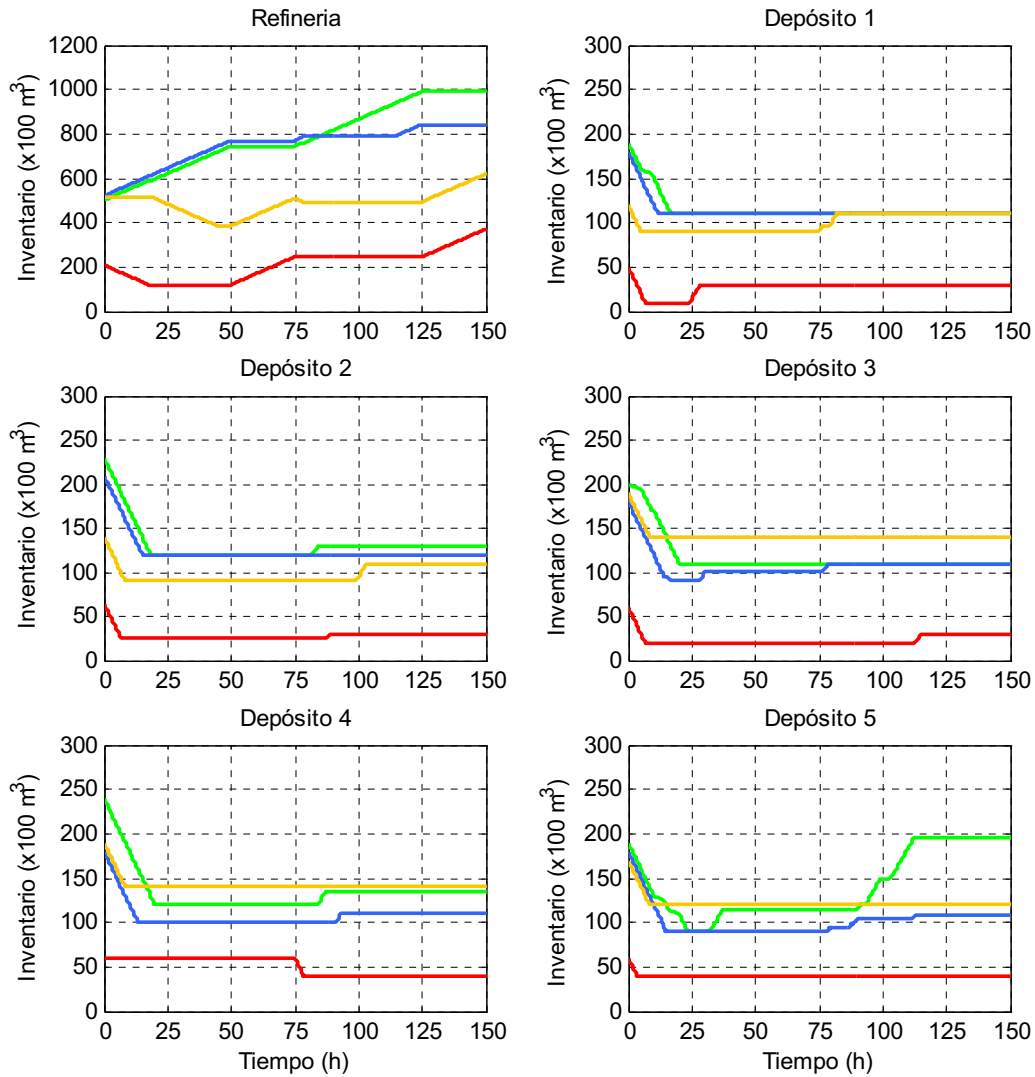


Figura 3.10: Evolución de los niveles de inventario correspondiente a la solución mostrada en la figura 6.9.

Ahora, es posible comparar las soluciones obtenidas mediante la optimización de cada periodo de forma independiente con la obtenida mediante la optimización de ambos periodos de forma conjunta mediante el modelo multiperiodo.

Tabla 3.8: Comparación entre los modelos monoperiodo y multiperiodo.

Modelo	Variables		Restricciones	Tiempo de CPU (s)	Coste ($\times 10^2$ US\$)
	Continuas	Binarias			
SP (Periodo 1)	1296	244	2193	22.23	33103.33
SP (Periodo 2)	1296	244	2193	28.20	33859.57
SP (Total)	1296	244	2193	51.18	66962.91
MP	4162	858	8428	4948.16	64370.27

Tal y como se muestra en la tabla 3.8, se puede observar un ahorro de 259264 dólares a utilizar el modelo multiperiodo, sin embargo, el tiempo de CPU se ha incrementado considerablemente siendo dos órdenes de magnitud superior.

Finalmente, la figura 3.11 muestra la solución óptima obtenida mediante la utilización del modelo multiperiodo e incluyendo todas la variables relacionadas con la planificación de la producción dentro del conjunto de variables de decisión. El coste de la operación es 58747.50 expresado en cientos de dólares. El modelo involucra 8564 restricciones y 5116 variables. La solución se encontró en 5125.43 segundos. En este caso, la solución está compuesta por 5 paquetes. Incluyendo la planificación de la producción como parte del proceso de decisión, es posible sincronizar la inyección de nuevos paquetes en el poliducto con los intervalos de alto coste de tal manera que se evite la utilización de los mismos, observándose una considerable disminución de tal uso en la figura 3.12. Dicho uso se ha reducido al 15.36% comparado con el 62.67% utilizado en el ejemplo mostrado en la figura 3.9 (mismo ejemplo pero con la producción fijada de antemano).

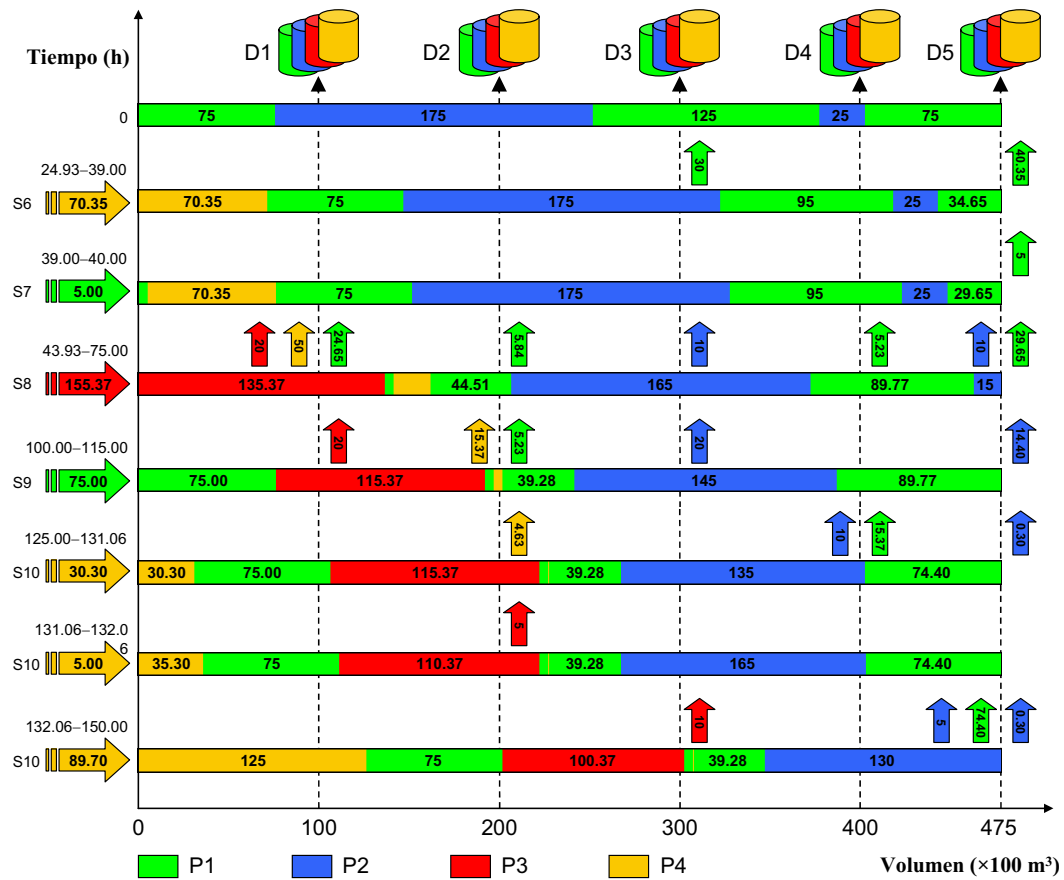


Figura 3.11: Solución óptima para los dos periodos obtenida mediante el modelo multiperiodo en el ejemplo 2 con planificación de la producción como variable de decisión.

Al igual que en los ejemplos anteriores, la figura 3.12 muestra la variación temporal de los niveles de inventario de producto en los tanques de la refinería y todos los depósitos correspondiente a la solución mostrada en la figura 3.11. Tal y como se observa en las gráficas, los niveles de inventario se mantienen dentro de su rango permisible en todos los tanques durante todo el horizonte de planificación.

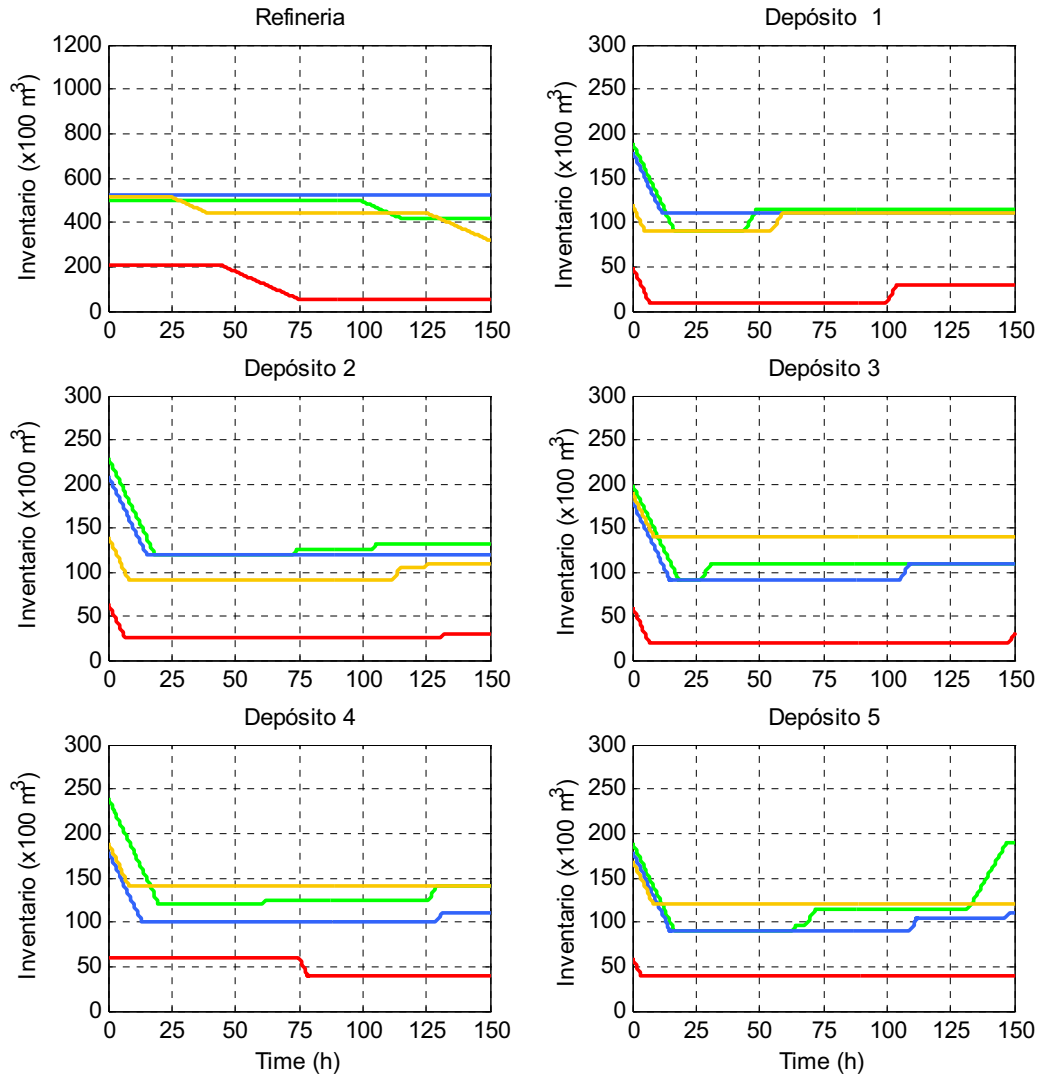


Figura 3.12: Evolución de los niveles de inventario correspondiente a la solución mostrada en la figura 6.10.

Finalmente, la tabla 3.9 muestra a modo de resumen el valor de cada uno de los términos que aparecen en la función objetivo así como el total para todos los modelos ejecutados en dicho ejemplo, donde OBJ1 es el coste asociado al la inyección de producto en el poliducto en condiciones normales, OBJ2 es el coste de penalización por el bombeo de producto en el poliducto durante los intervalos de alto coste, OBJ3 es el

coste asociado al reprocesamiento del volumen de contacto entre paquetes que contienen productos diferentes, OBJ4 es el coste asociado al inventario de producto en los tanques de la refinería y OBJ5 es el coste asociado al inventario de producto en los tanques de los depósitos. Tal y como puede verse en dicha tabla el modelo MP+PP es el que ofrece mejores resultados seguido del MP.

Tabla 3.9: Valor de cada término en la objetivo para todos los casos ejecutados.

Modelo	Coste ($\times 10^2$ US\$)					
	OBJ1	OBJ2	OBJ3	OBJ4	OBJ5	TOTAL
SP (Periodo 1)	1014.79	0.00	107.00	19858.82	12122.72	33103.33
SP (Periodo 2)	1548.00	0.00	72.00	17268.19	14971.38	33859.57
SP (Total)	2562.79	0.00	179.00	37127.01	27094.10	66962.91
MP	2457.41	1253.70	174.00	37250.74	23234.42	64370.27
MP+PP	2472.05	307.20	179.00	37252.03	18537.22	58747.50

3.2.3 Ejemplo 3: Un ejemplo con más de dos periodos

El tercer ejemplo aquí mostrado comprende 4 periodos cada uno de los cuales es una réplica del primer periodo de los dos ejemplos anteriores. La dimensión del problema, como veremos más adelante, complica el problema lo suficiente como para no poder ser resuelto de forma eficiente mediante técnicas clásicas. La tabla 3.10 proporciona la demanda de cada producto a satisfacer en cada uno de los periodos que componen el horizonte de planificación. En este ejemplo se incluye además la planificación de la producción como parte del proceso de decisión.

Tabla 3.10: Demanda de producto en cada periodo para el ejemplo 3.

Producto	Demanda para el periodo 1 ($\times 10^2$ m ³)					Demanda para el periodo 2 ($\times 10^2$ m ³)				
	D1	D2	D3	D4	D5	D1	D2	D3	D4	D5
P1	100	110	120	120	150	20	20	20	20	20
P2	70	90	100	80	100	20	20	20	20	20
P3	60	40	40	0	20	20	20	20	20	20
P4	60	50	50	50	50	20	20	20	20	20

Producto	Demanda para el periodo 3 ($\times 10^2$ m ³)					Demanda para el periodo 4 ($\times 10^2$ m ³)				
	D1	D2	D3	D4	D5	D1	D2	D3	D4	D5
P1	100	110	120	120	150	20	20	20	20	20
P2	70	90	100	80	100	20	20	20	20	20
P3	60	40	40	0	20	20	20	20	20	20
P4	60	50	50	50	50	20	20	20	20	20

El modelo involucra 22184 restricciones y 14328 variables, de las cuales 2356 son binarias. Cuando se trata de resolver tal modelo mediante métodos clásicos, tales como el algoritmo Branch&Bound, el tiempo necesario para alcanzar una solución aceptable se hacen demasiado grande, por lo que no es posible encontrar una solución al problema de forma eficiente. Por ello, se propone la utilización de técnicas heurísticas que ayuden a resolver dicho problema de forma eficiente. La idea básica, consiste en sustituir la forma en la que el algoritmo Branch&Bound fija la parte entera del problema mediante un algoritmo heurístico que genere dichas soluciones enteras utilizando el conocimiento que tiene del problema y las vaya modificando de tal manera que converjan hacia el óptimo. Esta idea se ilustra en el diagrama mostrado en la figura 3.13. Tal y como se puede ver el algoritmo comienza por generar de forma aleatoria una población de soluciones que satisfagan todas las restricciones correspondientes a la parte entera de la formulación MIP. A continuación dichas soluciones se utilizan para fijar el valor de todas las variables enteras la formulación MIP, y los problemas lineales (LP, de Linear Programming en inglés) resultantes son resueltos mediante CPLEX. Si alguna combinación (individuo+solución CPLEX) es suficientemente buena se toma como solución al problema, en caso contrario, se utiliza un algoritmo heurístico para modificar las soluciones de la población entera con el objetivo de mejorar la solución encontrada hasta el momento.

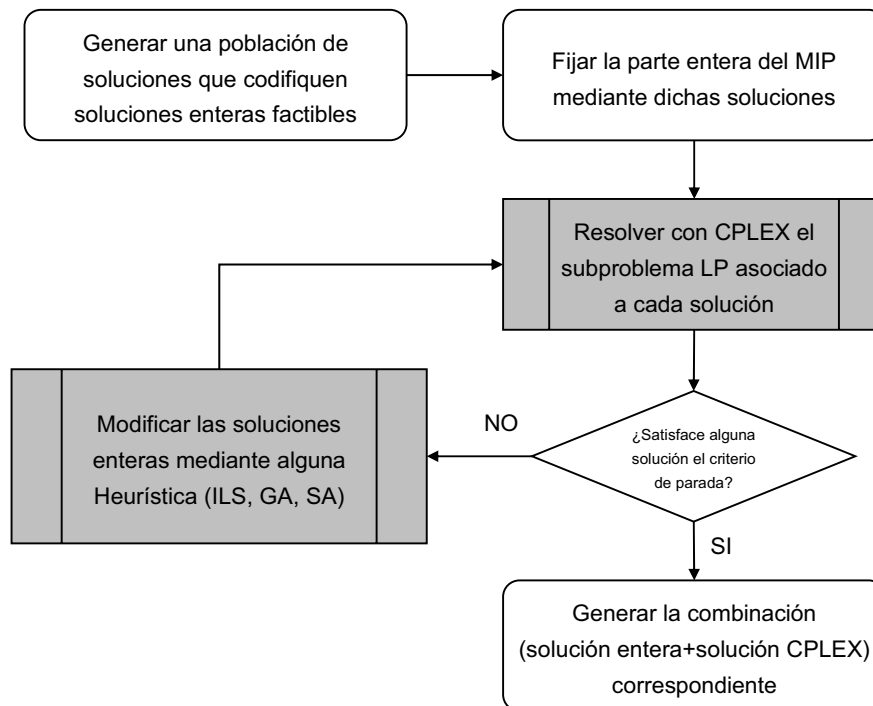


Figura 3.13: Utilización de heurísticas en la resolución de problemas MIP.

3.3 Implementación del modelo discreto

3.3.1 Resolución del modelo mediante CPLEX

Al igual que en la sección 3.1.1, se presentan en esta sección ciertos aspectos a tener en cuenta a la hora de implementar y resolver en un computador mediante una herramienta comercial el modelo discreto desarrollado en el *Capítulo* anterior. De nuevo, se utilizará el resolutor CPLEX sobre un modelo implementado en la versión 4.2 de la herramienta ILOG–OPL Studio. En primer lugar, la mayoría de las herramientas comerciales sólo permiten el uso de modelos lineales, por lo que algunas de las ecuaciones mostradas en los modelos discretos desarrollados en el *Capítulo* anterior deben ser linealizadas antes de ser implementados en un computador. En cuanto al modelo completo, la única no linealidad está relacionada con la entrada de producto a los nodos intermedios y finales. Tal no linealidad aparece en las ecuaciones (2.71) y (2.72) como el producto de de dos variables binarias (x y s), por lo que es fácilmente linealizabile mediante la utilización de nuevas variables continuas que deben ser incorporadas al modelo junto con un conjunto de restricciones adicionales necesarias para que los modelos original y linealizado sean equivalentes. Con este propósito, se han definido las variables mostradas en la ecuación (3.17), que deben cumplir las restricciones mostradas en la ecuación (3.18).

$$e_{t,c,p} = x_{t,c,B_c,p} \cdot s_{t,c} \quad ; \quad \forall (t,c,p) \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} e_{t,c,0} &\leq x_{t,c,B_c,p} & ; \quad \forall (t,c,p) \\ e_{t,c,p} &\leq s_{t,c} & ; \quad \forall (t,c,p) \\ e_{t,c,p} &\geq x_{t,c,B_c,p} + s_{t,c} - 1 & ; \quad \forall (t,c,p) \end{aligned} \quad (3.18)$$

Ahora, con la ayuda de esta nueva variable e , las ecuaciones (2.71) y (2.72) pueden ser sustituidas por las alternativas lineales mostradas en las ecuaciones (3.19) y (3.20).

$$\begin{aligned} a_{t,n,p} &= a_{t-1,n,p} - \sum_{c \in OC_n} y_{t,c,p} + \sum_{c \in IC_n} e_{t,c,p} & ; \quad \forall (t,n,p) : t > 1, n \in NI \\ a_{1,n,p} &= AO_{n,p} - \sum_{c \in OC_n} y_{1,c,p} + \sum_{c \in IC_n} e_{1,c,p} & ; \quad \forall (n,p) : n \in NI \\ AT_{n,p} &= a_{T,n,p} & ; \quad \forall (n,p) : n \in NI \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} a_{t,n,p} &= a_{t-1,n,p} + \sum_{c \in IC_n} e_{t,c,p} & ; \quad \forall (t,n,p) : t > 1, n \in ND \\ a_{1,n,p} &= AO_{n,p} + \sum_{c \in IC_n} e_{1,c,p} & ; \quad \forall (n,p) : n \in ND \\ AT_{n,p} &= a_{T,n,p} & ; \quad \forall (n,p) : n \in ND \end{aligned} \quad (3.20)$$

En cuanto al modelo reducido, en el *Capítulo* anterior se propusieron dos alternativas al coste de reprocesamiento para el caso en el que el tanto el volumen de contacto (*VC*) como el coste asociado al reprocesamiento de la mezcla de productos diferentes (*CR*) fuese el mismo para todos los pares de productos. Dichas alternativas son las mostradas en las ecuaciones (2.84) y (2.85) que, como puede apreciarse, contienen términos no lineales. Como en el caso anterior, dado que las variables involucradas en dichos términos son binarias, estos son fácilmente linealizables mediante la utilización de nuevas variables continuas que deben ser incorporadas al modelo junto con un conjunto de restricciones adicionales. En cuanto a la ecuación (2.84), esta se puede reescribir como se muestra en la ecuación (3.21) mediante la ayuda de las variables f definidas en la ecuación (3.22), siempre y cuando las restricciones mostradas en (3.23) sean incorporadas al modelo.

$$z_{\text{reprocesamiento}} = CR \times VC \cdot \left(\sum_{c=1}^C (1 - y_{1,c,0}) + \frac{1}{2} \sum_{t=2}^T \sum_{c=1}^C \sum_{p=0}^P f_{t,c,p} \right) \quad (3.21)$$

$$f_{t,c,p} = |y_{t-1,c,p} - y_{t,c,p}| \quad ; \quad \forall (t,c,p) : t > 1 \quad (3.22)$$

$$-f_{t,c,p} \leq y_{t-1,c,p} - y_{t,c,p} \leq f_{t,c,p} \quad ; \quad \forall (t,c,p) : t > 1 \quad (3.23)$$

De forma análoga, la ecuación (2.85) se puede reescribir como se muestra en la ecuación (3.24) mediante la ayuda de las variables u definidas en la ecuación (3.25), siempre y cuando las restricciones mostradas en (3.26) sean incorporadas al modelo.

$$z_{\text{reprocesamiento}} = CR \times VC \cdot \left(\sum_{c=1}^C (1 - y_{1,c,0}) + (T - 1) \cdot C - \sum_{t=2}^T \sum_{c=1}^C \sum_{p=0}^P u_{t,c,p} \right) \quad (3.24)$$

$$u_{t,c,p} = y_{t-1,c,p} \cdot y_{t,c,p} \quad ; \quad \forall (t,c,p) : t > 1 \quad (3.25)$$

$$\begin{aligned} u_{t,c,p} &\leq y_{t-1,c,p} && ; \quad \forall (t,c,p) : t > 1 \\ u_{t,c,p} &\leq y_{t,c,p} && ; \quad \forall (t,c,p) : t > 1 \\ u_{t,c,p} &\geq y_{t-1,c,p} + y_{t,c,p} - 1 && ; \quad \forall (t,c,p) : t > 1 \end{aligned} \quad (3.26)$$

Finalmente, en cuanto al modelo que surge tras eliminar las variables almacén, se pueden incorporar un conjunto de restricciones redundantes que aceleran la convergencia del algoritmo Branch&Bound en la búsqueda del óptimo. Dichas restricciones tienen en cuenta que la cantidad de producto almacenado en los tanques de los nodos fuente sólo puede disminuir, y que la cantidad de producto almacenado en los tanques de los nodos destino sólo puede aumentar. Por tanto, las restricciones mostradas en la ecuación (3.27) pueden ser añadidas al modelo.

$$\begin{aligned} a_{t,n,p} &\leq a_{t-1,n,p} && ; \quad \forall (t,n,p) : t > 1, n \in NS, p > 0 \\ a_{t,n,p} &\geq a_{t-1,n,p} && ; \quad \forall (t,n,p) : t > 1, n \in ND, p > 0 \end{aligned} \quad (3.27)$$

3.3.2 Construcción de un visualizador de soluciones en MATLAB

Al igual que en la sección 3.1.2 para el modelo continuo, se ha desarrollado una herramienta sobre MATLAB para visualizar el comportamiento de la red de poliductos cuando opera según las soluciones obtenidas tras el proceso de optimización del modelo discreto. El visualizador desarrollado se muestra en la figura 3.1. Los principales elementos del mismo son:

- Una ventana en la que se muestra la topología de la red cuyo funcionamiento se pretende visualizar. Los nodos fuente, intermedios y destino se muestran en las partes superior, media e inferior respectivamente. Estos nodos están conectados mediante poliductos por los que transita el producto utilizándose un color diferente para cada uno de los diferentes tipo de producto disponibles.
- Un reloj situado entre la parte superior derecha de la ventana mostrando el avance temporal durante toda la operación.
- Unos valores numéricos situados en la parte derecha de la herramienta mostrando el nivel de inventario de cada uno de los productos almacenados en cada uno de los nodos de la red en cada instante del horizonte de planificación. Además, para los nodos fuente se muestra también la oferta, mientras que para los nodos intermedios y destino se muestra la demanda.

El funcionamiento de dicho visualizador de soluciones es el siguiente:

- Cada vez que el reloj avanza en una unidad, los paquetes dentro de cada poliducto avanzan una unidad de longitud empujados por el paquete inyectado desde la fuente o nodo intermedio correspondiente.
- Cada uno de los paquetes que son inyectados desde los nodos fuente hace que el correspondiente nivel de inventario disminuya en una unidad. Del mismo modo cada uno de los paquetes que llegan a un nodo destino hace que el correspondiente nivel de inventario aumente en una unidad.
- Finalmente, cada vez que un paquete llega a un nodo intermedio, este puede ser almacenado en el tanque correspondiente, aumentado en una unidad su nivel de inventario, o puede ser bifurcado hacia uno de los poliductos de salida, dejando invariante los niveles de inventario de dicho nodo.

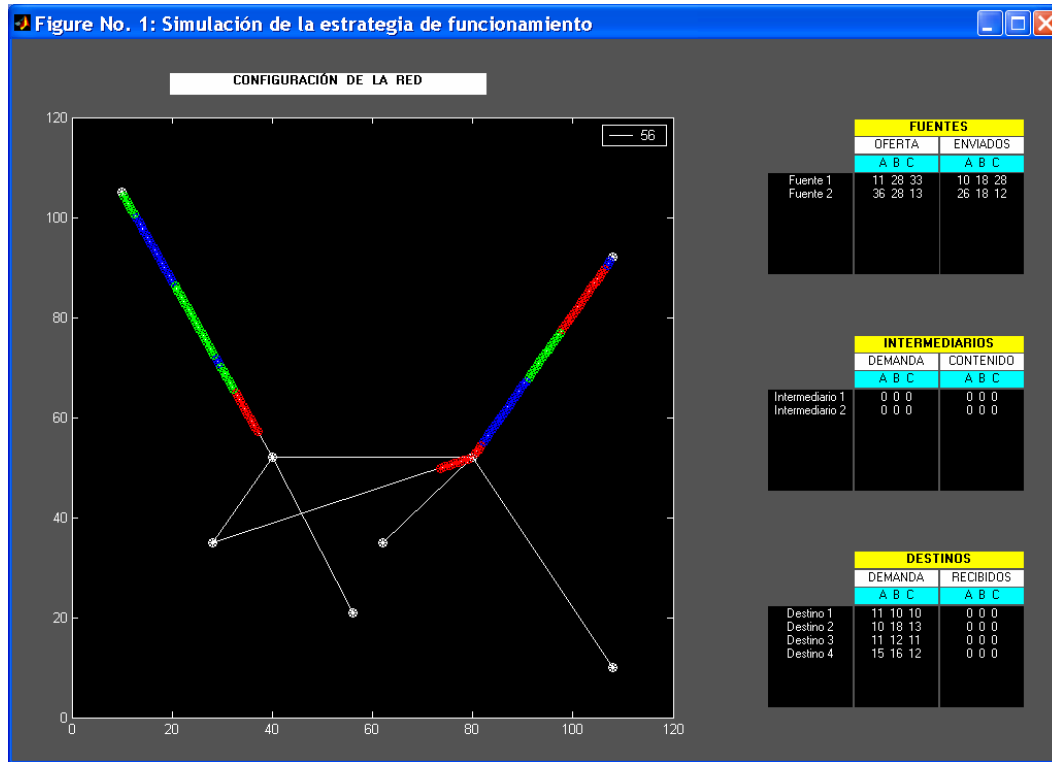


Figura 3.14: Visualizador de soluciones para una red de poliductos.

3.4 Ejemplos de aplicación del modelo discreto

A continuación se resuelven tres ejemplos utilizando el modelo reducido. Por tanto, no se permiten paradas en el modo de funcionamiento del sistema. Además se distinguen dos modos de operación: el *modo bifurcador* y el *modo almacén*. El modo bifurcador es aquel en el que no se permite almacenamiento de producto en los nodos intermedios, por lo que éstos actúan como bifurcadores, redireccionando los paquetes que les llegan hacia los destinos a través de sus conexiones salientes. Por el contrario, en el modo almacén, sí se permite el almacenamiento de producto en los nodos intermedios. La solución así obtenida tendrá un coste adicional consecuencia de dicho almacenamiento intermedio de producto, sin embargo, permite a su vez el reagrupamiento de los diferentes paquetes con mismo producto reduciendo el coste asociado al procesamiento de las interfases con mezcla. Como se verá en las secciones siguientes, el modo almacén es el que resulta más complicado de resolver desde el punto de vista computacional cuando se aplican técnicas clásicas debido a la ausencia de las restricciones que limitan a cero los niveles de inventario en los nodos intermedios, y que reducen en gran medida el espacio de búsqueda.

Los dos primeros ejemplos corresponden a una red pequeña. A través de ellos se muestra la estructura de la solución obtenida tanto para el modo bifurcador como para el modo almacén. El segundo ejemplo corresponde a una red de mayor tamaño en modo almacén, con un mayor número de paquetes demandados y un mayor horizonte de planificación, haciendo que el coste computacional requerido para su resolución mediante técnicas clásicas sea excesivo. Por ello, en el *Capítulo* siguiente se proponen algoritmos basados en heurísticas capaces de resolver tal problema de forma eficiente. De nuevo, el modelo MILP aquí propuesto se resuelve mediante CPLEX a través de ILOG–OPL Studio 4.2 sobre un procesador Intel Xeon a 2.8GHz y 2GB de RAM.

3.4.1 Ejemplo 1: Red pequeña en modo bifurcador

La red correspondiente a este ejemplo se muestra en la figura 3.15. La red está compuesta por 2 nodos fuente, 2 nodos intermedios y 2 nodos destino, todos ellos interconectados mediante 5 poliductos, siendo bidireccional el que conecta los dos nodos intermedios. La longitud de cada poliducto (medido en número de paquetes que el mismo puede contener en cada instante de tiempo) es $d_c=[2,2,2,2,2]$. Además, existen 3 tipos de producto diferentes (sin contar el producto de relleno) que deben ser distribuidos hasta los destinos dentro del horizonte de planificación formado por 20 unidades de tiempo. Por lo tanto, el problema consta de $N=6$ nodos, $C=6$ conexiones, $P=4$ productos y $T=20$ unidades de tiempo.

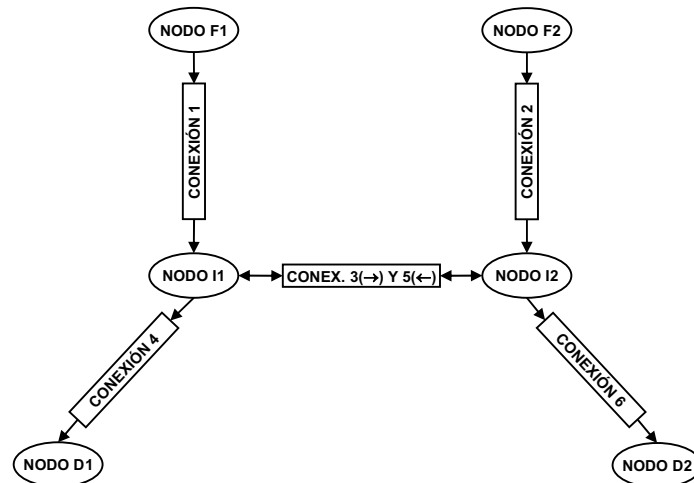


Figura 3.15: Red utilizada en el ejemplo 1.

La tabla 3.11 muestra los datos con la configuración de la red. Dicha tabla muestra los niveles máximo y mínimo permitidos para el almacenamiento de producto en cada uno de los nodos de la red, así como los valores inicial y final para los mismos. Los

datos han sido escogidos de tal manera que se fuerce el tránsito de producto a través del poliducto bidireccional en ambos sentidos. Además, puede observarse como el almacenamiento de producto en los nodos intermedios no está permitido por lo que estos actúan como bifurcadores de producto. El volumen de contacto y su coste asociado se muestra en la tabla 3.12. Las secuencias de producto prohibidas se indican con una \times . Otros parámetros del modelo son, $VP=500 \text{ m}^3$ y $\tau=0 \text{ s}$.

Tabla 3.11: Datos del problema para el ejemplo 1.

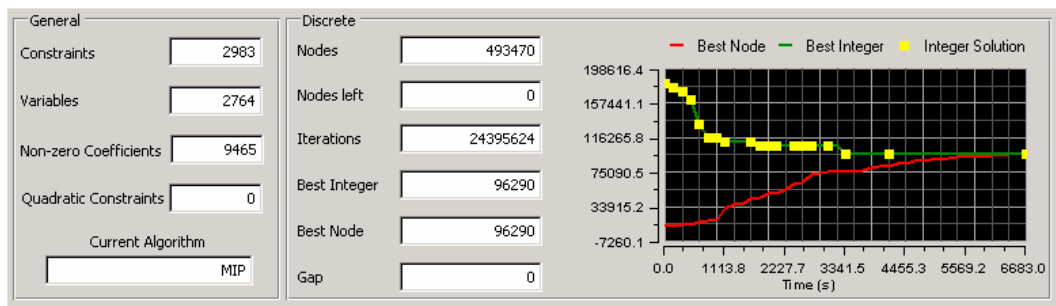
Producto	Característica	Nodos					
		F1	F2	I1	I2	D1	D2
P1	Nivel mínimo (uds.)	0	0	0	0	0	0
	Nivel máximo (uds.)	10	10	0	0	10	10
	Nivel inicial (uds.)	7	0	0	0	0	0
	Nivel final (uds.)	0	0	0	0	5	2
	Coste de inventario (US\$/ud h)	10	10	100	100	\times	\times
P2	Nivel mínimo (uds.)	0	0	0	0	0	0
	Nivel máximo (uds.)	10	10	0	0	10	10
	Nivel inicial (uds.)	5	2	0	0	0	0
	Nivel final (uds.)	0	0	0	0	5	2
	Coste de inventario (US\$/ud h)	10	10	100	100	\times	\times
P3	Nivel mínimo (uds.)	0	0	0	0	0	0
	Nivel máximo (uds.)	10	10	0	0	10	10
	Nivel inicial (uds.)	0	5	0	0	0	0
	Nivel final (uds.)	0	0	0	0	3	2
	Coste de inventario (US\$/ud h)	10	10	100	100	\times	\times

Tabla 3.12: Volumen y coste de contacto.

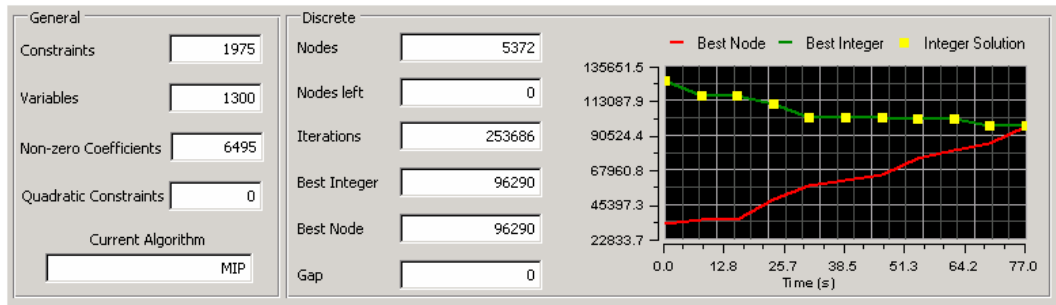
Producto	Volumen de contacto (m^3)				Coste de contacto (US\$/ m^3)			
	P0	P1	P2	P3	P0	P1	P2	P3
P0	0	50	50	50	0	100	100	100
P1	50	0	50	50	100	0	100	100
P2	50	50	0	50	100	100	0	100
P3	50	50	50	0	100	100	100	0

Como se vio en el *Capítulo 2* dependiendo del número de características que se incluyan en el problema, se tiene el modelo completo o el reducido. Además, el término de la función objetivo correspondiente al reprocesamiento de la mezcla de productos se

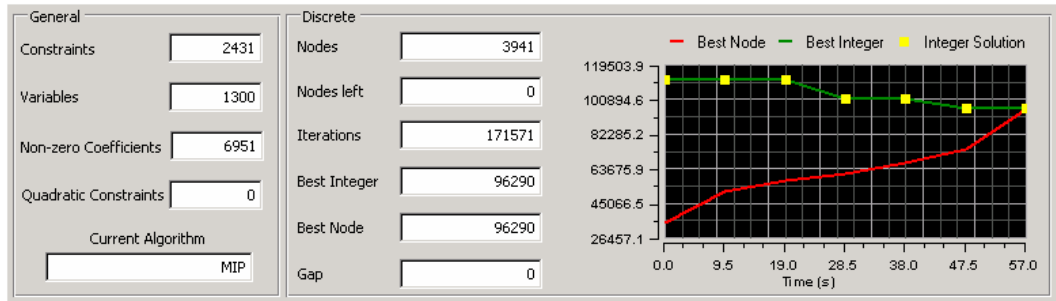
puede escribir sin necesidad de las variables vc cuando los volúmenes y costes de la mezcla son iguales para todos los pares de productos. En estos casos se obtiene un modelo simplificado que se ha denominado ABS ó QUAD dependiendo de la función utilizada para escribir el término asociado al coste de reprocesamiento. En concreto, el ejemplo aquí propuesto puede resolverse mediante el modelo reducido o cualquiera de los dos modelos simplificados ya que se trata de un sistema sin paradas en su funcionamiento durante todo el intervalo de planificación y en el que los costes y volúmenes asociados al reprocesamiento de las mezclas son idénticos para todos los pares de productos presentes en el problema. La figura muestra la evolución del algoritmo MIP utilizado por CPLEX en la búsqueda de la solución óptima cuando se utilizan los modelos reducido (a), simplificado ABS (b) y simplificado QUAD (c).



(a)



(b)



(c)

Figura 3.16: Evolución del algoritmo MIP para el ejemplo 1.

La tabla 3.13 una comparativa entre las dimensiones asociadas a cada uno de los modelos utilizados junto con el tiempo utilizado por el algoritmo MIP para encontrar la solución en cada caso. Se muestra además la dimensión que tendría el modelo completo si se tratase de aplicar a este problema.

Tabla 3.13: Dimensiones de los problemas MIP asociados a cada modelo.

Modelo	Restricciones	Variables	Coefficientes $\neq 0$	Tiempo (s)
Modelo completo	7227	4446	22335	×
Modelo reducido	2983	2764	9465	6683
Modelo simplificado ABS	1975	1300	6495	77
Modelo simplificado QUAD	2431	1300	6951	57

Tal y como se ve en dicha tabla, tan solo el hecho de no considerar paradas en el sistema reduce a aproximadamente la mitad la dimensión del problema al pasar del modelo completo al reducido. Además, si los costes y volúmenes asociados al reprocesamiento de las mezclas son idénticos para todos los pares de productos presentes en el problema, se obtiene una nueva reducción en la dimensión del problema, ya que en este caso se pueden utilizar los modelos simplificados (ABS o QUAD), haciendo que los tiempos de cómputo necesarios para alcanzar la solución óptima se reduzcan aproximadamente en dos órdenes de magnitud con respecto al obtenido utilizando el modelo reducido.

En concreto, utilizando el modelo simplificado en su versión QUAD se obtiene una solución en la que el coste total de la operación es de 96290 dólares, repartidos en 95000 dólares correspondientes a las 19 interfases con mezcla que se deben reprocesar, y 1290 dólares correspondientes al coste de inventario en los nodos fuente. Evidentemente, dado que la red funciona en modo bifurcador, el coste de inventario en los nodos intermedios es cero. La figura 3.16c muestra la evolución del algoritmo durante los 57 segundos que tarda en encontrar la solución óptima. Tal y como se ve, el algoritmo encuentra otras 6 soluciones factibles al problema hasta llegar a la óptima. Dicha figura también muestra las dimensiones del problema a resolver junto con el algoritmo utilizado bajo la etiqueta *General*, así como el número de iteraciones de dicho algoritmo junto con la mejor solución obtenida bajo la etiqueta *Discrete*.

A continuación se muestra en la tabla 3.14 la solución obtenida utilizando el modelo simplificado QUAD. Dicha solución consiste en una secuencia de ceros y unos indicando el tipo de paquete que se lanza por cada conexión en cada instante de tiempo. Dicha solución se denominará a partir de ahora solución *binaria*. A partir de

ella, se puede obtener la correspondiente solución *entera* sin más que utilizar un número entre 1 y P para cada uno de los productos incluido el de relleno (codificado como 0). Haciendo esto, se obtiene la solución mostrada en la tabla 3.15.

Tabla 3.14: Solución binaria para el ejemplo 1.

t		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
C1	P0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
	P1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	P2	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
	P3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
C2	P0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1
	P1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	P2	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	P3	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
C3	P0	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	P1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	P2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	P3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
C4	P0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1
	P1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	P2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
	P3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0
C5	P0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1
	P1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	P2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	P3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0
C6	P0	1	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
	P1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	P2	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	P3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabla 3.15: Solución entera para el ejemplo 1.

t		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
C1		1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	0	0	0	0	0	0	0	0
C2		0	0	0	0	0	0	2	2	3	3	3	3	3	0	0	0	0	0	0	0
C3		0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
C4		0	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	3	3	3	3	0	0
C5		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	3	3	0	0	0	0	0
C6		0	0	0	0	1	1	0	0	2	2	3	3	0	0	0	0	0	0	0	0

Utilizando una representación similar a la mostrada en la figura 2.8, se obtiene el modo de operación mostrado en la figura 3.17. En dicha figura puede verse como los nodos intermedios inyectan los paquetes en el poliducto bidireccional constituido por las conexiones 3 y 5 de tal manera que los mismos no colisionen en su interior. Además, puede verse que son suficientes 18 horas para obtener una solución óptima al

problema. El sistema permanece funcionando durante la 18 primeras horas de las 20 que componen el horizonte de planificación como consecuencia de haber incluido el coste de inventario en los nodos fuente.

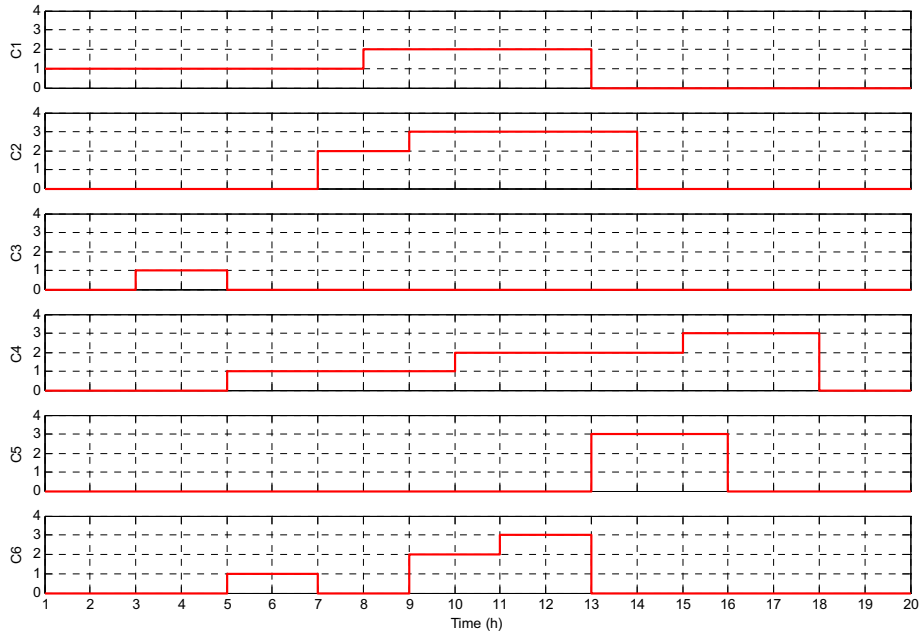


Figura 3.17: Modo de operación para la red del ejemplo 1.

Utilizando la herramienta desarrollada para visualizar las soluciones obtenidas, se puede ver la evolución a medida que pasa el tiempo de los diferentes paquetes en la red desde las fuentes hasta los destinos y pasando por los nodos intermedios. Dicha evolución temporal se muestra en la figura 3.18.

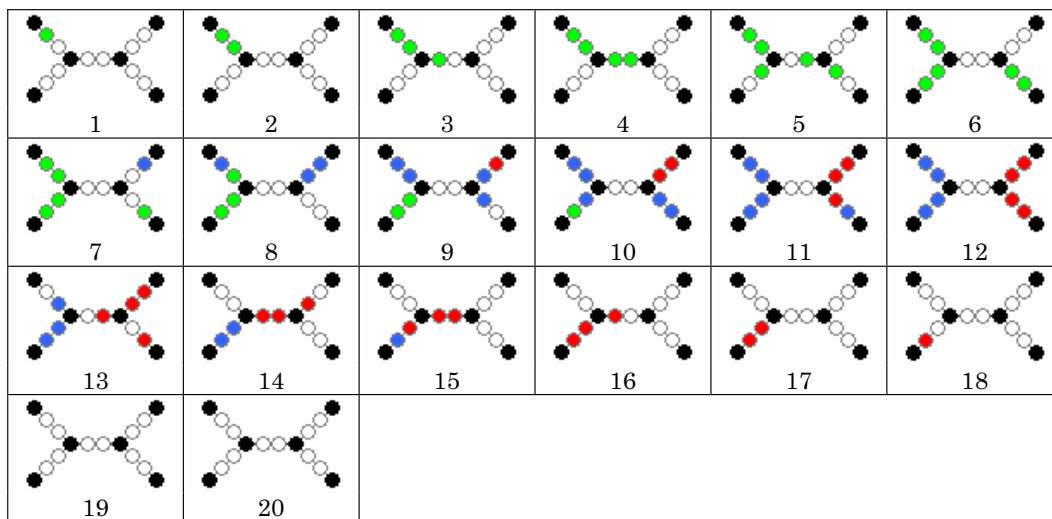


Figura 3.18: Visualización de la solución obtenida para el ejemplo 1.

Finalmente, la figura 3.19 muestra la evolución temporal de los niveles de inventario de cada producto para todos los nodos de la red. Como puede verse, todo el producto pasa de las fuentes a los destinos sin almacenamiento temporal en los nodos intermedios, ya que la red está funcionando en modo bifurcador.

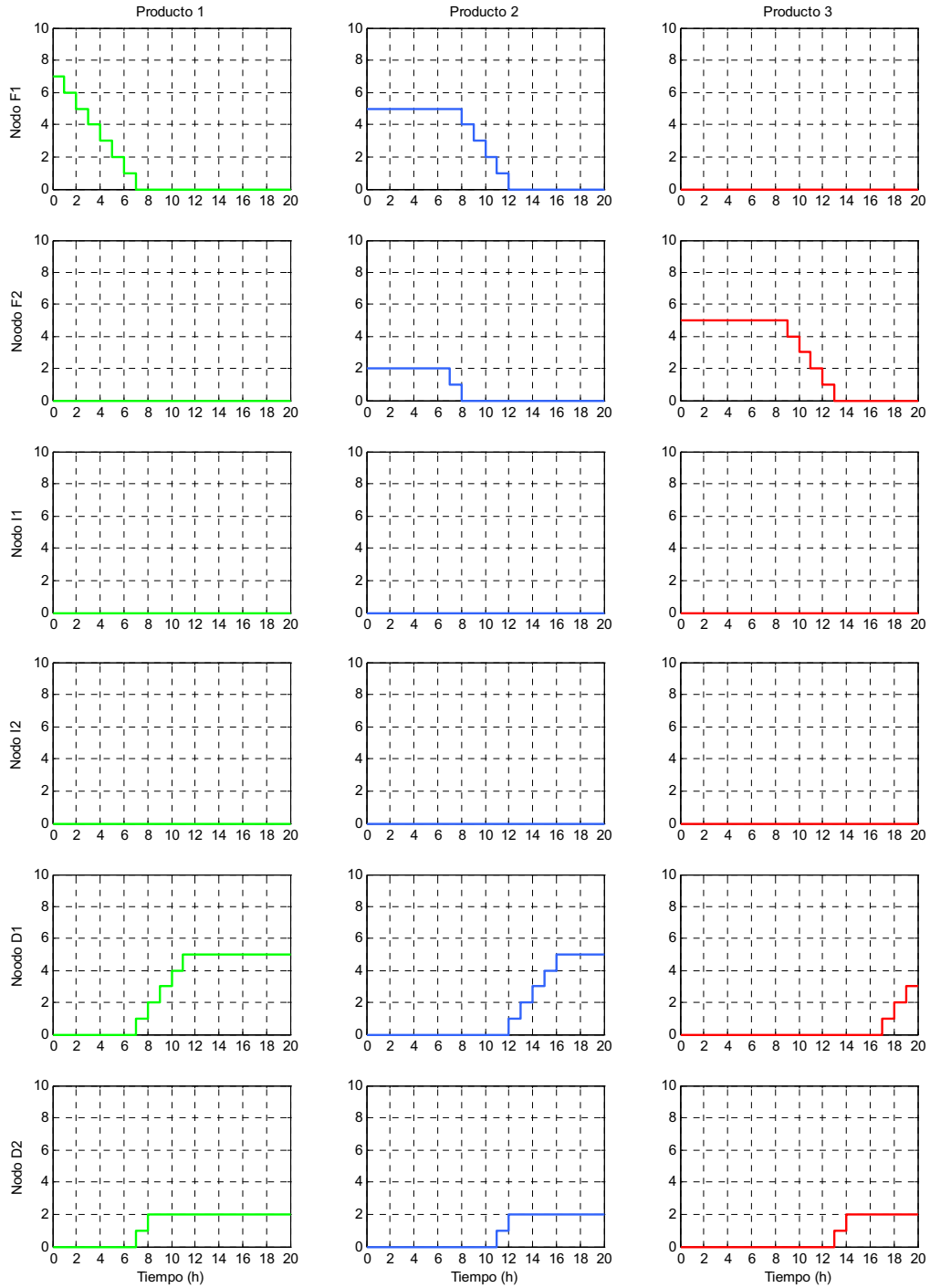


Figura 3.19: Evolución temporal de los niveles de inventario para la solución óptima.

3.4.2 Ejemplo 2: Red pequeña en modo almacén

A continuación se muestra el resultado obtenido al resolver el mismo problema del apartado anterior pero con la red pequeña funcionando en modo almacén. En este modo se permite el almacenamiento de producto en los tanques de los nodos intermedios (I1 e I2) durante el intervalo de planificación. Por tanto, la única diferencia de los datos para este problema respecto a los del apartado anterior se encuentra en la tabla 3.11. En este caso el nivel máximo de inventario para los nodos I1 e I2 se ha fijado a 10 unidades para todos los productos presentes en el problema. Debido a dicha posibilidad de almacenamiento intermedio de producto, el espacio de búsqueda a recorrer para encontrar la solución óptima aumenta de forma considerable, haciendo que el tiempo empleado por el algoritmo de optimización en encontrar la solución al problema también aumente. En estos casos, como se verá a lo largo del siguiente *Capítulo*, se tratará de buscar alternativas eficientes a los algoritmos clásicos utilizados por las herramientas comerciales de optimización (como la aquí utilizada, CPLEX). La figura 3.20 muestra la evolución del algoritmo durante los 23521 segundos que tarda en encontrar la solución óptima. En este caso, el algoritmo encuentra otras 18 soluciones factibles al problema hasta llegar a la óptima.

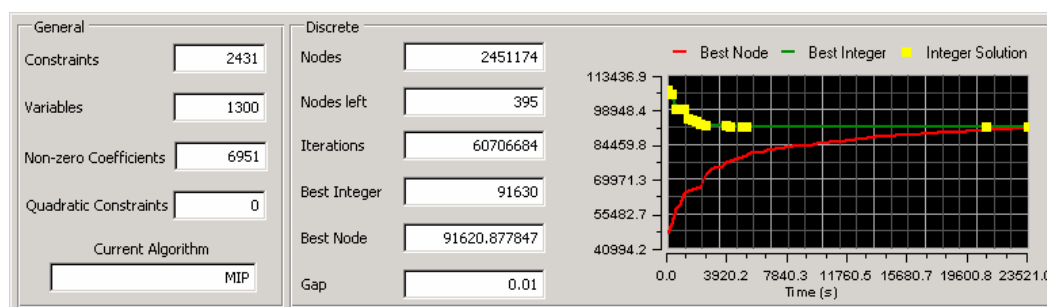


Figura 3.20: Evolución del algoritmo MIP para el ejemplo 2.

Como puede verse en la tabla 3.16 la resolución del problema en el modo almacén ofrece mejores resultados a los obtenidos en el modo bifurcador. Esto es debido a que el almacenamiento temporal de determinados paquetes en los nodos intermedios hace que éstos puedan ser lanzados posteriormente junto a otros del mismo tipo, reduciendo así el coste de reprocesamiento asociado a la mezcla.

Tabla 3.16: Dimensiones de los problemas MIP asociados a cada modelo.

Modo de operación	Obj. 1 (\$)	Obj. 2 (\$)	Obj. 3 (\$)	TOTAL (\$)	Tiempo CPU (s)
Bifurcador	95000	1290	0	96290	57
Almacén	90000	1230	400	91630	23521

Finalmente, la figura 3.19 muestra la evolución temporal de los niveles de inventario de cada producto en cada nodo de la red. Como puede verse, en este caso se permite el almacenamiento de producto en los nodos intermedios de la red. En concreto se ve como el nodo I1 llega a contener hasta dos paquetes de producto tipo 1.

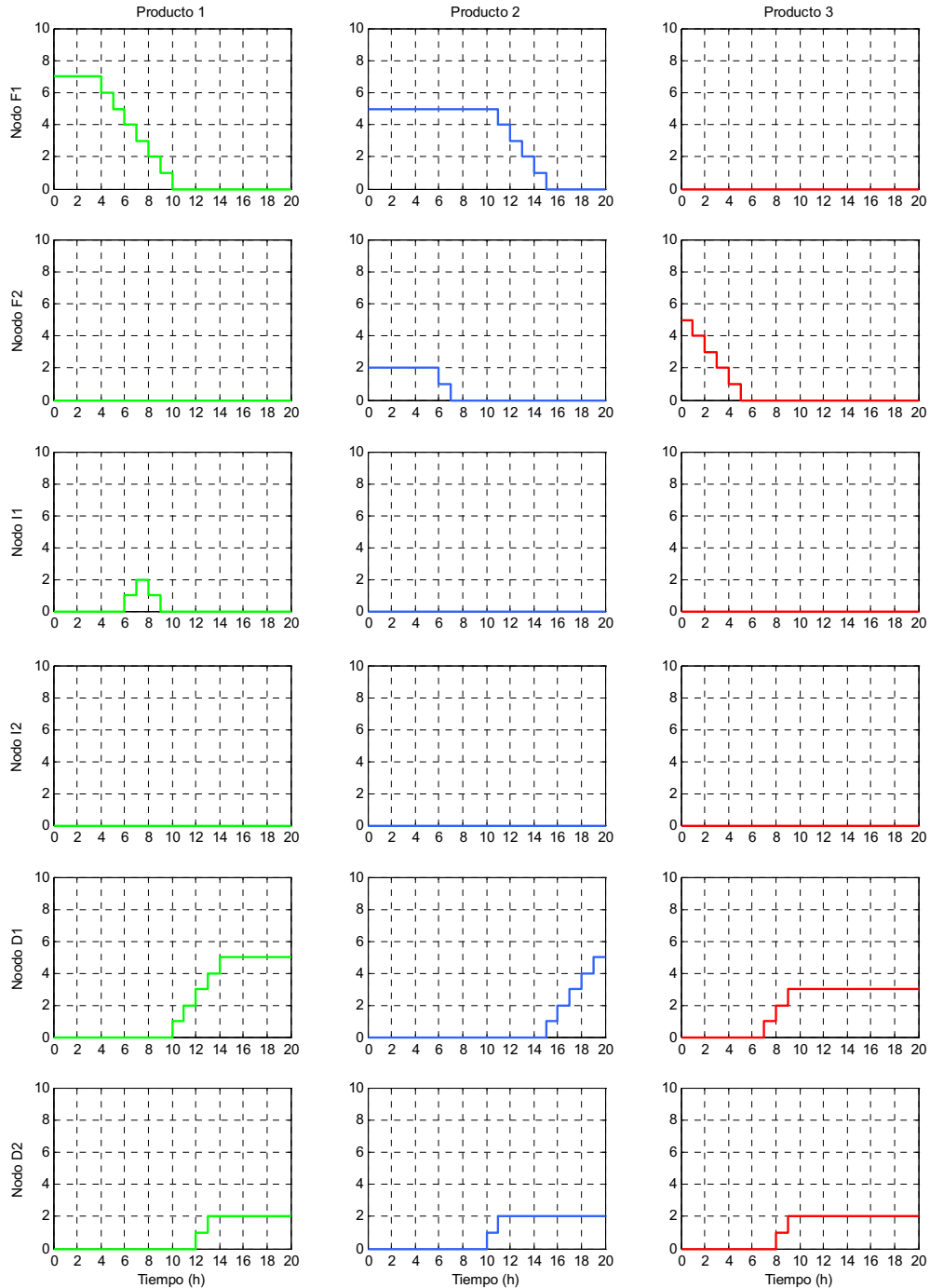


Figura 3.21: Evolución temporal de los niveles de inventario para la solución obtenida en el modo almacén.

3.4.3 Ejemplo 3: Red grande en modo almacén

La red correspondiente a este ejemplo se muestra en la figura 3.22. La red está compuesta por 2 nodos fuente, 2 nodos intermedios y 3 nodos destino, todos ellos interconectados mediante 7 poliductos, siendo bidireccional el que conecta los dos nodos intermedios. La longitud de cada poliducto (medido en número de paquetes que el mismo puede contener en cada instante de tiempo) es $d_c=[4,4,5,5,7,5,4,6]$. Además, existen 4 tipos de producto diferentes (sin contar el producto de relleno) que deben ser distribuidos hasta los destinos dentro del horizonte de planificación formado por 80 unidades de tiempo. Por lo tanto, el problema consta de $N=7$ nodos, $C=8$ conexiones, $P=4$ productos y $T=70$ unidades de tiempo.

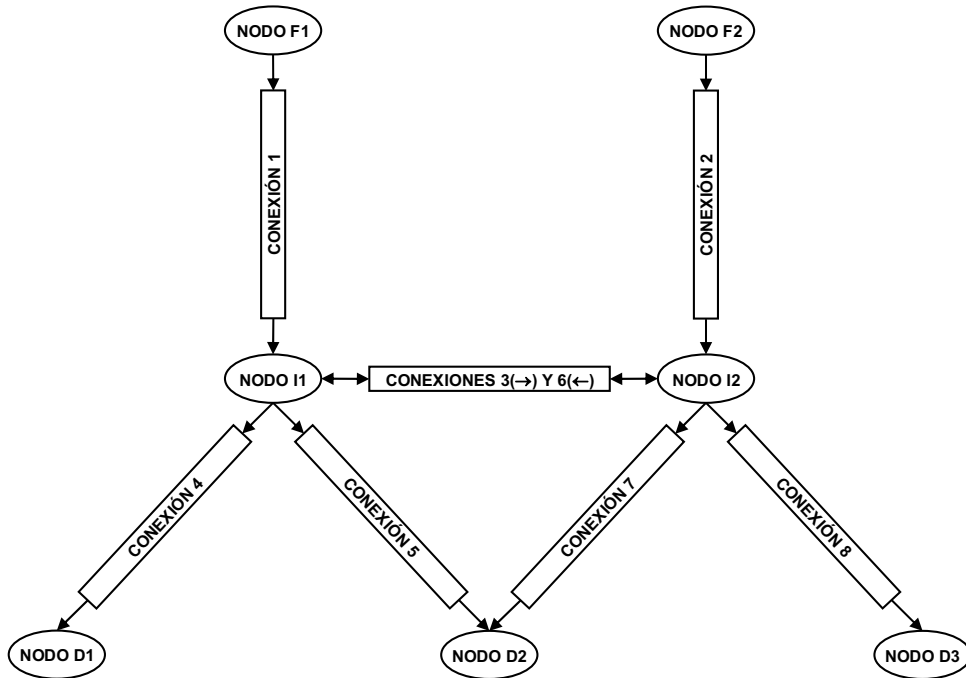


Figura 3.22: Red utilizada en el ejemplo 3.

La tabla 3.17 muestra los datos con la configuración de la red. Dicha tabla muestra los niveles máximo y mínimo permitidos para el almacenamiento de producto en cada uno de los nodos de la red, así como los valores inicial y final para los mismos. Los datos han sido escogidos de tal manera que se fuerce el tránsito de producto a través del poliducto bidireccional en ambos sentidos. Además, puede observarse como el almacenamiento de producto en los nodos intermedios está permitido. Estas dos características hacen que el problema sea especialmente difícil de resolver (en términos de tiempo CPU) utilizando técnicas clásicas.

Tabla 3.17: Datos del problema para el ejemplo 3.

Producto	Característica	Nodos						
		F1	F2	I1	I2	D1	D2	D3
P1	Nivel mínimo (uds.)	0	0	0	0	0	0	0
	Nivel máximo (uds.)	50	50	10	10	50	50	50
	Nivel inicial (uds.)	20	0	0	0	0	0	0
	Nivel final (uds.)	0	0	0	0	5	6	9
	Coste de inventario (US\$/ud·h)	10	10	100	100	×	×	×
P2	Nivel mínimo (uds.)	0	0	0	0	0	0	0
	Nivel máximo (uds.)	50	50	10	10	50	50	50
	Nivel inicial (uds.)	30	0	0	0	0	0	0
	Nivel final (uds.)	0	0	0	0	5	7	18
	Coste de inventario (US\$/ud·h)	10	10	100	100	×	×	×
P3	Nivel mínimo (uds.)	0	0	0	0	0	0	0
	Nivel máximo (uds.)	50	50	10	10	50	50	50
	Nivel inicial (uds.)	0	15	0	0	0	0	0
	Nivel final (uds.)	0	0	0	0	5	5	15
	Coste de inventario (US\$/ud·h)	10	10	100	100	×	×	×
P4	Nivel mínimo (uds.)	0	0	0	0	0	0	0
	Nivel máximo (uds.)	50	50	10	10	50	50	50
	Nivel inicial (uds.)	0	25	0	0	0	0	0
	Nivel final (uds.)	0	0	0	0	5	4	6
	Coste de inventario (US\$/ud·h)	10	10	100	100	×	×	×

Tabla 3.18: Volumen y coste de contacto.

Producto	Volumen de contacto (m ³)					Coste de contacto (US\$/m ³)				
	P0	P1	P2	P3	P4	P0	P1	P2	P3	P4
P0	0	50	50	50	50	0	100	100	100	100
P1	50	0	50	50	50	100	0	100	100	100
P2	50	50	0	50	50	100	100	0	100	100
P3	50	50	50	0	50	100	100	100	0	100
P4	50	50	50	50	0	100	100	100	100	0

Dadas las características del problema, éste puede ser resuelto mediante el *modelo simplificado* QUAD. Dicho modelo, consta para este problema de 7524 variables y 14119 restricciones con 43443 coeficientes distintos de cero. La figura 3.20 muestra la evolución del algoritmo MIP utilizado por el resolutor CPLEX durante 172800 segundos (2 días). Tras ese tiempo se detuvo su ejecución sin llegar a encontrar la

solución óptima. La tabla 3.19 muestra el valor exacto de cada una de las 13 soluciones obtenidas durante este tiempo. Además, dichas soluciones enteras son comparadas con la mejor solución relajada encontrada hasta el momento, así como la separación entre ambas en %, lo que da una idea de la distancia al óptimo, en donde ambas soluciones deben coincidir.

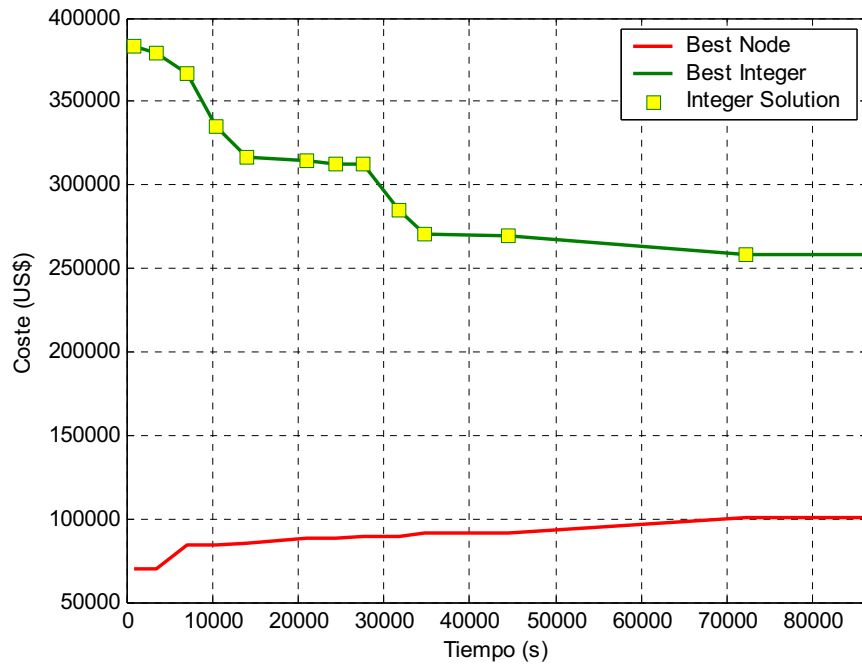


Figura 3.23: Evolución del algoritmo MIP para el ejemplo 3.

Tabla 3.19: Soluciones para la red grande obtenidas con T=66.

Tiempo (hh:mm:ss)	Límite inferior (US\$)	Coste (US\$)	Gap (%)
00:14:06	70461.8374	383540.0000	81.63
00:58:12	70461.8374	378540.0000	81.39
01:56:33	83787.3624	366360.0000	77.13
02:55:16	84301.9547	335170.0000	74.85
03:53:06	85086.6826	316440.0000	73.11
05:51:11	88235.8983	314510.0000	71.94
06:47:42	88333.8148	312650.0000	71.75
07:41:03	89413.9948	312150.0000	71.36
08:49:24	89532.6895	285030.0000	68.59
09:37:33	91623.6239	270770.0000	66.16
12:22:26	91623.6239	269540.0000	66.01
20:02:00	100543.7841	258760.0000	61.14
48:00:00	100543.7841	258760.0000	61.14

Al igual que para la red pequeña, la figura 3.24 muestra la evolución temporal de los niveles de inventario de cada producto en cada nodo de la red. Como puede verse, en este caso se permite el almacenamiento de producto en los nodos intermedios de la red. En concreto se ve como el nodo I1 llega a almacenar en paquetes de todos los tipos, mientras que el nodo I2 almacena temporalmente paquetes de tipo 3 y 4.

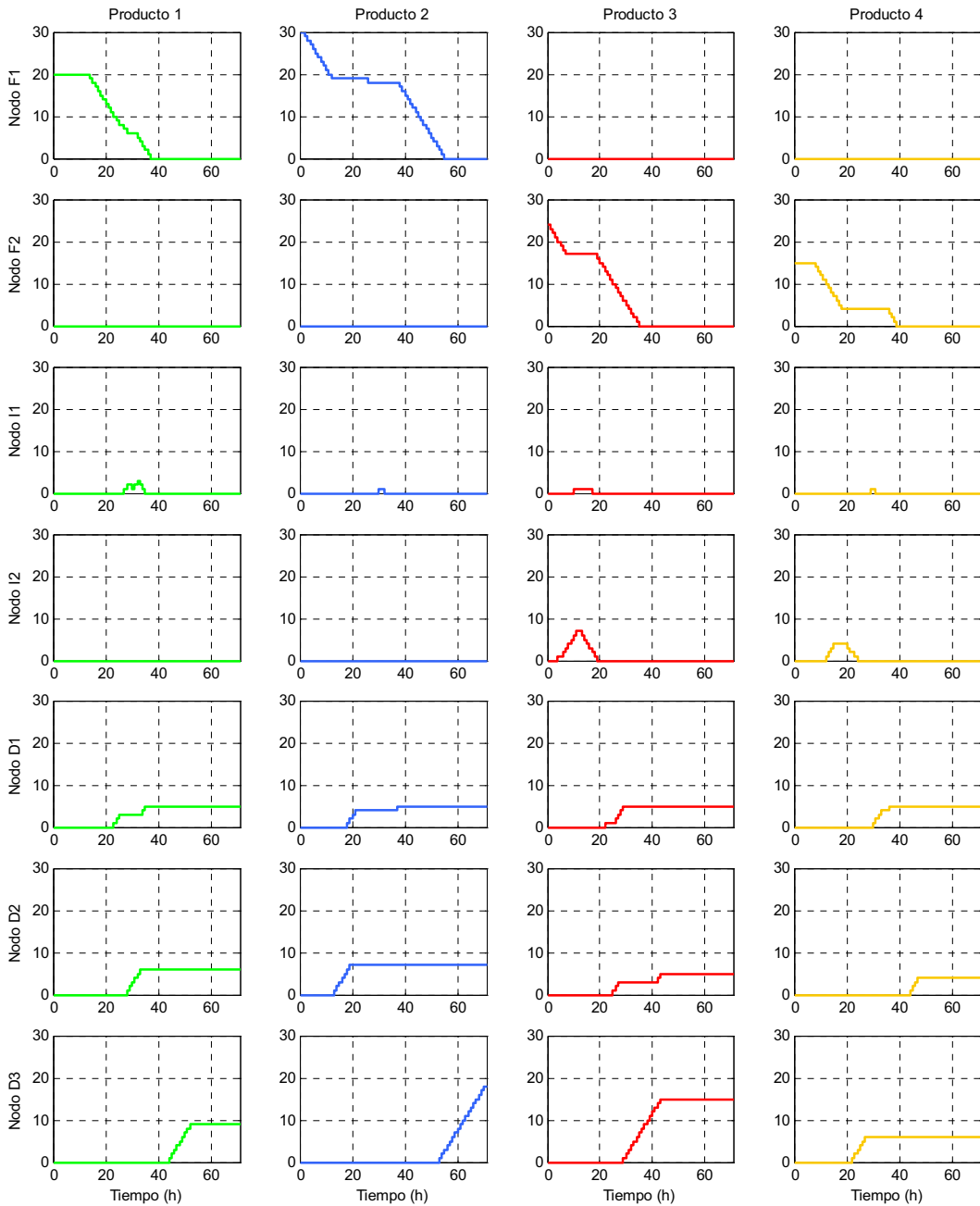


Figura 3.24: Evolución temporal de los niveles de inventario para la mejor solución encontrada.

Finalmente, la figura 3.25 muestra el modo de operación correspondiente a la mejor solución encontrada. En dicha figura puede verse como los nodos intermedios inyectan los paquetes en el poliducto bidireccional constituido por las conexiones 3 y 6 de tal manera que los mismos no colisionen en su interior.

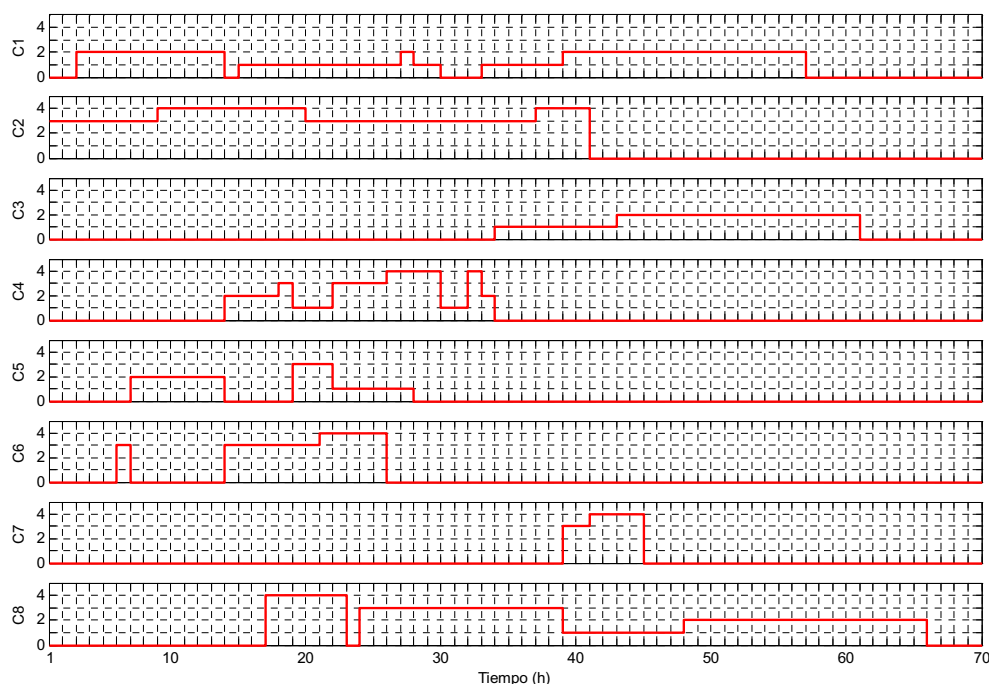


Figura 3.25: Modo de operación para la red del ejemplo 3.

3.5 Conclusiones

En este *Capítulo* se han resuelto varios ejemplos de aplicación de los modelos matemáticos desarrollados en el *Capítulo 2* para la planificación óptima de poliductos (modelo continuo) y redes de poliductos (modelo discreto) de los que pueden extraerse varias conclusiones. Las principales conclusiones que se extraen tras la utilización del modelo continuo son las siguientes:

- La utilización de un modelo multiperiodo permite resolver problemas para los que un modelo monopериodo no es capaz de encontrar ninguna solución. Incluso en el caso en el que fuese posible planificar el modo de operación del poliducto a lo largo de varios periodos mediante un modelo monopериodo, dicha planificación no sería la óptima, tan solo alcanzable mediante la utilización de un modelo multiperiodo.

- Si el modelo integra la planificación de la producción en la refinería como parte del conjunto de variables de decisión del proceso, es posible reducir los costes de la operación al sincronizar temporalmente la producción de los diferentes productos en la refinería con su inyección en el poliducto, consiguiendo que el sistema deje de funcionar durante ciertos intervalos de tiempo del horizonte de planificación en los que la utilización del sistema tiene un coste superior que fuera de los mismos.
- Un modelo multiperiodo que integre la planificación de la producción como variable de decisión es demasiado complejo como para ser resuelto de forma eficiente mediante técnicas clásicas cuando se aplica a problemas con más de 3 ó 4 periodos. Este hecho hace necesario el desarrollo de nuevos algoritmos basados en técnicas heurísticas capaces de aportar buenas soluciones, aunque no sean óptimas, en tiempos de cómputo aceptables.

En cuanto al modelo discreto aplicable a redes de poliductos pueden extraerse las siguientes conclusiones:

- Los nuevos modelos desarrollados para este tipo de sistemas permiten resolver problemas de distribución en los que se incluyan nodos intermedios que pueden actuar tan solo como bifurcadores de producto en diferentes direcciones (modo bifurcador) o como nodos bifurcadores con posibilidad de almacenamiento temporal de producto (modo almacén). La posibilidad de almacenamiento de producto en los nodos intermedios permite reducir el número de interfases con mezcla, reduciendo por tanto el coste de la operación. En contrapartida, cuando la red opera en modo almacén, el espacio de búsqueda a recorrer para encontrar la solución óptima aumenta de forma considerable, haciendo que el tiempo empleado por el algoritmo de optimización en encontrar la solución al problema también aumente en exceso.
- Para problemas que involucren redes de tamaño considerable operando en modo almacén, los algoritmos clásicos de optimización necesitan un excesivo tiempo de cómputo para encontrar la solución óptima del problema dado que se trata de problemas combinatorios. En estos casos, se tratará en el *Capítulo* siguiente de buscar alternativas mediante el desarrollo de algoritmos de optimización basados en técnicas heurísticas que sean capaces de obtener buenas soluciones en tiempos de cómputo aceptables.

Capítulo IV

Desarrollo de Metaheurísticas aplicadas a la Planificación

En el *Capítulo* anterior quedó patente la dificultad de los algoritmos basados en técnicas clásicas a la hora de resolver cierto tipo de problemas. En concreto, no se llegó a obtener la solución óptima al problema de la planificación de la red grande funcionando en modo almacén aún después de ejecutar el resolutor CPLEX durante 2 días. En este *Capítulo* se tratará, por tanto, de buscar otras alternativas eficientes mediante el empleo de metaheurísticas. Para ello, se comienza mostrando la representación de las soluciones a la hora de resolver el problema mediante este tipo de técnicas. Después, se analizan las distintas metaheurísticas utilizadas, que pueden clasificarse en dos grupos: a) metaheurísticas de búsqueda; y b) metaheurísticas de evolución. Todas ellas consisten en obtener soluciones iniciales del problema, sean factibles o no, para a continuación obtener una solución refinada. Se describen varios métodos para obtener soluciones iniciales, así como varios procedimientos de mejora de soluciones. Todas las metaheurísticas han sido implementadas en C++ utilizando el compilador Borland C++ Builder 5.0, y se han ejecutado sobre un procesador Intel Xeon a 2.8GHz y 2GB de RAM para resolver el tercer ejemplo del modelo discreto analizado en el *Capítulo* anterior, mostrando sus ventajas frente a los algoritmos clásicos a la hora de resolver este tipo de problemas. Finalmente se comparan todos los algoritmos entre sí y se extraen conclusiones.

Los objetivos de este capítulo son:

- Desarrollar e implementar algoritmos basados en técnicas heurísticas para la resolución eficiente de los problemas relacionados con redes de poliductos resueltos a partir del modelo discreto.
- Aplicar dichos algoritmos a la resolución del ejemplo 3 del modelo discreto visto en el *Capítulo* anterior, y para el que CPLEX no fue capaz de encontrar la solución óptima a pesar de ser ejecutado durante dos días.
- Extraer conclusiones sobre la utilización de las metaheurísticas aplicadas a este tipo de problemas.

4.1 Introducción

El problema aquí tratado está incluido en los Sistemas Dinámicos de Eventos Discretos (DEDS, de Discrete Event Dynamic Systems en inglés). Estos sistemas se controlan mediante sucesos, son asíncronos, en la mayoría de los casos fabricados por el hombre y se controlan mediante reglas. Ejemplos de DEDS son las redes de computadores, sistemas de transporte y sistemas de manufacturación. La representación matemática de estos sistemas y un espacio de búsqueda intratable son las dos mayores dificultades que presentan los problemas de optimización de los DEDS. Sistemas tales como un aeropuerto o las redes de computadores son difíciles de representar mediante modelos matemáticos. Es más, el tamaño de las soluciones de estos problemas crece exponencialmente con el problema. Por ello se cree frecuentemente que estos sistemas pertenecen al conjunto de problemas NP-duro. En el caso de problemas lineales con variables enteras existen alternativas clásicas que pueden proporcionar el óptimo del espacio de búsqueda, aunque en la mayoría de las ocasiones las soluciones se obtienen en tiempos que no son razonables (horas, días o incluso meses). Otra alternativa es la simulación, sin embargo este procedimiento es costoso en tiempo, debido al deseo constante de los usuarios de obtener una solución mejor. Recientemente se está empleando en estos sistemas la optimización ordinal, un paradigma en el campo de la optimización, [HSV92]. De forma más frecuente, para abordar estos problemas se han utilizado estrategias avanzadas de búsqueda, como por ejemplo las búsquedas locales y globales o los algoritmos evolutivos, entre otros, todos ellos dentro de lo que se conoce como metaheurísticas.

En definitiva, así como en la mayoría de los DEDS los métodos clásicos obtienen las mejores soluciones en tiempos inaceptables, las técnicas avanzadas de búsqueda obtienen buenas soluciones en tiempos aceptables. En este *Capítulo* se hace un estudio de varias técnicas de búsqueda que hacen uso de procedimientos heurísticos para explorar el espacio de búsqueda hacia la solución óptima del problema tratado.

4.1.1 Metaheurísticas

En Inteligencia Artificial (IA) se emplea el calificativo heurístico, en un sentido muy genérico, para aplicarlo a todos aquellos aspectos que tienen que ver con el empleo de conocimiento en la realización dinámica de tareas. Se habla de heurística para referirse a una técnica, método o procedimiento inteligente de realizar una tarea que no es producto de un riguroso análisis formal, sino de conocimiento experto sobre la tarea. En especial, se usa el término heurístico para referirse a un procedimiento

que trata de aportar soluciones a un problema con un buen rendimiento, en lo referente a la calidad de las soluciones y a los recursos empleados.

En la resolución de problemas específicos han surgido procedimientos heurísticos exitosos, de los que se ha tratado de extraer lo que es esencial en su éxito para aplicarlo a otros problemas o en contextos más extensos. Diversas líneas de investigación de la IA han contribuido al desarrollo científico del campo de las heurísticas y a extender la aplicación de sus resultados, en especial los sistemas expertos. De esta forma se han obtenido tanto técnicas y recursos computacionales específicos como estrategias generales de diseño para procedimientos heurísticos de resolución de problemas. Estas estrategias generales para construir algoritmos, que quedan por encima de las heurísticas, y van algo más allá, se denominan metaheurísticas. Las metaheurísticas pueden integrarse como un sistema experto para facilitar su uso genérico a la vez que mejorar su rendimiento.

Las metaheurísticas son estrategias para diseñar procedimientos heurísticos. Por tanto, los tipos de metaheurísticas se establecen, en primer lugar, en función del tipo de procedimientos a los que hace referencia. Algunos de los tipos fundamentales son las metaheurísticas para los métodos de relajación, las metaheurísticas para los procesos constructivos, las metaheurísticas para las búsquedas por entornos y las metaheurísticas para los procedimientos evolutivos.

- Las metaheurísticas de *relajación* se refieren a procedimientos de resolución de problemas que utilizan relajaciones del modelo original, cuya solución facilita la solución del problema original.
- Las metaheurísticas *constructivas* se orientan a los procedimientos que tratan de la obtención de una solución a partir del análisis y selección paulatina de las componentes que la forman.
- Las metaheurísticas *de búsqueda* guían los procedimientos que usan transformaciones o movimientos para recorrer el espacio de soluciones alternativas y explotar las estructuras de entornos asociadas.
- Las metaheurísticas *evolutivas* están enfocadas a los procedimientos basados en conjuntos de soluciones que evolucionan sobre el espacio de soluciones.

De una u otra forma, todas las metaheurísticas se pueden concebir como estrategias aplicadas a procesos de búsqueda, donde todas las situaciones intermedias en el proceso de resolución del problema se interpretan como elementos de un espacio

de búsqueda, que se van modificando a medida que se aplican las distintas operaciones diseñadas para llegar a la solución definitiva. Por ello, y porque los procesos de búsqueda heurística constituyen el paradigma central de las metaheurísticas, es frecuente interpretar que el término metaheurística es aplicable esencialmente a los procedimientos de búsqueda sobre un espacio de soluciones alternativas. Las metaheurísticas de evolución tan solo se diferencian de las de búsqueda en que es un conjunto de soluciones que interaccionan entre ellas, y no una única solución la que evoluciona sobre el espacio de búsqueda. Por este mismo motivo este *Capítulo* se centra en el desarrollo de diferentes *metaheurísticas de búsqueda y de evolución* aplicadas a la planificación óptima de una red de poliductos. El diagrama mostrado en la figura 4.1 muestra el tipo en el que se enmarcan cada una de las metaheurísticas aquí utilizadas.

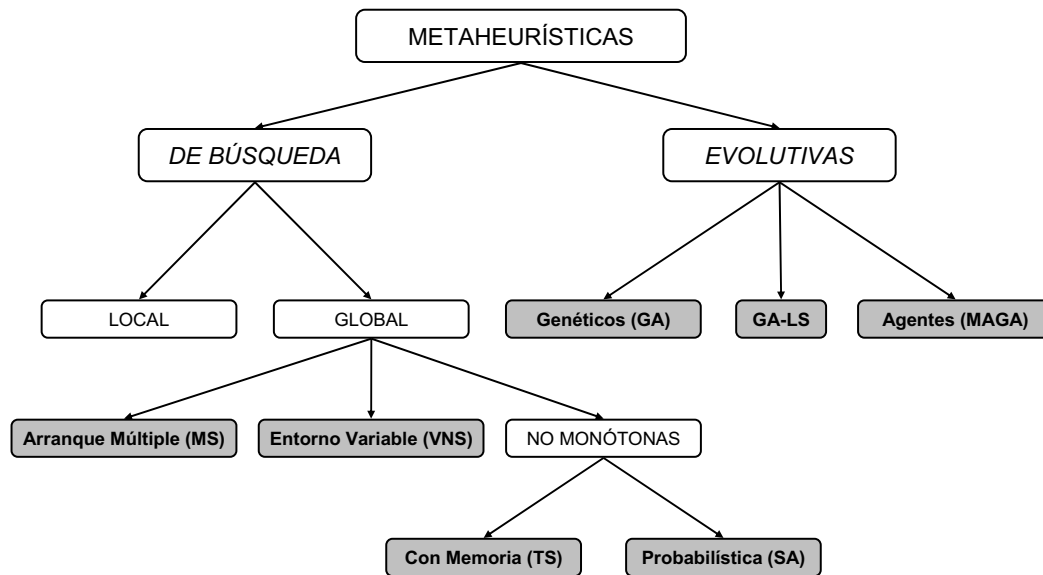


Figura 4.1: Diferentes metaheurísticas utilizadas en este trabajo.

El tipo de metaheurística más importante es el de las *metaheurísticas de búsqueda*, que establecen estrategias para recorrer el espacio de soluciones del problema transformando de forma iterativa la solución de partida. La concepción primaria de heurística más frecuente era la de alguna regla inteligente para mejorar la solución de un problema que se aplicaba iterativamente mientras fuera posible obtener nuevas mejoras. Tales procesos se conocen como búsquedas monótonas (descendentes o ascendentes), algoritmos escaladores (hill-climbing) o búsquedas locales. Esta última denominación obedece a que la mejora se obtiene en base al análisis de soluciones similares a la que realiza la búsqueda, a las que suele denominarse soluciones

vecinas. Estrictamente hablando, una *búsqueda local* es la que basa su estrategia en el estudio de soluciones del vecindario o entorno de la solución que realiza el recorrido. Las metaheurísticas de búsqueda local son las estrategias o pautas generales para diseñar métodos de búsqueda local, como las que utilizan la estrategia voraz o greedy. Esta metaheurística establece como pauta, una vez consideradas cuales son las soluciones que intervienen en el análisis local, elegir iterativamente la mejor de tales soluciones mientras exista alguna mejora posible.

Se suele asumir que las búsquedas locales sólo modifican la solución que realiza el recorrido mediante una mejora en su propio entorno. El principal inconveniente de estas búsquedas locales es que se quedan atrapadas en un óptimo local, es decir, una solución que no puede ser mejorada por un análisis local. Por ello, el propósito fundamental de las primeras metaheurísticas era extender la búsqueda local para continuarla más allá de los óptimos locales, denominándose *búsqueda global*. Las metaheurísticas de búsqueda global incorporan pautas para tres formas básicas de escapar de los óptimos locales de baja calidad: a) volver a iniciar la búsqueda desde otra solución de arranque; b) modificar la estructura de entornos que se está aplicando; y c) permitir transformaciones de la solución de búsqueda que no sean de mejora. Surgen así, respectivamente, las metaheurísticas de *arranque múltiple* (MSS, de Multi Start Search en inglés) [Mar03], [MM03] que establecen pautas para reiniciar de forma inteligente las búsquedas descendentes, las metaheurísticas de *entorno variable* (VNS de Variable Neighbourhood Search en inglés) que modifican de forma sistemática el tipo de movimiento con el objeto de evitar que la búsqueda se quede atrapada por una estructura de entornos rígida, y las *búsquedas no monótonas* que también aplican movimientos de no mejora durante la búsqueda.

Las metaheurísticas para *búsquedas no monótonas* controlan los posibles movimientos de empeoramiento de la solución utilizando la memoria del proceso de búsqueda o mediante criterios de aceptación estocásticos. Las metaheurísticas de búsqueda con memoria utilizan información sobre el recorrido realizado para evitar que la búsqueda se concentre en una misma zona del espacio. Fundamentalmente se trata de la *Búsqueda Tabú* (TS, de Tabu Search en inglés) [GL97] y [GM03], cuya propuesta original prohíbe temporalmente soluciones muy parecidas a las últimas soluciones del recorrido. Por otro lado, las metaheurísticas de búsqueda estocásticas establecen pautas para regular la probabilidad de aceptar transformaciones que no mejoren la solución. El *Enfriamiento Simulado* (SA, de Simulated Annealing en inglés) [KGV83] y [DD03], es el exponente más importante de este tipo de metaheurísticas donde la probabilidad de aceptación es una función exponencial del empeoramiento producido.

Las *metaheurísticas evolutivas* establecen estrategias para conducir la evolución en el espacio de búsqueda de conjuntos de soluciones (usualmente llamados poblaciones) con la intención de acercarse a la solución óptima con sus elementos. Se distinguen de las metaheurísticas de búsqueda en que es un conjunto de soluciones y no una solución la que evoluciona sobre el espacio de búsqueda. El aspecto fundamental de las heurísticas evolutivas consiste en la interacción entre los miembros de la población frente a las de búsqueda que se guían por la información de soluciones individuales.

Las diferentes metaheurísticas evolutivas se distinguen por la forma en que combinan la información proporcionada por los elementos de la población para hacerla evolucionar mediante la obtención de nuevas soluciones. Los *Algoritmos Genéticos* [GB89] y [Ree03], meméticos [PM03], [MCP03] y [Mos99], y los de estimación de distribuciones [LL02] y [LLM03], emplean fundamentalmente procedimientos aleatorios, mientras que otras metaheurísticas como la de búsqueda dispersa, la de reencadenamiento de caminos (Path Relinking) [LGM03] y [ML03], o los algoritmos bionómicos, emplean procedimientos sistemáticos.


4.1.2 Representación de las soluciones

Cuando se utilizan metaheurísticas, normalmente es conveniente representar las soluciones al problema mediante un conjunto de variables diferente al utilizado en la correspondiente formulación MIP. En el caso aquí tratado, se puede representar la solución al problema utilizando únicamente la *variable transporte* indexada en tiempo, t , y conexión c , con valores comprendidos entre 0 y P . Por tanto, la solución puede representarse como una matriz y de dimensión $C \times T$, donde las filas se corresponden con las conexiones de la red y las columnas a los instantes de tiempo que componen el horizonte de planificación del problema a resolver. Así, $y_{t,c}=p$ significa que el producto p sale del origen de la conexión c en el instante t , reservando $y_{t,c}=0$ para el caso en el que no sale producto. Sea $y=[y_{t,c}]$ una solución al problema. El espacio de búsqueda Ω es el conjunto de todas las soluciones, factibles o no, para este problema, y viene dado por la ecuación (4.1).

$$\Omega = \{ s \in [0, 1, \dots, P]^{C \times T} \} \quad (4.1)$$

La figura 4.2 muestra una comparación entre las representaciones adoptadas en la representación MIP y la que se utilizará para codificar las posibles soluciones al problema utilizando las metaheurísticas desarrolladas en este *Capítulo*. En concreto, la representación mostrada corresponde al modo de operación que aparece en las figuras 2.8 y 2.9 del *Capítulo 2*.

Representación en la formulación MIP	
$t =$	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19
$y(t,c,0)$	0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
$y(t,c,1)$	0 1 1 1 0 0 0 0 0 0 1 0 1 0 1 0 1 1 0 0 0
$y(t,c,2)$	1 0 0 0 0 0 0 1 1 0 1 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1
$y(t,c,3)$	0 0 0 0 0 1 1 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0
$y(t,c,4)$	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0



Representación mediante metaheurísticas	
$t =$	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19
$y(t,c)$	2 1 1 1 0 3 3 2 2 1 2 1 3 1 2 1 1 4 3 2

Figura 4.2: Equivalencia entre las representaciones MIP y mediante metaheurísticas.

El problema se resolverá para la red funcionando en modo almacén y sin paradas dado que este es el caso en el que las técnicas clásicas (algoritmos determinísticos) presentan mayor dificultad a la hora de alcanzar algún tipo de solución. Por tanto, la función objetivo a considerar a la hora de resolver el problema mediante metaheurísticas es la mostrada en la ecuación (2.74) incluyendo los costes de inventario en los nodos intermedios. Además, el coste asociado al reprocesamiento de la mezcla de producto en los volúmenes de contacto puede ser sustituido por el mostrado en la ecuación (2.85), correspondiente al modelo simplificado QUAD, ya que los volúmenes de contacto y costes de reprocesamiento son iguales para todos los pares de productos presentes en el problema a resolver.

4.1.3 Reparación de soluciones no factibles

Las restricciones contempladas en las metaheurísticas son las mismas que se dan en la formulación MIP. Así, la factibilidad de una solución queda determinada a través de las ecuaciones (2.75), (2.76), (2.77), (2.79), (2.83), (2.86), (2.87) y (2.88). Como puede verse, cuando se utilizan metaheurísticas la restricción (2.75) se satisface de forma automática debido a la codificación adoptada para las soluciones al problema, sin embargo, las demás restricciones podrían no ser satisfechas. Por tanto, dado que las metaheurísticas manejan soluciones no factibles, es necesario incluir en la función objetivo un término adicional que dependa del grado de factibilidad de las mismas penalizándolas frente a las soluciones factibles.

Antes de evaluar las soluciones, existen ciertas reparaciones que pueden llevarse a cabo sobre las mismas:

- Una vez generada una solución con el formato mostrado en la figura 4.2, puede aplicarse una primera reparación para forzar el cumplimiento de las restricciones (2.76). Para ello, tan solo hay que eliminar de la solución todos los paquetes que una vez lanzados no lleguen a su destino dentro del horizonte de planificación. Suponiendo un horizonte de 20 horas para una red de 5 conexiones de longitudes $d_c=[2,3,3,2,4]$, dicho operador realiza la operación mostrada en la figura 4.3, consistente en eliminar todos los paquetes del área sombreada.

$t =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$y(t,1)$	1	1	1	3	3	2	2	2	2	3	3	3	3	1	1	1	1	1	0	0
$y(t,2)$	0	2	2	3	3	3	3	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1	0	0	0
$y(t,3)$	0	0	0	3	3	2	2	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	0	0	0
$y(t,4)$	0	0	0	2	2	2	2	1	1	1	1	1	3	3	3	3	3	3	0	0
$y(t,5)$	0	0	0	1	1	2	2	1	1	1	1	3	3	3	3	3	3	0	0	0

Figura 4.3: Primera reparación del Operador Reparación.

- La segunda reparación llevada a cabo por este operador consiste en eliminar de la solución aquellos productos lanzados por las fuentes cuando no se dispone de ellos. De la misma forma, el operador elimina aquellos productos que sin ser demandados por los consumidores finales se lanzan hacia los mismos desde los nodos intermedios. Suponiendo, que la fuente 1 de la que sale la conexión 1 no dispone del producto tipo 3 y el destino 2 al que llega la conexión 4 no demanda producto tipo 2, dicho operador realiza la operación mostrada en la figura 4.4, consistente en eliminar todos los paquetes del área sombreada.

$t =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$y(t,1)$	1	1	1	3	3	2	2	2	2	3	3	3	3	1	1	1	1	1	1	1
$y(t,2)$	0	2	2	3	3	3	3	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$y(t,3)$	0	0	0	3	3	2	2	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2
$y(t,4)$	0	0	0	2	2	2	2	1	1	1	1	1	3	3	3	3	3	3	3	3
$y(t,5)$	0	0	0	1	1	2	2	1	1	1	1	3	3	3	3	3	3	3	3	3

Figura 4.4: Segunda reparación del Operador Reparación.

- En la tercera y última reparación llevada a cabo por dicho operador, se reemplazan las soluciones en las que no se comience a lanzar producto hasta el instante t por otras que codifiquen el mismo modo de operación pero adelantado

en t unidades de tiempo tal y como se muestra en la figura 4.5. En dicha figura se ha utilizado la representación matricial ($C \times T$) ya que con ella resulta más fácil visualizar la utilidad de dicho operador. En este caso la planificación se ha adelantado dos unidades de tiempo.

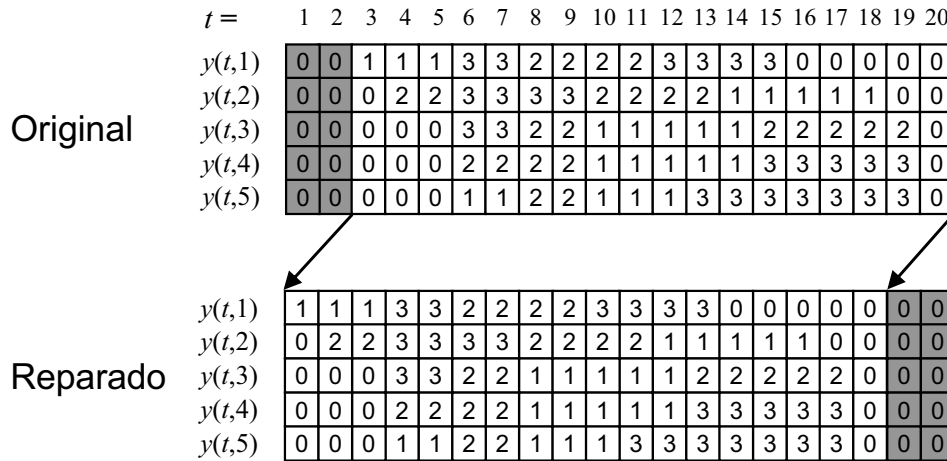


Figura 4.5: Tercera reparación del Operador Reparación.

4.2 Optimización basada en Metaheurísticas de Búsqueda

Tal y como se comentó en la introducción, el principal inconveniente de las búsquedas locales es que si se alcanza una solución localmente óptima u óptimo local (una solución que es mejor que cualquiera de las de su entorno) la solución actual queda atrapada en su entorno [YI02], [AL96]. La regla de parada en las búsquedas monótonas implica detectar los mínimos locales analizando cuando no se mejora la solución actual. Una búsqueda con una perspectiva global del espacio de soluciones debe poseer herramientas para escapar de tales situaciones.

Las principales metaheurísticas de búsqueda global surgen de las tres formas principales de escapar de esta situación: a) volver a comenzar la búsqueda desde otra solución inicial, b) modificar la estructura de entornos, y c) permitir movimientos que empeoran la solución actual. Estas tres opciones dan lugar, respectivamente, a la metaheurística con arranque múltiple, a la metaheurística de entorno variable y a las metaheurísticas de búsqueda no monótonas. La tercera de las opciones incluye diversas metaheurísticas relevantes entre las que destacan la búsqueda probabilística, representada fundamentalmente por el Enfriamiento Simulado, y la

búsqueda con memoria o Búsqueda Tabú. Por tanto, las metaheurísticas de búsqueda aplicadas a problemas de optimización que se van a aplicar aquí son las siguientes:

- Búsqueda por Arranque Múltiple (MS)
- Búsqueda por Entornos Variables (VNS)
- Búsqueda Tabú (TS)
- Enfriamiento Simulado (SA)

Antes de pasar a describir de forma más detallada cada uno de los algoritmos desarrollados, se describen a continuación los métodos heurísticos propios del problema a resolver para la construcción inicial de soluciones y cálculo de vecinos. Dichos métodos son comunes a todas las metaheurísticas de búsqueda desarrolladas.

4.2.1 Heurísticas de construcción

Se presentan aquí tres heurísticas que de forma aleatoria construyen una solución. Estas requieren un tiempo de cálculo computacional muy breve, pero fallan a la hora de obtener soluciones factibles en una primera aproximación. Las heurísticas de construcción se usan para generar soluciones iniciales desde las que comenzar las búsquedas locales. Es decir, estas soluciones iniciales, aunque en esencia son pobres, sirven de gran ayuda para comenzar a realizar búsquedas locales.

Construcción aleatoria pura: RND

Este método construye una solución en el sentido más aleatorio posible. Se escoge de forma aleatoria un producto que va a ser lanzado por cada poliducto en cada instante de tiempo. La única consideración que se tiene en cuenta son las limitaciones de los poliductos en tanto que algunos de ellos no pueden lanzar ciertos tipos de producto (por ejemplo una fuente que no disponga de cierto producto en su almacén).

Construcción basada en la relajación del problema lineal: RLP

La información proporcionada resolviendo la relajación lineal de la formulación MIP puede usarse para la obtención de soluciones enteras. Dicha relajación consiste en permitir que los valores de la variable transporte, y , sean reales y sujetos a la restricción mostrada en la ecuación (4.2).

$$0 \leq y_{t,c,p} \leq 1 \quad ; \quad \forall (t,c,p) \tag{4.2}$$

Una aplicación inicial de esta idea fue publicada por [Len90]. Así, para cada $t \in T$, $c \in C$ y $p \in P$, la solución del problema relajado es considerada como la probabilidad de enviar el producto p a través de la conexión c en el instante t . Este concepto se resume en la ecuación (4.3). En ella, la PDF (Probability Density Function en inglés) es usada para la construcción de soluciones enteras mediante un método de construcción heurística. Una vez las soluciones enteras son construidas, estas pueden ser usadas como soluciones de partida en otros métodos de optimización heurística.

$$PDF(t, c, p) = y_{t,c,p}^{LP} \tag{4.3}$$

El algoritmo 4.1 muestra el pseudocódigo para la construcción heurística de soluciones enteras. Con esta heurística de construcción de soluciones enteras es posible generar soluciones que, aun siendo soluciones no factibles para el MIP, dan mejores resultados que los obtenidos con soluciones generadas de forma aleatoria cuando son utilizadas como punto de partida en métodos de optimización heurística.

Algoritmo 4.1: Construcción heurística basada Relajación Lineal.

```

(1) for  $t \in T$ 
(2)   for  $c \in C$ 
(3)     CDF=cumulative DF of PDF( $t, c, p$ )
(4)      $y(t, c)$ =first  $p$  with CDF( $p$ )>rand
(5)   end
(6) end

```

Es fácil darse cuenta que la utilización de la función objetivo como una medida del número de cambios de producto sólo tiene sentido para la resolución del MIP. Por tanto, la versión relajada LP carece de función objetivo, y por tanto, tan solo trata de encontrar soluciones relajadas factibles.

Construcción basada en la relajación del problema cuadrático: RQP

Existe un problema en la relajación lineal. La probabilidad de lanzar un tipo de producto u otro en un poliducto y tiempo dados tiende a ser la misma, es decir, al sistema le suele dar igual lanzar producto de un tipo que de otro. Este hecho se da con excesiva frecuencia en los poliductos bidireccionales, lo que hace que las soluciones iniciales obtenidas tras la aplicación del algoritmo 4.1 incumplan muchas de las restricciones relacionadas con la presencia de colisiones en los poliductos bidireccionales. Para solucionar este hecho, se puede remplazar la función objetivo

(sin ninguna validez en la versión relajada) mediante otra función que ayude a que las soluciones de la versión relajada sean más cercanas a las de la formulación IP asociada cuando se utiliza el algoritmo 4.1 sobre las mismas. Las soluciones enteras así obtenidas tendrán un grado de factibilidad superior al de las obtenidas utilizando la relajación lineal. La función objetivo con la que reemplazar el objetivo de la formulación MIP es la mostrada en la ecuación (4.4).

$$z = \sum_{t=1}^T \sum_{c=1}^C \left(1 - \sum_{p=0}^P y_{t,c,p} \cdot y_{t,c,p} \right) = T \cdot C - \sum_{t=1}^T \sum_{c=1}^C \sum_{p=0}^P y_{t,c,p} \cdot y_{t,c,p} \quad (4.4)$$

Teniendo en cuenta la ecuación (2.59) es fácil darse cuenta que el valor de z en la ecuación (4.4) es cero si la solución es entera y mayor que cero en el caso contrario. Por tanto, minimizando dicha función se aumenta el grado de integralidad la solución obtenida al tender a desaparecer los valores residuales, haciendo que tras la aplicación del algoritmo 4.1 se cumplan un mayor número de restricciones que las que se cumplen cuando se utiliza la solución de la relajación lineal.

4.2.2 Cálculo de vecinos

Las heurísticas consideradas en este trabajo utilizan tres tipos operadores para el cálculo de vecinos: operador *cambio* (Ncn), operador *intercambio* (Nsn) y operador *inserción* (Nin). El cambio consiste en tomar n elementos de la matriz y y cambiar su valor por otro generado de forma aleatoria dentro del rango de valores permisibles. Los cambios introducidos por los otros dos operadores (Ns y Ni), tan solo implican el intercambio o desplazamiento de alguno de los elementos de la matriz y .

Operador cambio: Ncn

El primer método toma n elementos de la matriz solución y , y sustituye cada uno de estos por otro elemento tomado al azar, aunque como de forma habitual considerando las posibilidades de distribución del poliducto. El *cambio* es especialmente eficiente en aquellos casos en los que la solución inicial contempla algún valor residual. Por contrapartida no es eficiente en el caso de los poliductos bidireccionales, ya que un cambio accidental en estos puede generar muchas restricciones incumplidas. La figura 4.6 muestra el efecto del operador *cambio* sobre una solución para $n=3$.

$$y = \begin{bmatrix} i & \dots & \dots \\ \dots & j & \dots \\ \dots & \dots & k \end{bmatrix} \Rightarrow N(y) = \begin{bmatrix} i' & \dots & \dots \\ \dots & j' & \dots \\ \dots & \dots & k' \end{bmatrix}$$

Figura 4.6: Efecto del operador 3-cambio.

Operador intercambio: Nsn

En el *intercambio* se toman varios elementos de y al azar (generalmente dos) y se intercambian tal y como se muestra en la figura 4.7. Es especialmente efectivo cuando la matriz y alberga todos los productos necesarios para satisfacer la demanda pero en contra se hace necesaria una reubicación de los productos en la red.

$$y = \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots \\ i & \dots & \dots \\ \dots & j & \dots \end{bmatrix} \Rightarrow N(y) = \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots \\ j & \dots & \dots \\ \dots & i & \dots \end{bmatrix}$$

Figura 4.7: Efecto del operador intercambio.

Operador inserción: Nin

La *inserción* consiste en eliminar un elemento de una fila de y insertándolo en una posición distinta de la misma fila, y desplazando todos los elementos entre las dos posiciones una posición a la izquierda (o a la derecha). La figura 4.8 muestra el efecto del operador *inserción* sobre una solución dada. La *inserción* tiene las mismas ventajas e inconvenientes que el *intercambio*.

$$y = \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & i & j & k & l & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \Rightarrow N(y) = \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & j & k & l & i & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

Figura 4.8: Efecto del operador inserción.

Una vez vistos los algoritmos heurísticos desarrollados para la generación de soluciones iniciales y los operadores diseñados para el cálculo de vecinos, se pasa a continuación a describir cada uno de los métodos de búsqueda desarrollados. Tal y como se mencionó en la sección 4.2., estos son la Búsqueda por Arranque Múltiple (MS), Búsqueda por Entornos Variables (VNS), Búsqueda Tabú (TS) y Enfriamiento Simulado (SA).

4.2.3 Búsqueda por Arranque Múltiple

Tal y como se comentó en la sección 4.1.1, la Búsqueda MS es la primera y más sencillas de las alternativas de la Búsqueda Global para escapar de los mínimos

locales en los que queda atrapada una Búsqueda Local. Consiste en reiniciar la búsqueda desde una nueva solución construida con cualquiera de los métodos de construcción desarrollados cada vez que el algoritmo quede atrapado en un mínimo local. La búsqueda concluye cuando se sobrepasa el tiempo de CPU especificado para la ejecución del algoritmo.

El algoritmo 4.2 muestra el procedimiento para la implementación de la Búsqueda MS. Dicho algoritmo requiere como parámetros de entrada el tiempo durante el que ejecutar el algoritmo (TM) y los métodos utilizados para la construcción de soluciones iniciales (MC) y para el cálculo de vecinos (MV).

Algoritmo 4.2: Búsqueda MS.

```
y*=BUSQUEDAMS(TM,MC,MV)
(1) t=TIME()
(2) y*=CONSTRUCCION(MC)
(3) while TIME()-t<TM do
(4)   y=BUSQUEDALOCALMS(Construccion(MC),MV)
(5)   if y<y*
(6)     y*=y
(7) end
(8) return y*
```

Dicho algoritmo hace una llamada al procedimiento mostrado en el algoritmo 4.3 que realiza una búsqueda local en torno al punto actual.

Algoritmo 4.3: Rutina de búsqueda local para la Búsqueda MS.

```
y=BUSQUEDALOCALMS(y,MV)
(1) y*=MEJORAMS(y,MV)
(2) while y*≠y do
(3)   y=y*
(4)   y*=MEJORAMS(y,MV)
(5) end
(6) return y*
```

Finalmente, el algoritmo 4.4 muestra la implementación del procedimiento de mejora utilizado en la búsqueda local.

Algoritmo 4.4: Mejora de una solución para la Búsqueda MS.

```
y*=MEJORAMS(y,MV)
(1) S=VECINDARIO(y,MV)
(2) while S≠{} do
(3)   y*=RANDC(S)
(4)   if y*<y
(5)     return y*
(6)     S=S\{y}
(7) end
(8) return y
```

En todos estos algoritmos las condiciones $y < y^*$ e $y^* < y$ comparan las funciones objetivo del operando izquierdo y del operando derecho. La función VECINDARIO genera un vecindario de soluciones en torno a la actual mediante alguno de los métodos desarrollados y la función RANDC realiza una selección aleatoria dentro del mismo.

Dado que se dispone de 3 métodos de construcción y 3 métodos para el cálculo de vecinos, existen 9 implementaciones diferentes para la Búsqueda MS. Se puede comparar la evolución de cada una de estas implementaciones a la hora de resolver el problema planteado en la sección 3.4.3 del *Capítulo* anterior. El tamaño de los vecindarios es de 500 para todas las implementaciones. Dichos vecindarios son explorados de forma aleatoria en todos los casos sin llegar a ser explorados en su totalidad siempre que se encuentre alguna solución mejor que la actual antes de finalizar la exploración de los mismos. La experiencia demuestra que dicha estrategia de exploración ofrece mejores resultados que una exploración total de cada vecindario en búsqueda de la mejor solución en cada uno de los mismos. Con el objetivo de comparar la evolución a lo largo del tiempo de la mejor solución encontrada por cada una de las implementaciones de la Búsqueda MS, cada una de ellas se ejecuta 10 veces. Una vez hecho esto, se calcula el promedio de las 10 evoluciones obtenidas para cada una de las implementaciones. Esto, proporciona unos resultados más fiables a la hora de comparar las diferentes metaheurísticas desarrolladas que los que se obtendrían mediante una única ejecución de cada una de dichas metaheurísticas.

En primer lugar se puede hacer un estudio sobre el número de veces que aplicar cada uno de los operadores diseñados para la generación de los vecindarios. Para ello, se generan de forma aleatoria (RND) 10 soluciones iniciales, a partir de las que ejecutar la Búsqueda MS para cada uno de los operadores diseñados para la

generación de vecindarios y variando el número de veces que se aplican de 1 a 4. La figura 4.9 muestra la evolución promedio obtenida en cada uno de los casos ejecutados durante una hora. Tal y como puede verse, el mejor compromiso entre la factibilidad y el coste se encuentra para $n=2$ en el operador cambio (Nc2), ya que alcanzando los operadores Nc2, Nc3 y Nc4 unos niveles de factibilidad semejantes, Nc2 alcanza un menor valor de la función de coste. En cuanto al intercambio, tanto Ns2 como Ns3 llegan a resultados similares, siendo ligeramente mejores para Ns2. Finalmente, se ha optado por Ni4 para el operador inserción por presentar la mejor evolución en la función objetivo, a pesar de obtener un peor grado de factibilidad. Nótese, que en todos los casos la utilización de $n=1$ no es eficiente, alcanzándose un mínimo local.

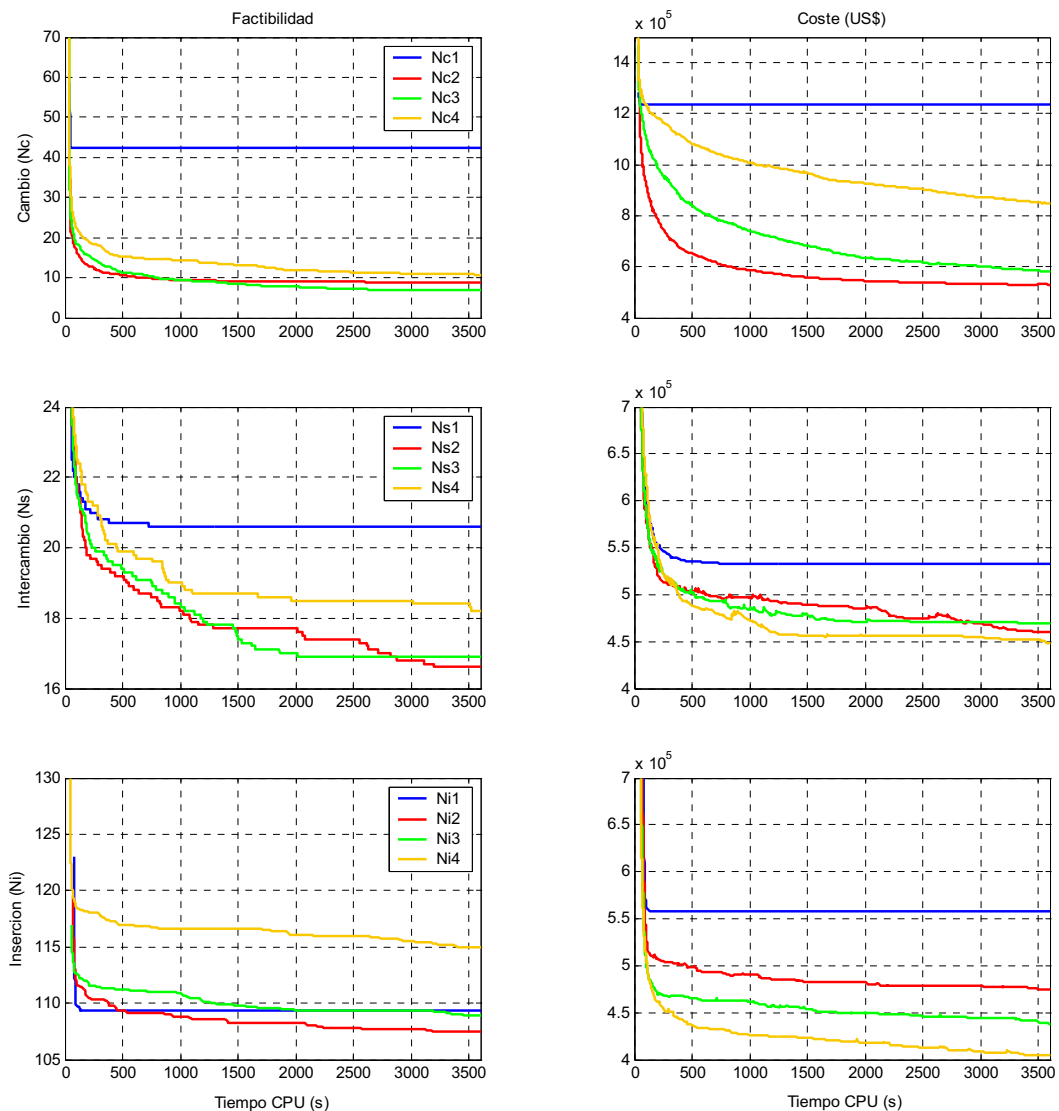


Figura 4.9: Determinación de n en los operadores Ncn, Nsn y Nin.

Una vez determinado el número óptimo de veces que aplicar cada uno de los operadores diseñados para la generación de vecinos, se puede hacer un estudio para determinar la mejor estrategia de generación de soluciones iniciales. Para ello, tomando un determinado operador para la generación de vecinos, se ejecuta la Búsqueda MS variando el método de generación de soluciones iniciales. La figura 4.10 la evolución promedio obtenida para las Búsquedas MS RND/Nc2, RLP/Nc2 y RQP/Nc2. Es decir, tomando como operador para la generación de vecindarios el cambio de orden 2 (Nc2), se trata de ver el efecto de la utilización de las diferentes estrategias de generación de soluciones iniciales desarrolladas (RND, RLP y RQP).

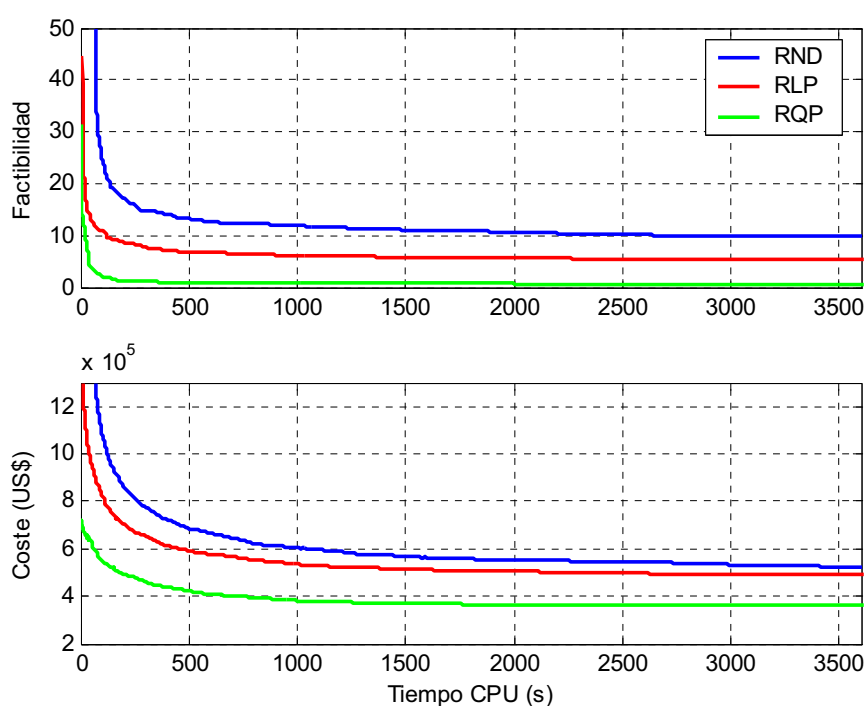


Figura 4.10: Evolución de las Búsquedas MS (RND–RLP–RQP)/Nc2.

Tal y como puede verse, la generación basada en una relajación del problema cuadrático (RQP) es la que ofrece los mejores resultados, seguida de la basada en la relajación lineal (RLP). Como era de esperar, la generación aleatoria (RND) ofrece los peores resultados tanto en el cumplimiento de las restricciones del problema como en el valor de la función objetivo. El hecho de utilizar el algoritmo 4.1 para la generación de soluciones basada en las relajaciones lineal y cuadrática del problema hace que el número de restricciones incumplidas en el punto inicial se reduzca drásticamente. En este caso, el promedio de las restricciones incumplidas por la solución generada mediante el método RND es 5598, mientras que para los métodos RLP y RQP es 529 y 234 respectivamente. El valor de la función objetivo sigue una evolución similar a la

de la factibilidad de las soluciones. En concreto, se obtienen unos valores iniciales de 1655500, 1565300 y 723230 US\$ para los métodos de generación RND, RLP y RQP respectivamente. La figura 4.11 muestra la evolución del número de soluciones factibles para las tres implementaciones ejecutadas. Tal y como se ve, tanto con la generación RND como con la RLP en ninguna de las 10 ejecuciones se obtienen soluciones factibles durante la hora que fueron ejecutadas. Tal y como se comentó en la sección 4.2.1 esto es debido a que para dichas estrategias de generación la probabilidad de lanzar un tipo de producto u otro en un poliducto y tiempo dados tiende a ser la misma, es decir, al sistema le suele dar igual lanzar producto de un tipo que de otro. Por el contrario, utilizando la generación RQP, a los 2100 segundos 7 de las 10 ejecuciones ya manejan soluciones factibles. Esto es debido a que la relajación cuadrática utiliza una función objetivo que ayuda a que las soluciones de la versión relajada sean más cercanas a las de la formulación IP asociada cuando se utiliza el algoritmo 4.1 sobre las mismas.

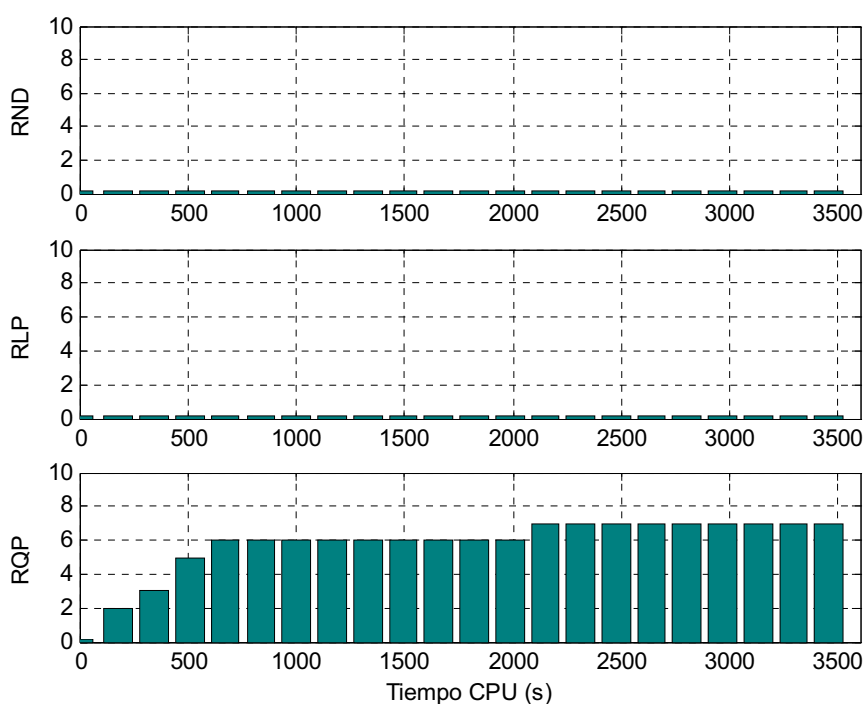


Figura 4.11: Número de soluciones factibles para las diferentes estrategias de generación.

Tras comprobar que la generación RQP es la que ofrece los mejores resultados, se puede utilizar dicho método de generación de soluciones iniciales en combinación con los tres métodos diseñados para la generación de vecinos (Nc2, Ns2 y Ni4). Tras ejecutar 10 veces cada una de las implementaciones de la Búsqueda MS se obtienen los resultados mostrados en la figura 4.12. Al igual que en la figura 4.10 se muestra el

promedio de la evolución de cada una de las 10 ejecuciones para cada implementación (RQP/Nc2, RQP/Ns2 y RQP/Ni4). En la tabla 4.1 se compara la función de coste de las soluciones encontradas por cada una de dichas implementaciones de la Búsqueda MS durante la hora que fueron ejecutadas. El número entre paréntesis denota el grado en el que la solución no es factible.

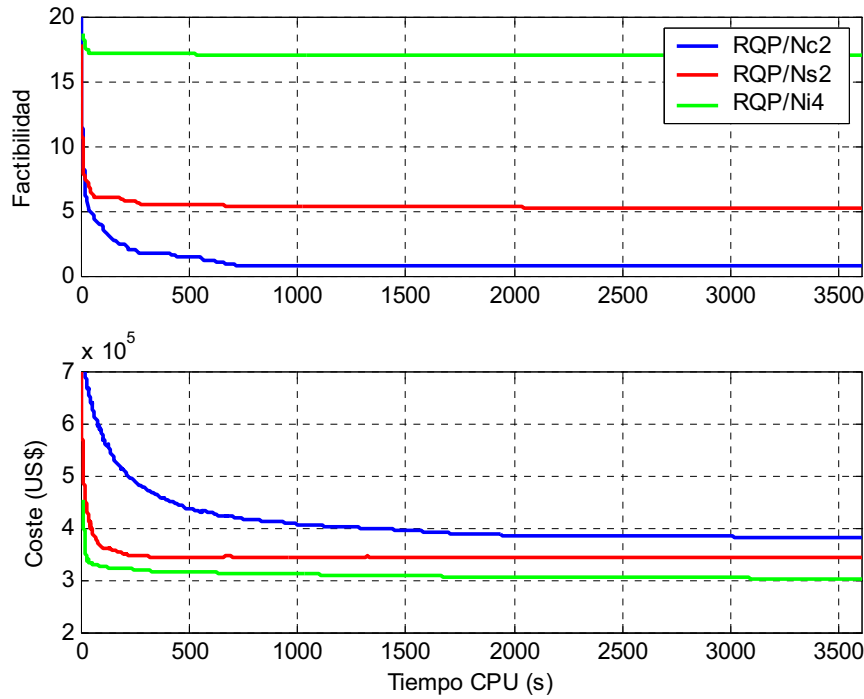


Figura 4.12: Evolución de las Búsquedas MS RQP/(Nc2–Ns2–Ni4).

Tabla 4.1: Función de coste para cada implementación de la Búsqueda MS.

Tiempo (hh:mm:ss)	Coste (US\$)		
	RQP/Nc2	RQP/Ns2	RQP/Ni4
00:00:00	(32.5) 736733	(17.3) 684876	(20.5) 600265
00:01:00	(4.0) 604788	(9.9) 407718	(19.7) 362114
00:02:00	(1.4) 552255	(9.5) 375896	(19.7) 347056
00:05:00	(0.7) 475277	(9.0) 364284	(19.7) 332338
00:10:00	(0.3) 427062	(8.8) 363667	(19.7) 329711
00:30:00	(0.2) 378704	(8.5) 361345	(19.7) 319290
00:60:00	(0.2) 369753	(8.4) 361342	(19.7) 315868

Tal y como puede verse, el operador Ni4 es el que ofrece los mejores resultados en cuanto al valor de la función objetivo, pero en contrapartida, es incapaz de encontrar soluciones factibles. Algo semejante ocurre con el operador Ns2 pero logrando un

mayor grado de factibilidad en las soluciones encontradas. Finalmente, el operador Nc2 logra encontrar soluciones factibles aunque con peor valor de la función objetivo. Tal y como se comentó en la sección 4.2.1 este operador es especialmente eficiente cuando se utiliza sobre soluciones generadas a partir de la solución del problema relajado y que, por tanto, conservan algún valor residual tras la aplicación del algoritmo 4.1. Por el contrario, los operadores intercambio e inserción sólo comienzan a ser eficientes cuando la matriz y alberga todos los productos necesarios para satisfacer la demanda pero en contra se hace necesaria una reubicación de los mismos. En vista de estos resultados, es de esperar que un operador para el cálculo de vecindarios que utilice estos tres operadores (Nc2, Ns2 y Ni4) mejore los resultados aquí obtenidos. Éste es el objetivo de las metaheurísticas de búsqueda global desarrolladas en la siguiente sección.

4.2.4 Búsqueda por Entornos Variables

Tal y como se comentó en la sección 4.1.1, otra forma de escapar a los mínimos locales en los que quedan atrapados las búsquedas locales es utilizar las metaheurísticas de búsqueda por Entornos Variables (Búsqueda VNS). Los algoritmos utilizados en esta metaheurística son similares a los utilizados para la Búsqueda MS salvo en la forma de generar los vecindarios. Una posibilidad para generar dichos vecindarios utilizando los tres métodos de generación de vecinos vistos anteriormente (Nc , Ns y Ni) en cada iteración en la misma proporción (COMB). Otra posibilidad es generar el vecindario atendiendo a la probabilidad de utilizar un método u otro de los citados anteriormente (PROB). Esta probabilidad se calcula en cada iteración y viene dada por la expresión mostrada en la ecuación (4.5) donde $S(N_v)$ es el número de veces que se ha utilizado el cálculo de vecinos $N_v \in \{Nc, Ns, Ni\}$ de forma satisfactoria, y $T(N_v)$ es el número total de veces que se ha utilizado N_v .

$$P(N_v) = \frac{\frac{S(N_v)}{T(N_v)}}{\sum_{v \in \{c, s, i\}} \frac{S(N_v)}{T(N_v)}} ; v \in \{c, s, i\} \quad (4.5)$$

Dado que se dispone de 3 métodos de construcción y 2 métodos para el cálculo de vecinos, existen 6 implementaciones diferentes para la Búsqueda VNS. Sin embargo, dado que la generación basada en las soluciones de la relajación cuadrática es la que proporciona los mejores resultados, tan solo se comparan las implementaciones RQP/COMB y RQP/PROB a la hora de resolver el problema planteado en la sección 3.4.3 del *Capítulo* anterior. El tamaño y la forma de exploración de los vecindarios son

semejantes a los utilizados para la Búsqueda MS. Tras ejecutar 10 veces cada una de las implementaciones de la Búsqueda VNS se obtienen los resultados mostrados en la figura 4.13. La tabla 4.2 muestra la función de coste de las soluciones encontradas por cada una de dichas implementaciones durante la hora que fueron ejecutadas.

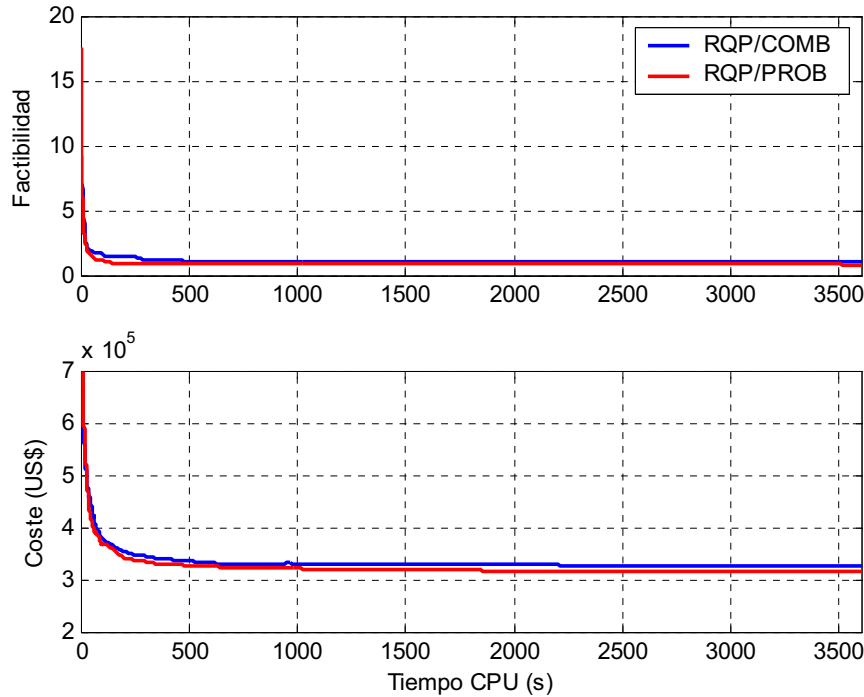


Figura 4.13: Evolución de las 2 implementaciones de Búsqueda VNS.

Tabla 4.2: Mejores resultados para cada implementación de la Búsqueda VNS.

Tiempo (hh:mm:ss)	RQP/COMB	Coste (US\$)
00:00:00	(9.3) 705551	(17.6) 755823
00:01:00	(1.8) 418261	(1.4) 397957
00:02:00	(1.4) 371815	(1.0) 366784
00:05:00	(1.2) 345463	(0.9) 334539
00:10:00	(1.1) 332169	(0.9) 324790
00:30:00	(1.0) 328610	(0.9) 317650
00:60:00	(1.0) 324533	(0.8) 316174

Tal y como puede verse, en ambos casos (COMB y PROB) se obtienen mejores resultados que los obtenidos al utilizar un único método para la generación de los vecindarios (Búsquedas MS). Mediante la Búsqueda VNS se obtienen soluciones con

un grado de factibilidad semejante al obtenido mediante la Búsqueda MS-(RQP/Nc2) con un coste similar al alcanzado mediante la Búsqueda MS-(RQP/Ni4).

4.2.5 Búsqueda Tabú

Tal y como se comentó en la sección 4.1.1, la Búsqueda Tabú es la mejor representante de las metaheurísticas de búsqueda con memoria. Se basa en mantener un histórico de las soluciones encontradas con anterioridad para no entrar así en un ciclo de búsquedas. La diferencia entre la Búsqueda Tabú y las Búsquedas MS o VNS es que el conjunto de soluciones que se pueden utilizar en cada movimiento excluye las soluciones tabú. Las soluciones tabú se encuentran almacenadas en la lista de todas las soluciones aceptadas con anterioridad. Otra diferencia es la forma en la que se escapa de un óptimo local. En las Búsquedas MS o VNS la búsqueda se dirige hacia nuevas soluciones construidas, mientras que en la Búsqueda Tabú se hace hacia una solución no tabú escogida de forma aleatoria dentro del vecindario. Al igual que en las Búsquedas MS o VNS, la implementación se basa en tres algoritmos. El algoritmo 4.5 muestra el procedimiento para la implementación de la Búsqueda Tabú.

Algoritmo 4.5: Búsqueda Tabú.

```
y*=BUSQUEDATABU(K,MC,MV)
(1) t=TIME()
(2) y*=Construccion(MC)
(3) LT={}
(4) while TIME()-t<TM do
(5)   y=BUSQUEDALOCALTS(y,LT,MV)
(6)   if y<y*
(7)     y*=y
(8)     if RANDC(VECINOS(y,MV)\LT)={}
(9)       y=FIRST(LT)
(10)      MoveFirst2End(LT)
(11)    else
(12)      y=RANDC(VECINOS(y,MV)\LT)
(13)    end
(14)  end
(15) end
(16) return y*
```

Finalmente, el algoritmo 4.6 realiza una búsqueda local en torno al punto actual y el algoritmo 4.7 implementa el procedimiento de mejora utilizado en la Búsqueda Tabú.

Algoritmo 4.6: Rutina de búsqueda local para la Búsqueda Tabú.

```

y*=BUSQUEDALOCALTS(y,LT,MV)
(1) y*=MEJORATS(y,LT,MV)
(2) while y*≠y do
(3)   y=y*
(4)   y*=MEJORATS(y,LT,MV)
(5) end
(6) return y*

```

Algoritmo 4.7: Mejora de una solución para la Búsqueda Tabú.

```

y*=MEJORATS(y,LT,MV)
(1) S=VECINOS(y,MV)\LT
(2) while S≠{} do
(3)   y*=RANDC(S)
(4)   if y*<y
(5)     LT=LT∪{y*}
(6)     return y*
(7)   end
(8)   S=S\{y*}
(9) end
(10) return y*

```

En vista de los resultados anteriores para la Búsqueda VNS se utilizarán los métodos COMB y PROB para la generación de vecinos en combinación con el algoritmo RQP para la generación de las soluciones iniciales. Por tanto, se dispone de 1 método de construcción y 2 métodos para el cálculo de vecinos, proporcionando 2 implementaciones diferentes para la Búsqueda Tabú. Al igual que para las Búsquedas MS y VNS, la figura 4.14 compara la evolución de cada una de las implementaciones de la Búsqueda Tabú a la hora de resolver el problema planteado en la sección 3.4.3 del *Capítulo* anterior. De nuevo, el tamaño y la forma de exploración de los vecindarios son semejantes a los utilizados para las Búsquedas MS y VNS. El tamaño

de la lista Tabú es de 50 soluciones. Tras probar otros valores, se comprueba que aumentar el tamaño de la lista por encima de 50 no mejora los resultados obtenidos y, sin embargo, se aumenta el tiempo de cómputo.

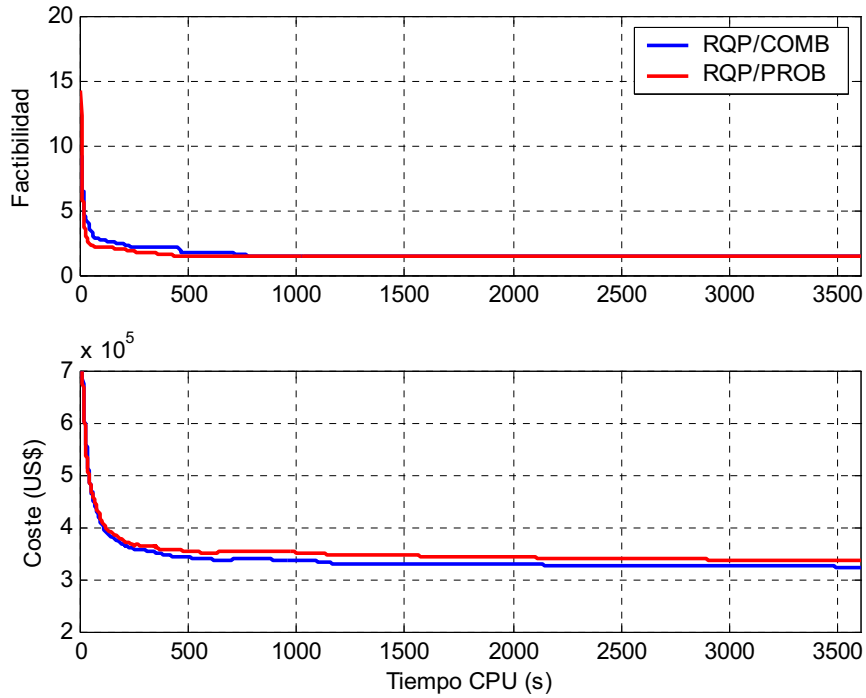


Figura 4.14: Evolución de las 2 implementaciones Búsqueda Tabú.

La tabla 4.3 muestra el valor de la función de coste de las soluciones encontradas por cada una de dichas implementaciones durante la hora que fueron ejecutadas. De nuevo, como en los casos anteriores, el número entre paréntesis denota el grado en el que la solución no es factible.

Tabla 4.3: Mejores resultados para cada implementación de la Búsqueda Tabú.

Tiempo (hh:mm:ss)	RQP/COMB	Coste (US\$) RQP/PROB
00:00:00	(9.2) 729302	(14.2) 764718
00:01:00	(3.1) 462079	(2.3) 463421
00:02:00	(2.7) 393220	(2.1) 400858
00:05:00	(2.2) 356472	(1.8) 364317
00:10:00	(1.8) 338878	(1.5) 350788
00:30:00	(1.5) 327766	(1.5) 343578
00:60:00	(1.5) 324085	(1.5) 337404

Tal y como puede verse, los resultados obtenidos son semejantes a los obtenidos mediante la Búsqueda VNS. Esto es lógico, ya que la única diferencia entre dichos algoritmos es la forma en la que se escapa de un mínimo local, dirigiendo la búsqueda hacia una nueva solución en el caso de la Búsqueda VNS, o hacia una solución no tabú escogida de forma aleatoria dentro del vecindario en el caso de la Búsqueda Tabú.

4.2.6 Enfriamiento Simulado

Dicha técnica fue introducida en primer lugar por [KGV83] basándose en el trabajo [MRRTT53]. Se trata de un algoritmo estocástico que genera una secuencia X_0, X_1, \dots, X_n de soluciones al problema generadas de forma aleatoria que se aproximan al conjunto de soluciones óptimas a medida que n tiende a infinito. Esta secuencia de soluciones es generada siguiendo la ecuación (4.6).

$$X_{n+1} = \begin{cases} X'_n & \text{si } E(X'_n) \leq E(X_n) \\ X'_n & \text{si } e^{\left(\frac{E(X_n) - E(X'_n)}{T_n}\right)} > rand() \\ X_n & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (4.6)$$

En esta ecuación X'_n es un vecindario de la solución generado modificando ligeramente X_n y $E(X_n)$ es el valor de la función objetivo. La función $rand()$ es un generador de números aleatorios haciendo estocástica la elección de la nueva solución. $T_n (>0)$ es la temperatura en la generación n . La secuencia de temperaturas es tal que $T_n \geq T_{n+1}$, tendiendo a cero cuando n tiende a infinito. Dicha característica se denomina estrategia de enfriamiento. De la ecuación (4.6) puede verse que la elección de X_{n+1} depende solamente de la solución actual X_n pero no de las previamente visitadas. Por tanto, el camino que sigue la búsqueda realizada por los algoritmos de Enfriamiento Simulado sigue una cadena de Markov. De aquí en adelante se denomina por tanto a dicho algoritmo SSMC-SA (de Sequential Single Markov Chain Simulated Annealing en inglés). Para que la estrategia de enfriamiento sea efectiva, la probabilidad de no alcanzar una solución óptima en la generación n mediante la utilización del SSMC-SA queda caracterizada mediante la ecuación (4.7), donde U_{min} es un conjunto de puntos correspondientes a soluciones óptimas [CC88]. En esta ecuación, n es suficientemente grande y $K > 0$ y $\theta > 0$ son constantes características de la configuración de energías y la generación del vecindario. Así, a medida que n tiende a infinito, la solución converge con probabilidad 1 a alguno de los puntos óptimos incluidos en U_{min} .

$$P(X_n \notin U_{min}) \sim \left(\frac{K}{n}\right)^\theta \quad (4.7)$$

La mayoría de los algoritmos de Enfriamiento Simulado encontrados en la literatura siguen una única cadena de Markov. Sin embargo, seguir una única cadena de Markov no es eficiente desde el punto de vista computacional [LL96]. Para solventar este inconveniente, pueden desarrollarse algoritmos de Enfriamiento Simulado cuyas direcciones de búsqueda sigan varias cadenas de Markov de forma simultánea. De aquí en adelante se denominará a tal algoritmo SMMC-SA (de Sequential Multiple Markov Chain Simulated Annealing en inglés). El algoritmo SMMC-SA es capaz de ejecutar simultáneamente S versiones independientes del algoritmo SSMC-SA en un mismo computador, utilizando el mismo espacio de búsqueda, generación de vecindarios y estrategia de enfriamiento. La ejecución de cada una de estas versiones independientes se para después de n iteraciones para obtener S soluciones terminales independientes $\{X_{n,1}, X_{n,2}, \dots, X_{n,S}\}$. Entonces, de entre todas estas soluciones se escoge la mejor como la solución final del problema X_n . La ecuación (4.8) muestra la ecuación para el SMMC-SA equivalente a la (4.7) para el SSMC-SA.

$$P(X_n \notin U_{min}) = \prod_{i=1}^S P(X_{n,i} \notin U_{min}) \sim \left(\frac{K}{n}\right)^{\theta \cdot S} < \left(\frac{K}{n}\right)^{\theta} \quad (4.8)$$

Así, según esta ecuación, para $0 < K/n < 1$, la probabilidad de no obtener una solución dentro del conjunto U_{min} en la iteración n cuando se utiliza un SMMC-SA disminuye exponencialmente a medida que el tamaño de S aumenta, [Aze92b]. Sin embargo, el tiempo de CPU utilizado por el algoritmo para alcanzar dicha iteración n aumenta con el tamaño de S , pero sólo de forma lineal, ya que si el tiempo CPU necesario para que el algoritmo SMMC-SA alcance la iteración n es t , entonces el algoritmo SMMC-SA requiere el tiempo $S \times t$ para alcanzar la misma iteración.

Finalmente, el punto más importante del SA es el diseño de la estrategia de enfriamiento. Las reglas para determinar a) el valor de la temperatura inicial, b) cuando debería modificarse la temperatura actual, y c) cuanto debería reducirse la misma se denomina la estrategia de enfriamiento. En el algoritmo SA propuesto, se utiliza una estrategia de enfriamiento bastante popular en la cual un determinado número de iteraciones se ejecutan a temperatura constante. Tras estas generaciones la temperatura es modificada mediante la ecuación $T_r = \alpha \times T_{r-1}$, donde r es el índice correspondiente a los diferentes niveles de temperatura y α es el coeficiente o velocidad de enfriamiento cuyo valor debe estar dentro del intervalo $[0,1]$ y suele ser próximo a 1. Así, los parámetros de la estrategia de enfriamiento para el algoritmo SA propuesto son la temperatura inicial T_0 , la velocidad de enfriamiento α y el número de iteraciones a ejecutar en cada nivel de temperatura N .

El Algoritmo 4.8 muestra el pseudocódigo para la implementación del SMMC-SA. En dicho algoritmo se ha hecho una analogía con las metaheurísticas de evolución en el sentido de que las S soluciones sobre las que se ejecuta de forma independiente un SSMC-SA se han agrupado en una población de individuos que evoluciona con el SMMC-SA. A pesar de manejar una población de soluciones, el SA basado en múltiples cadenas de Markov no puede enmarcarse dentro de las metaheurísticas de evolución ya que los individuos de la población no interaccionan entre ellos. El algoritmo SMMC-SA comienza por generar una población de individuos sobre cada uno de los cuales se ejecutará un SSMC-SA, todos ellos compartiendo la misma estrategia de enfriamiento. Nótese además que dicho algoritmo se convierte en el SSMC-SA sin más que hacer $S=1$.

Algoritmo 4.8: Algoritmo SMMC-SA.

```

sol=SMMC-SA(S, To, N, α)
(1)  r=0
(2)  POP(r)=INICIALIZAR(S)
(3)  while BEST(POP(r))>tol do
(4)    for n=0 to (N-1)
(5)      for i=1 to S
(6)        X'_{n,i}=GENERAR(X_{n,i})
(7)        X_{n+1,i}=Ecuación (4.6)
(8)      end
(9)    end
(10)   r=r+1
(11)   T_r=α*T_{r-1}
(12) end
(13) return BEST(POP(r))

```

Como se ha dicho, el algoritmo comienza generando la población de soluciones iniciales, para lo que pueden utilizarse cualquiera de los métodos de construcción de soluciones vistos anteriormente (RND, RLP o RQP). En cuanto a la generación de nuevas soluciones a partir de las actuales mostrado en la línea 6 pueden utilizarse cualquiera de los operadores para la generación de vecinos desarrollados en la sección 4.2.2. La función de energía a utilizar en la ecuación (4.6) corresponde con la función objetivo de nuestro problema. El algoritmo continúa su ejecución hasta que el mejor individuo de la población es suficientemente bueno.

Antes de ejecutar las versiones SSMC y SMMC para resolver el problema aquí tratado, puede hacerse un estudio previo para estimar el valor de los parámetros S , T_0 , N y α con los que dichos algoritmos ofrecen los mejores resultados. Para ello, fijando $S=1$ se ejecutan diferentes versiones del algoritmo SSMC-SA que resultan de modificar el valor de uno de dichos parámetros dejando fijos los otros dos. Para ello, partiendo de unos valores $T_0=10^4$, $N=10^4$ y $\alpha=0.950$, se modifica en primer lugar T_0 manteniendo fijos N y α , a continuación se modifica N manteniendo fijos T_0 y α , y finalmente se modifica α manteniendo fijos T_0 y N . Análogamente que para las Búsquedas VNS y Tabú, se utiliza el algoritmo RQP para la generación de las soluciones iniciales junto con el método COMB para la generación de nuevas soluciones $(X'_{n,i})$ a partir de las anteriores $(X_{n,i})$. Los resultados obtenidos e muestran en la figura 4.15, observándose $T_0=10^4$, $N=10^5$ y $\alpha=0.980$ como la mejor elección.

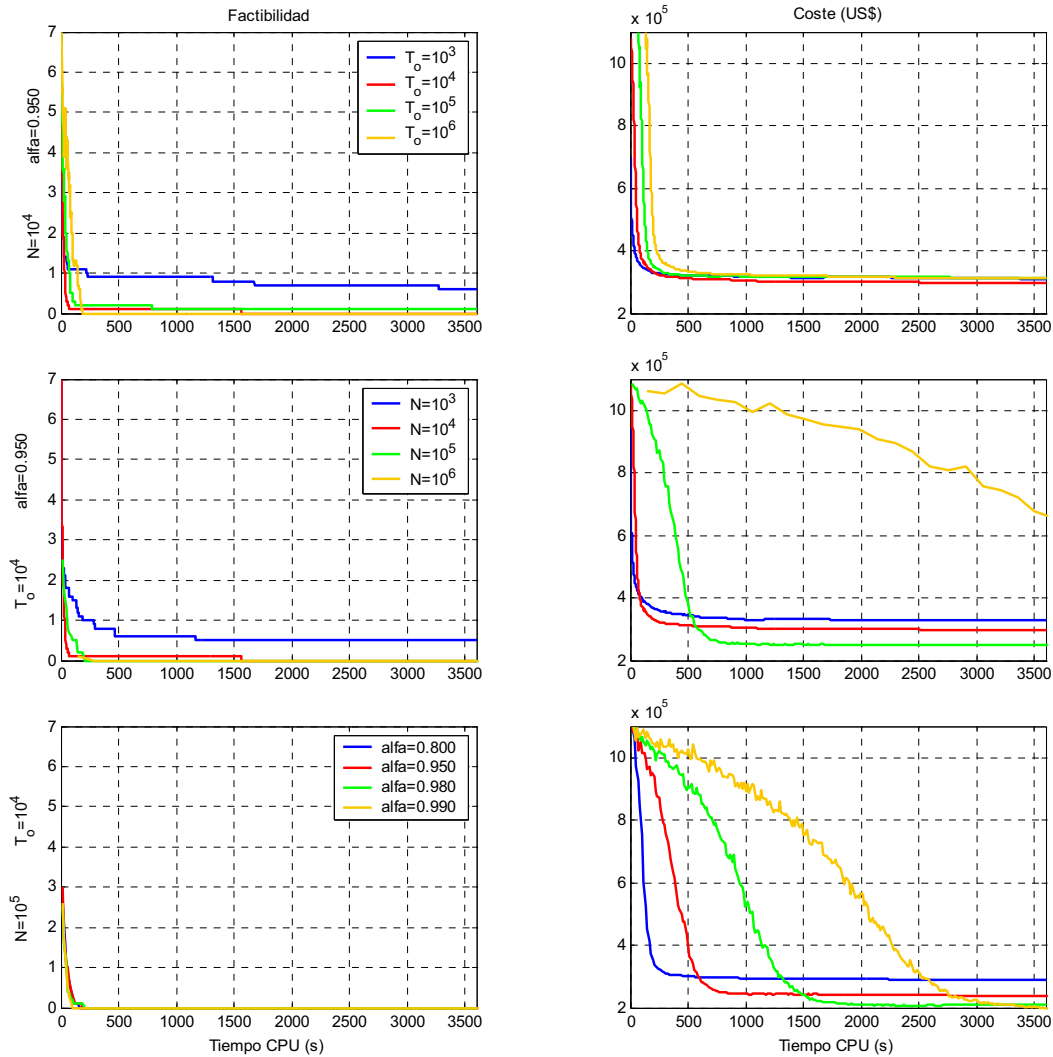


Figura 4.15: Sintonía previa de los parámetros del algoritmo SSMC-SA.

Para validar la robustez del algoritmo SSMC-SA desarrollado se han ejecutado 8 instancias del mismo con diferentes valores de los parámetros T_0 , N y α generados de forma aleatoria en torno a unos valores de referencia similares a los mejores encontrados en el estudio anterior. La tabla 4.4 muestra los valores utilizados en cada una de dichas instancias del algoritmo SSMC-SA. La primera instancia corresponde a los valores de referencia. Los resultados obtenidos se muestran en la figura 4.16.

Tabla 4.4: Parámetros utilizados en cada una de las 9 instancias del algoritmo SSMC-SA.

Tiempo (mm:ss)	Número de instancia								
	Test 1	Test 2	Test 3	Test 4	Test 5	Test 6	Test 7	Test 8	Test 9
N	100000	93000	58000	75000	87000	101000	130000	145000	110000
T_0	10000	9200	5700	11800	14600	5500	8400	10500	13600
α	0.950	0.930	0.956	0.943	0.979	0.911	0.976	0.922	0.990

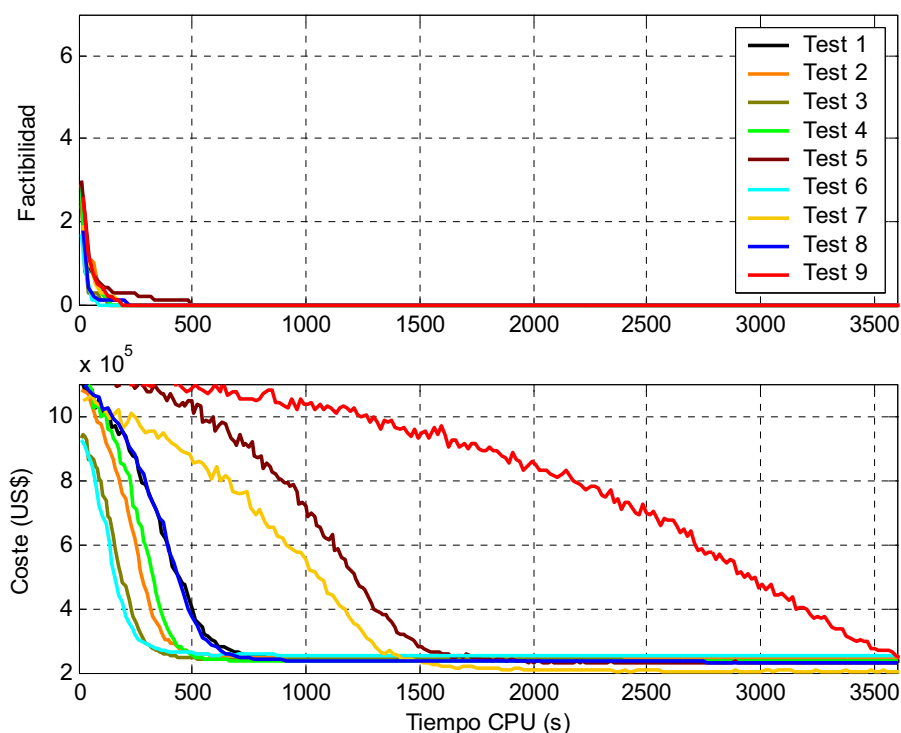


Figura 4.16: Robustez del algoritmo SSMC-SA.

Tal y como puede verse en dicha figura en todos los casos se alcanzan soluciones factibles en apenas 500 segundos con un valor de la función de coste en torno a 200000 US\$, validando así la robustez del algoritmo desarrollado. La tabla 4.5 muestra el valor de la función de coste de las soluciones encontradas por cada una de dichas implementaciones. En ella, el símbolo \times denota que la solución no es factible.

Tabla 4.5: Mejores resultados para cada implementación del algoritmo SSMC-SA.

Tiempo (mm:ss)	Coste (US\$)								
	Test 1	Test 2	Test 3	Test 4	Test 5	Test 6	Test 7	Test 8	Test 9
00:00:00	×	×	×	×	×	×	×	×	×
00:01:00	×	×	×	×	×	×	×	×	×
00:02:00	×	×	688320	×	×	596726	×	×	×
00:05:00	757418	418452	284586	561089	×	284303	952961	750117	1093695
00:10:00	281434	253415	241150	239692	950939	255211	839138	278157	1100431
00:30:00	242286	247827	239202	234497	240200	254026	214474	235208	900415
00:60:00	236819	246219	238292	233497	228153	252154	204926	233056	244220

Tal y como se comentó anteriormente, la probabilidad de no alcanzar una solución óptima tras la ejecución de un determinado número de iteraciones disminuye con el número de cadenas de Markov ejecutadas. Por ello, se ha desarrollado un algoritmo cuyas direcciones de búsqueda siguen varias cadenas de Markov de forma simultánea (SSMC-SA). Para ver como varia la convergencia de dicho algoritmo en función del número de cadenas de Markov (S) se ejecutan 4 instancias del algoritmo SSMC-SA con valores de S comprendidos entre 1 y 15, y unos parámetros $T_0=10^4$, $N=10^5$ y $\alpha=0.950$. La figura 4.17 muestra la convergencia de tales instancias. Además, la tabla 4.6 muestra los valores de la función de coste obtenidos tras diez horas de ejecución.

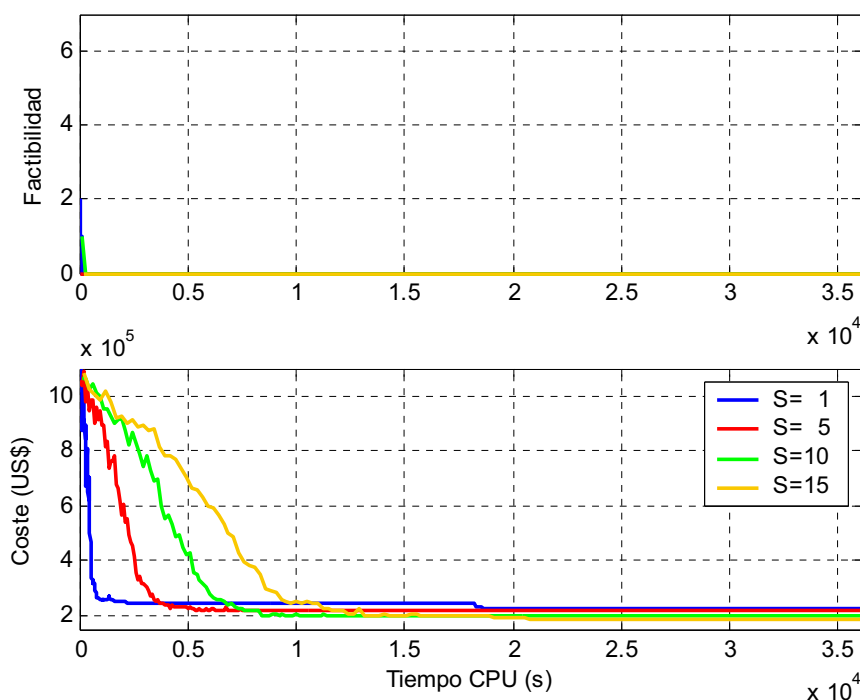


Figura 4.17: Convergencia del algoritmo SSMC-SA para diferentes valores de S .

Tabla 4.6: Mejores resultados para cada implementación del algoritmo SMMC-SA.

Tiempo (hh:mm:ss)	Coste (US\$)			
	S=1	S=5	S=10	S=15
00:00:00	(2.0) 1097030	1056470	(1.0) 1066620	(1.0) 1033600
00:10:00	316070	984700	1044790	960180
00:20:00	259590	817490	953490	960180
00:50:00	248150	307910	782310	863140
01:40:00	248150	221750	277830	545800
05:00:00	248150	216750	200750	193850
10:00:00	228050	216750	200750	193850

Tal y como puede verse, el algoritmo SMMC-SA ofrece mejores resultados que el SSMC-SA. A su vez, la solución alcanzada por el algoritmo SMMC-SA mejora con el número de cadenas de Markov utilizadas. En contrapartida la convergencia de dicho algoritmo es más lenta a medida que se aumenta S . Así, se debe llegar a un compromiso entre la calidad de la solución requerida (se obtienen mejores soluciones cuanto mayor es el valor de S) y el tiempo de cómputo necesario para encontrarla.

4.2.7 Comparativa entre todas las Metaheurísticas de Búsqueda desarrolladas

Finalmente, se comparan en esta sección todas las Metaheurísticas de Búsqueda desarrolladas para resolver el problema de optimización aquí planteado. Solamente se comparan las mejores versiones encontradas para cada una de ellas tras el análisis anterior. En la tabla 4.7 se compara la función de coste de las soluciones encontradas por cada uno de dichos algoritmos durante la hora que fueron ejecutados. En cuanto al algoritmo SA se han utilizado los resultados del SSMC-SA, ya que el SMMC-SA necesita un tiempo de cómputo superior al utilizar múltiples cadenas de Markov.

Tabla 4.7: Comparación entre las diferentes Metaheurísticas de Búsqueda desarrolladas.

Tiempo (hh:mm:ss)	Coste (US\$)			
	MS	VNS	TS	SSMC-SA
00:00:00	(32.5) 736733	(17.6) 755823	(9.2) 729302	(3.0) 1108793
00:01:00	(4.0) 604788	(1.4) 397957	(3.1) 462079	(0.7) 1024535
00:02:00	(1.4) 552255	(1.0) 366784	(2.7) 393220	(0.1) 996452
00:05:00	(0.7) 475277	(0.9) 334539	(2.2) 356472	757418
00:10:00	(0.3) 427062	(0.9) 324790	(1.8) 338878	281434
00:30:00	(0.2) 378704	(0.9) 317650	(1.5) 327766	242286
00:60:00	(0.2) 369753	(0.8) 316174	(1.5) 324085	236819

La figura 4.18 muestra la convergencia de cada uno de tales algoritmos durante la hora que fueron ejecutados. Tal y como puede verse el algoritmo SSMC-SA es el que ofrece los mejores resultados, seguido por la Búsqueda Tabú, VNS y finalmente MSS. El hecho de existir cierta probabilidad de aceptar soluciones peores a la actual hace que el algoritmo SSMC-SA evite los mínimos locales en los que probablemente se encuentren las soluciones alcanzadas por los algoritmos TS, VNS y MSS.

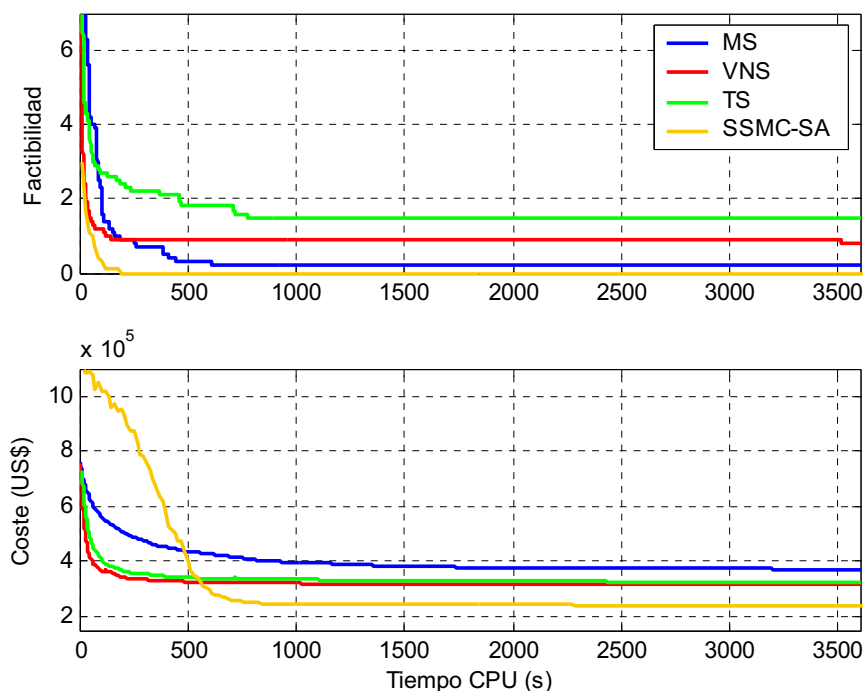


Figura 4.18: Comparación de las diferentes Metaheurísticas de Búsqueda desarrolladas.

4.3 Optimización basada en Metaheurísticas de Evolución

En una búsqueda en grupo o basada en poblaciones se sustituye la solución actual que recorre el espacio de soluciones, por un conjunto de soluciones que lo recorren conjuntamente interactuando entre ellas. Además de los movimientos aplicables a las soluciones que forman parte de este conjunto, denominado grupo o población de búsqueda, se contemplan otros operadores para generar nuevas soluciones a partir de las ya existentes.

Los Algoritmos Genéticos (AG) son uno de los representantes más populares de las metaheurísticas de evolución. Operan sobre una población inicial de individuos

generados de forma aleatoria y que representan una solución al problema que pretenden resolver. Estos individuos suelen llamarse cromosomas, cuyos genes representan las variables del problema, y son evaluados para obtener una medida de su aptitud frente al problema que se pretende resolver (función objetivo a optimizar). El proceso de reproducción usualmente involucra dos operadores genéticos: el cruce y la mutación. Dichos operadores modifican la composición de los genes para generar nuevos cromosomas denominados descendientes o hijos. El cruce genera hijos que heredan genes de ambos padres con probabilidad P_c . La mutación modifica de forma aleatoria algunos genes de cada cromosoma con probabilidad P_m . El operador de selección de los individuos que entran en juego en la reproducción es una versión artificial del proceso de selección natural siguiendo el principio Darwiniano de reproducción y supervivencia del más apto. Tras varias generaciones, los AGs convergen hacia una mejor solución. Supóngase que $POP(t)$, $P(t)$ y $H(t)$ son la población total, los padres e hijos respectivamente en la generación t . Con esta nomenclatura, el algoritmo 4.9 muestra la implementación del AG Básico.

Algoritmo 4.9: Algoritmo Genético Básico.

```
sol=AG_SIMPLE()
(1)  t=1
(2)  INICILIZAR POP(t)
(3)  EVALUAR POP(t)
(4)  while BEST(POP(t))>critério do
(5)    P(t)=SELECCION(POP(t))
(6)    H(t)=REPRODUCCION(P(t))
(7)    EVALUAR H(t)
(8)    P(t+1)=RECOMBINACION(POP(t),H(t))
(9)    t=t+1
(10) end
(11) return BEST(POP(t))
```

Normalmente, una selección por el método de la ruleta, un único punto de cruce, una mutación basada en la modificación de algún gen escogido de forma aleatoria y una recombinación generacional suelen ser suficientes a la hora de resolver la mayoría de los problemas. Sin embargo, en determinado tipo de problemas, si dichos operadores no son cuidadosamente diseñados, la búsqueda del óptimo en el espacio de soluciones podría ser ineficiente, e incluso aleatoria.

4.3.1 Codificación del problema

La codificación de las soluciones que constituyen los individuos de la población sobre la que opera el AG es la misma que la adoptada para las Metaheurísticas de Búsqueda consideradas en la sección anterior. Sin embargo, en lugar de considerar la matriz y de dimensión $C \times T$, donde las filas se corresponden con las conexiones de la red y las columnas con los instantes de tiempo que componen el horizonte de planificación, los elementos de dicha matriz se reorganizan en un vector, tal y como se muestra en la figura 4.19. De esta forma, la población total será una matriz en la que cada fila es un individuo de la población. Dicha codificación hace más sencillo el diseño de los operadores genéticos que operan sobre la población total.

t	1			2			T		
c	1	C	1	C	1	C
y	$y_{1,1}$	$y_{1,C}$	$y_{2,1}$	$y_{2,C}$	$y_{T,1}$	$y_{T,C}$

Figura 4.19: Representación de una solución mediante heurísticas.

4.3.2 Proceso de Selección

Existen varias posibilidades a la hora de seleccionar los padres que intercambiarán información genética en el proceso de reproducción para dar lugar a la siguiente generación de individuos. Normalmente, los métodos de selección escogen los padres de entre toda la población mediante alguna técnica que tenga en cuenta su aptitud frente al resto (*fitness*). Los métodos más utilizados son el método de la ruleta y la selección por torneo.

Método de la ruleta

En el método de la ruleta la probabilidad de que un individuo de la población sea seleccionado como padre es directamente proporcional a su *fitness*. A su vez, el *fitness* de cada individuo puede obtenerse de diversas formas dependiendo de si se atiende al valor de la función de coste o a la posición de cada uno de ellos dentro de la población total:

- De acuerdo con su *valor de la función objetivo* (SRO): Dado que en este caso se trata de minimizar, el *fitness* se obtiene como se muestra en la ecuación (4.9):

$$fitness(i) = \frac{1}{Coste(i)} \tag{4.9}$$

- De acuerdo con su *posición dentro de la población*: Teniendo en cuenta una ordenación de los individuos dentro de la población en la que el primero es el mejor, el *fitness* se obtiene como se muestra en la ecuación (4.10):

$$fitness(i) = \frac{2 - p - 2(i - 1) \cdot \frac{1 - p}{N - 1}}{N} \quad (4.10)$$

En esta ecuación, si $p=0$ se obtiene un método de selección por mejor ajuste (SRB) ya que el mejor tiene mayor probabilidad de ser seleccionado, si $p=1$ se obtiene una selección homogénea (SRH) al tener todos la misma probabilidad, y si $p=2$ se tiene la selección por peor ajuste por tener el peor la mayor probabilidad (SRW).

Selección por torneo

En el método de selección por torneo (ST) un grupo de individuos seleccionados de forma aleatoria (normalmente dos o tres) compiten por ser seleccionados como padres. En el caso de minimizaciones, el individuo ganador es el que menor valor de la función objetivo posee. Este proceso se repite hasta generar todos los padres necesarios para pasar al proceso de reproducción. Este método de selección tiene la ventaja de que la población no necesita ser ordenada de acuerdo a la aptitud de cada individuo por lo que se reducen los tiempos de ejecución del AG.

4.3.3 Proceso de Reproducción

El proceso de reproducción se basa en la generación de nuevos individuos a partir del intercambio de información genética entre algunos individuos de la población seleccionado con alguno de los métodos vistos anteriormente. Dicho proceso involucra normalmente dos operadores, el cruce y la mutación.

Operador de cruce

Dicho operador consiste en intercambiar la información genética de cada pareja de individuos escogidos mediante el método de selección. Existen múltiples posibilidades y maneras de implementar tal concepto pero para este problema una de las mejores elecciones consiste en generar cada hijo como copia de uno de los padres e ir intercambiando sus genes con los del padre restante en función de si el individuo resultante es mejor o peor del anterior. Un esquema que ilustra mejor la ejecución de dicho operador es el mostrado en la figura 4.20.

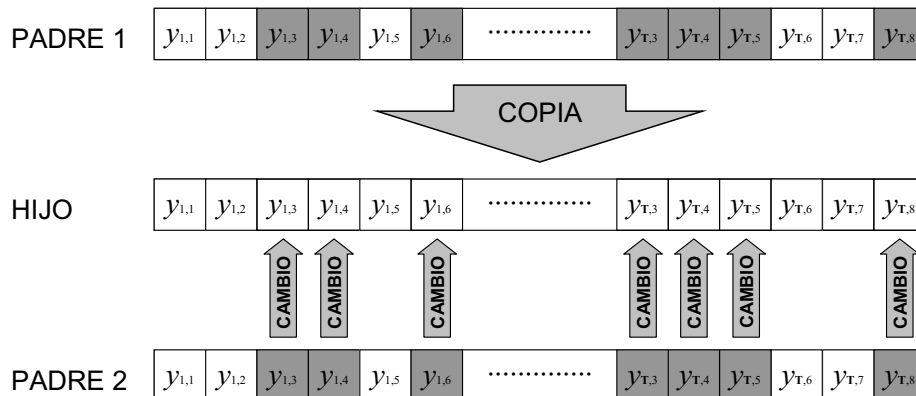


Figura 4.20: Operador de cruce.

El cambio siempre se acepta si mejora al individuo y existe una probabilidad $1-P_c$ de que sea aceptado en caso contrario. Además dichos cambios sólo se llevan a cabo sobre el conjunto de genes en que difieren los padres (área sombreada) denotado por G . A la hora de recorrer dicho conjunto existen dos posibilidades, en orden y de forma aleatoria. Para cada pareja de padres se obtienen dos hijos, el primero se obtiene como copia del primer padre e intercambiando sus genes con el segundo. Análogamente se obtiene el segundo hijo como copia del segundo padre e intercambiando sus genes con el primero. El algoritmo 4.10 muestra el pseudocódigo para la implementación del operador de cruce, que a su vez hace una llamada al procedimiento CRUZAR cuyo pseudocódigo se muestra en el algoritmo 4.11. El primero decide si los padres escogidos tras el proceso de selección deben cruzarse (con probabilidad $prob$) o no. El segundo, implementa el cruce en el caso de que éste deba ser ejecutado.

Algoritmo 4.10: Algoritmo para la implementación del cruce.

```

[hijo1,hijo2]=CRUCE(padre1,padre2,prob)
(1) if RAND(1)<prob
(2)   hijo1=CRUZAR(padre1,padre2,prob)
(3)   hijo2=CRUZAR(padre2,padre1,prob)
(4) else
(5)   hijo1=padre1
(6)   hijo2=padre2
(7) end
(8) return [hijo1,hijo2]
```

Algoritmo 4.11: Algoritmo para la obtención de un hijo.

```

hijo=CRUZAR(padre1,padre2,prob)
(1) G=FINDE(padre1≠padre2)
(2) hijo=padre1
(3) J=OBJETIVO(hijo)
(4) for gen∈G
(5)   hijo(gen)=padre2(gen)
(6)   Jnew= OBJETIVO(hijo)
(7)   if (Jnew<J) | (RAND()<(1-prob))
(8)     J=Jnew
(9)   else
(10)    hijo(gen)=padre1(gen)
(11)  end
(12) end
(13) return hijo

```

Operador de mutación

Dicho operador consiste en alterar con probabilidad muy baja algún gen de cada individuo. Con ello se asegura que ningún punto del espacio de búsqueda tenga probabilidad cero de ser explorado. El operador de mutación aquí utilizado consiste en seleccionar de forma aleatoria y con probabilidad muy baja el conjunto de genes a mutar, G , para a continuación recorrerlo, en orden o de forma aleatoria, e ir cambiando los genes por otros en función de si el cambio mejora o no el individuo. Al igual que con el cruce el cambio siempre se acepta si mejora al individuo y existe una probabilidad P_m de que sea aceptado en caso contrario. Un esquema que ilustra mejor la ejecución de dicho operador es el mostrado en la figura 4.21.

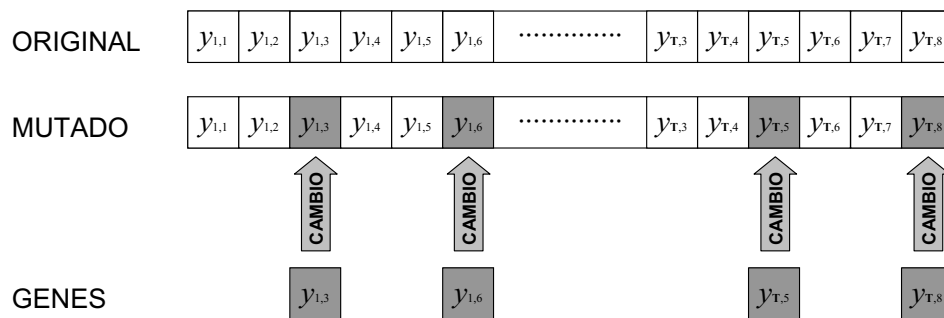


Figura 4.21: Operador de mutación.

El algoritmo 4.12 muestra el pseudocódigo para la implementación del operador de mutación.

Algoritmo 4.12: Algoritmo para la implementación de la mutación.

```
mutado=MUTACION(individuo,prob)
(1) G=FIND(RAND(LENGTH(individuo))<prob)
(2) mutado=individuo
(3) J=OBJETIVO(mutado)
(4) for gen∈G
(5)     mutado(gen)=GENERARND()
(6)     Jnew=OBJETIVO(mutado)
(7)     if (Jnew<J) | (RAND()<prob)
(8)         J=Jnew
(9)     else
(10)        mutado(gen)=individuo(gen)
(11)    end
(12) end
(13) return mutado
```

4.3.4 Proceso de Recombinación

Tal y como muestra el algoritmo 4.9, una vez generados los hijos tras el proceso de reproducción, éstos deben ser añadidos a la población mediante lo que se denomina proceso de recombinación. Existen varias posibilidades al respecto en función de si se desea eliminar algún individuo de la generación anterior o no:

- Aquí se utiliza la denominada *recombinación generacional*. En ella, dada la población antigua y la nueva (con n hijos), se sustituyen los peores n individuos de la antigua por todos los de la nueva. De esta forma se mantiene constante el tamaño de la población.
- Otra posibilidad es la llamada *recombinación elitista*. En ella, pasan a la siguiente generación un determinado número de individuos de la antigua (parámetro del método) más todos los individuos resultantes de la nueva. De esta forma se evita la posibilidad de sustituir a toda la población, lo que podría provocar la pérdida de buenos individuos.

Una vez obtenida la nueva población mediante cualquiera de los procesos de recombinación arriba explicados, se identifican los individuos repetidos, y estos son modificados hasta que no existan duplicados dentro de la misma población. Para este propósito, se puede usar una estrategia similar a la utilizada por el operador de mutación pero con una mayor probabilidad P_m .

4.3.5 Algoritmo Genético Secuencial

Una vez desarrollados los operadores necesarios para implementar cada uno de los procesos que componen un AG simple, dicho algoritmo puede ser utilizado para resolver el problema aquí planteado. Para distinguir a dicho algoritmo de su versión paralela desarrollada más adelante, se denomina a dicho algoritmo Algoritmo Genético Secuencial (SGA, de Sequential Genetic Algorithm en inglés). El algoritmo 4.13 muestra su pseudocódigo. El algoritmo comienza por generar de forma aleatoria una población de S individuos. Una vez generados, se evalúan por medio de la función objetivo, y si alguno cumple los requisitos de una solución óptima el algoritmo se detiene proporcionándolo como solución al problema. En caso contrario, se entra en el bucle correspondiente a cada generación del AG compuesto por la secuencia de funciones SELECCION de los padres, CRUCE de los mismos y MUTACION de los hijos resultantes, EVALUACION de dichos hijos y RECOMBINACION de las poblaciones antigua con los hijos actuales para producir la nueva población.

Algoritmo 4.13: Algoritmo Genético Secuencial (SGA).

```
sol=SGA(Nind,Np,Pc,Pm)
(1)  t=0
(2)  POP(t)=INICIALIZAR(S)
(3)  EVALUAR(POP(t))
(4)  while BEST(POP(t))>tol do
(5)    P(t)=SELECCION(POP(t),Np)
(6)    H(t)=CRUCE(P(t),Pc)
(7)    H(t)=MUTACION(H(t),Pm)
(8)    EVALUAR(H(t))
(9)    POP(t+1)=RECOMBINACION(POP(t),H(t))
(10)  t=t+1
(11) end
(12) return BEST(POP(t))
```

Dado que se dispone de tres métodos para la generación de la población inicial (RND, RLP, RQP), de cinco métodos para la implementación del proceso de selección (SRO, SRB, SRH, ST), dos métodos para la implementación del cruce (SIMPLE, SUPER), y dos métodos para la implementación del proceso de recombinación (RG, RE), existen 48 versiones diferentes del algoritmo SGA. El tamaño de la población es de 500 individuos para todas las implementaciones, siendo 200 las parejas a cruzar. Además, en vista de los resultados obtenidos con las Metaheurísticas de Búsqueda, se utiliza el algoritmo RQP para la generación de la población inicial. La probabilidad de cruce (P_c) es 0.8 y la de mutación (P_m) 0.008. Una vez fijados estos parámetros, se puede hacer un estudio para determinar los mejores operadores a utilizar en cada uno de los tres procesos del SGA (selección, reproducción y recombinación). El resultado se muestra en la figura 4.22:

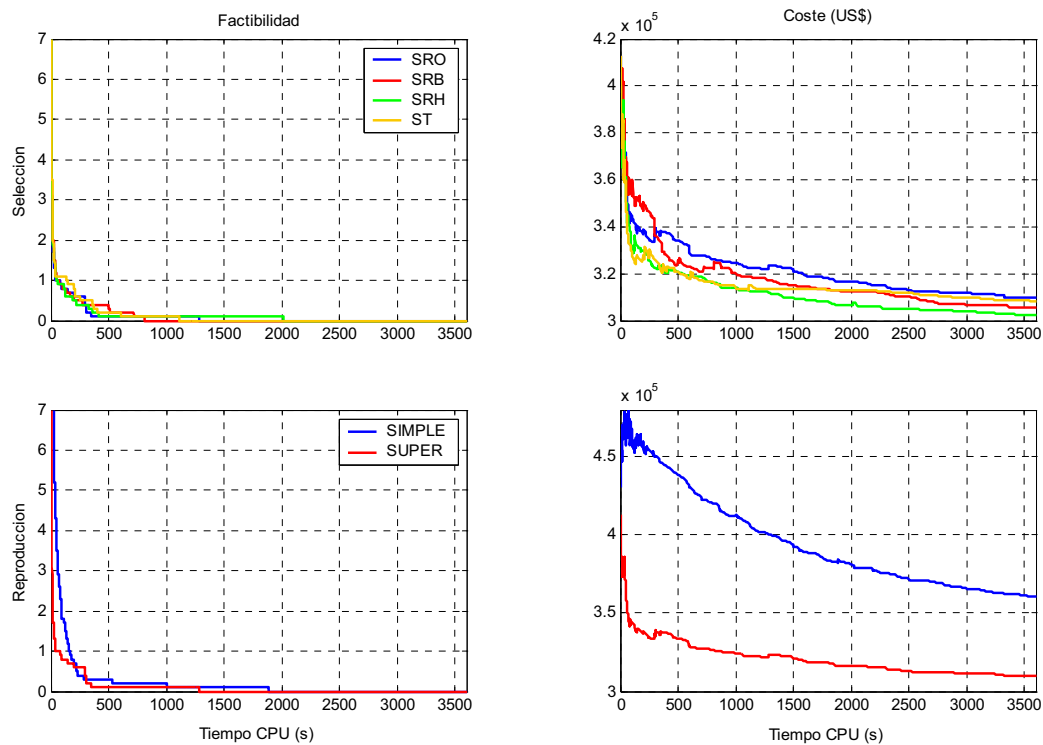


Figura 4.22: Determinación de los mejores métodos del SGA.

Tal y como puede verse, el SGA es capaz de minimizar el valor de la función de coste para todos los operadores utilizados en el estudio anterior. No obstante, se observa una mejor convergencia del algoritmo cuando se utiliza el método de selección SRH, y el cruce aquí diseñado (SUPER) en lugar del típico cruce basado en uno o múltiples puntos de cruce (SIMPLE). En cuanto al método de recombinación se ha utilizado siempre la recombinación generacional.

Finalmente, para validar la robustez del AG desarrollado se han ejecutado 8 instancias del mismo utilizando los métodos SRH, SUPER y RG pero con diferentes valores del tamaño de la población y probabilidades P_c y P_m generados de forma aleatoria en torno a los utilizados en el estudio anterior (de referencia). El número de parejas a cruzar se ha fijado a $0.4 \times N_{ind}$, obteniéndose así $0.8 \times N_{ind}$ descendientes en cada generación. La tabla 4.8 muestra los parámetros utilizados en cada una de dichas instancias. La primera instancia corresponde a los parámetros de referencia. Los resultados obtenidos se muestran en la figura 4.23.

Tabla 4.8: Parámetros utilizados en cada una de las 9 instancias del algoritmo SGA.

Tiempo (mm:ss)	Número de instancia								
	Test 1	Test 2	Test 3	Test 4	Test 5	Test 6	Test 7	Test 8	Test 9
Nind	500	100	20	1000	500	500	500	500	500
Pc	0.80	0.80	0.80	0.80	0.95	0.65	0.50	0.99	0.80
Pm	0.008	0.008	0.008	0.008	0.008	0.008	0.008	0.008	0.001

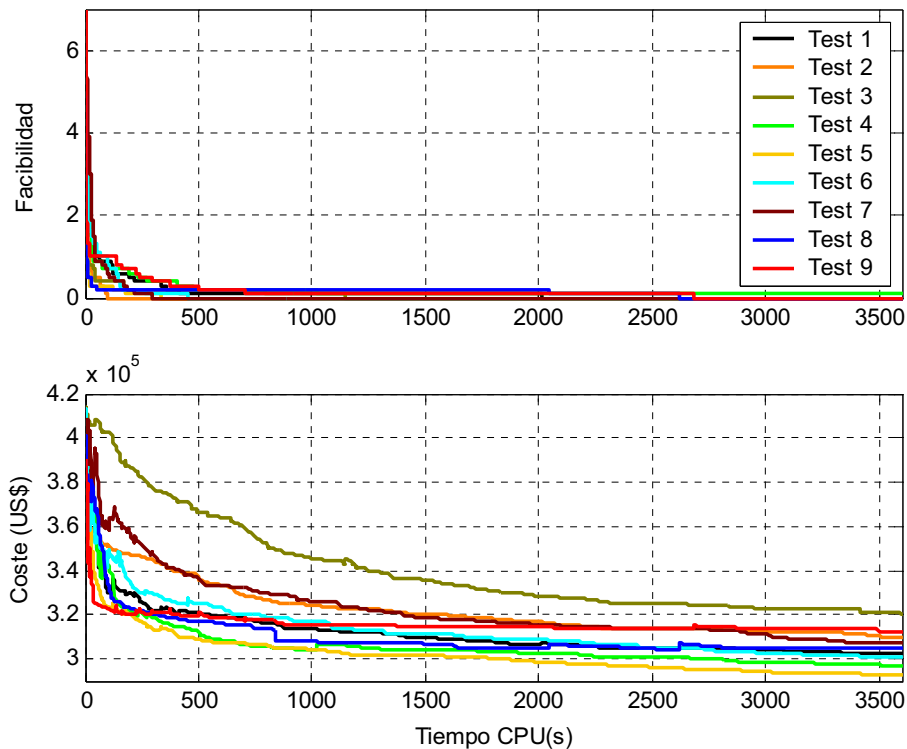


Figura 4.23: Robustez del algoritmo SGA.

Tal y como puede verse en dicha figura en todos los casos se alcanzan soluciones factibles en apenas 500 segundos con un valor de la función de coste en torno a 310000

US\$, validando así la robustez del algoritmo desarrollado. La tabla 4.9 muestra el valor de la función de coste de las soluciones encontradas por cada una de dichas implementaciones durante la hora que fueron ejecutadas.

Tabla 4.9: Mejores resultados para cada implementación algoritmo SGA.

Tiempo (mm:ss)	Coste (US\$)								
	Test 1	Test 2	Test 3	Test 4	Test 5	Test 6	Test 7	Test 8	Test 9
00:00:00	×	×	×	×	×	×	×	×	×
00:01:00	×	×	×	×	×	×	×	×	×
00:02:00	×	349460	×	×	×	×	×	×	×
00:05:00	×	345162	×	×	×	×	347569	×	×
00:10:00	×	333419	×	×	307160	323138	333287	×	×
00:30:00	×	318142	330474	×	300118	309006	316856	×	×
00:60:00	302348	309759	320660	×	292811	300981	307336	304656	312596

4.3.6 Algoritmo Genético con Búsqueda Local

Recientemente, se han considerado en la literatura diferentes combinaciones de Algoritmos Genéticos y Búsquedas Locales como una buena alternativa para resolver problemas de optimización. Una posibilidad es utilizar algoritmos de Búsqueda Local como procesos de mejora sobre los individuos de la población generados tras el proceso de reproducción de un AG tradicional, tal y como el SGA desarrollado en la sección anterior. Dichas Búsquedas Locales pueden ejecutarse sobre todos los individuos en cada generación, o solamente sobre el mejor. En este caso la Búsqueda Local consiste en la ejecución de un determinado número de iteraciones (N_g) de la metaheurística de búsqueda VNS, que para evitar un excesivo coste computacional, solamente se lleva a cabo sobre el mejor individuo encontrado en cada generación. El algoritmo 4.14 muestra el pseudocódigo para la implementación del Algoritmo Genético con Búsqueda Local aquí desarrollado.

Algoritmo 4.14: Algoritmo Genético con Búsqueda Local (SGA-LS).

```

sol=SGA_LS(Nind,Np,Pc,Pm,Ng)
(1) t=1
(2) INICILIZAR POP(t)
(3) EVALUAR POP(t)
(4) while BEST(POP(t))>criterio do
(5)     P(t)=SELECCION(POP(t),Np)
    
```

```

(6)   H(t)=CRUCE(P(t),Pc)
(7)   H(t)=MUTACION(H(t),Pm)
(8)   EVALUAR(H(t))
(9)   POP(t+1)=RECOMBINACION(POP(t),H(t))
(10)  VNS(BEST(POP(t+1),Ng)
(11)  t=t+1
(12)  end
(13)  return BEST(POP(t))

```

En dicho algoritmo, la Búsqueda Local explora el vecindario del mejor individuo en cada generación intentando mejorar el valor de su aptitud frente al resto mediante cambios locales. Si se encuentra un individuo mejor, entonces éste reemplaza al actual y el algoritmo continúa la búsqueda desde la nueva solución encontrada. Este proceso de Búsqueda Local se ejecuta un determinado número de veces. En cuanto al SGA se ha utilizado una población es de 500 individuos, 200 las parejas a cruzar, el algoritmo RQP para la generación de la población inicial, $P_c=0.8$ y $P_m=0.008$. En cuanto a la Búsqueda VNS se han utilizado vecindarios de 500 individuos y diferentes valores del número de iteraciones que se ejecuta la búsqueda (N_g). Así, la figura muestra la convergencia del algoritmo SGA-LS para diferentes valores de N_g .

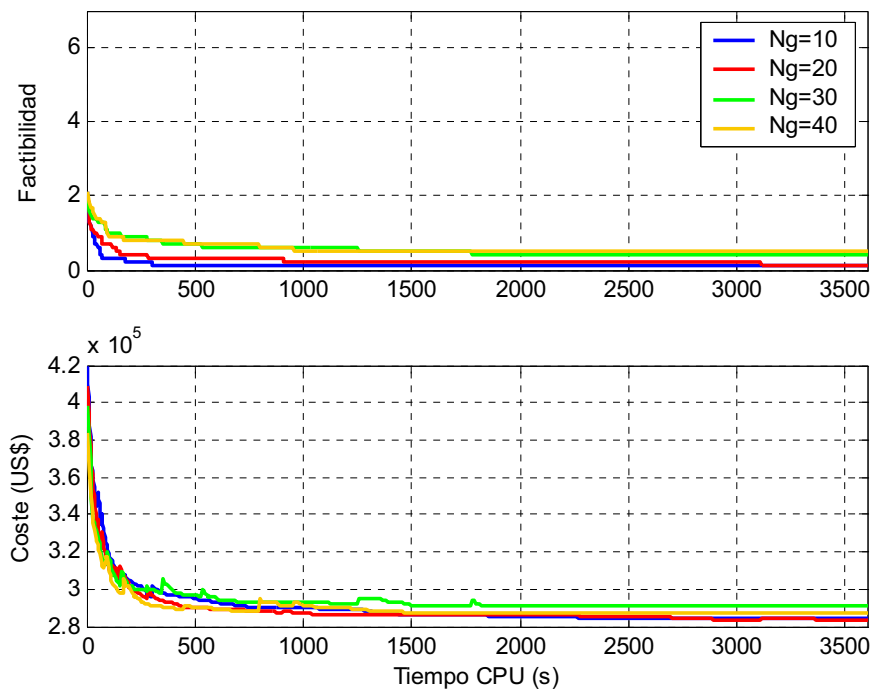


Figura 4.24: Convergencia del algoritmo SGA-LS para distintos valores de N_g .

Tal y como puede verse en dicha figura los resultados son similares en todos los casos, observándose tan solo una leve mejoría para las ejecuciones más cortas de la Búsqueda Local ($N_g=10$ y $N_g=20$). En la tabla 4.5 se compara la función de coste de las soluciones encontradas por cada una de dichas implementaciones. Como se ve, al integrar la Búsqueda VNS con el SGA se mejoran los resultados de éste último.

Tabla 4.10: Mejores resultados para cada implementación del algoritmo SGA-LS.

Tiempo (mm:ss)	Coste (US\$)			
	Ng=10	Ng=20	Ng=30	Ng=40
00:00:00	(2.1) 423936	(1.9) 408477	(2.0) 398083	(2.1) 384144
00:01:00	(0.5) 340712	(0.9) 327946	(1.3) 322304	(1.4) 319032
00:02:00	(0.3) 313964	(0.6) 312736	(1.0) 307628	(0.9) 302786
00:05:00	(0.2) 295558	(0.3) 296921	(0.8) 299662	(0.8) 291448
00:10:00	(0.1) 293113	(0.3) 288830	(0.6) 295294	(0.7) 289224
00:30:00	(0.1) 286055	(0.2) 286240	(0.4) 292022	(0.5) 287681
00:60:00	(0.1) 284212	(0.1) 283228	(0.4) 290630	(0.5) 286761

4.3.7 Algoritmo Genético Multiagente

Otra metaheurística de evolución que ha surgido recientemente son los MAGA (de Multiagent Genetic Algorithm en inglés) [ZLXJ04]. En un MAGA un agente representa un candidato a la solución del problema que se pretende resolver. Todos los agentes “viven” en una red (o malla), estando cada uno de ellos ubicados de forma fija en cada uno de los puntos de la misma. Para aumentar su energía, los agentes compiten o colaboran con sus vecinos, y hacen uso del conocimiento que se tiene del problema a resolver. Haciendo uso de dichas interacciones agente-agente, el MAGA consigue minimizar la función de coste de dicho problema. De acuerdo con [Liu01] y [LJT02], un agente es una entidad virtual con las siguientes propiedades:

- Es capaz de vivir y actuar en un determinado entorno.
- Es capaz de sentir o percibir su entorno local.
- Evoluciona de acuerdo a ciertos propósitos que pretende alcanzar.
- Tiene ciertos comportamientos reactivos.

Así, los sistemas multiagente son sistemas computacionales en donde los agentes interactúan o trabajan de forma conjunta para alcanzar los objetivos propuestos. En

general se deben definir cuatro elementos a la hora de resolver problemas con este tipo de sistemas. El primero de ellos es el significado y propósito de cada uno de los agentes del sistema. El segundo es el entorno en el que han de vivir cada uno de los agentes. El tercero es la definición exacta de qué se entiende por el entorno que es capaz de percibir localmente cada agente. Y el cuarto es el comportamiento que debe seguir cada agente para alcanzar su objetivo.

El problema aquí tratado consiste en la minimización de la función de coste asociada al problema de planificación de la distribución de diferentes derivados del petróleo. Así, un agente será un candidato a la solución del problema cuya energía es igual a la función de coste del mismo cambiada de signo tal y como indica la ecuación (4.11). Así, un agente contiene todas las variables de la función de coste codificando el problema a resolver, y su objetivo es incrementar su energía tanto como sea posible.

$$\text{Agente } y \in \Omega \quad / \quad \text{Energía}(y) = -z(y) \tag{4.11}$$

Para implementar la percepción local de su entorno, cada agente se encuentra situado en un punto de una malla bidimensional como la mostrada en la figura 4.25. El tamaño de dicha malla es $L \times L$, siendo L un entero positivo. Cada agente permanece fijo en su posición y sólo puede interactuar con sus vecinos. Así, para un agente situado en el punto (i,j) de la malla, su vecindario queda definido mediante la ecuación (4.12).

$$N_{i,j} = \{L_{i',j}, L_{i,j'}, L_{i'',j}, L_{i,j''}\} \quad \text{donde:} \tag{4.12}$$

$$i' = \begin{cases} i-1 & i \neq 1 \\ L & i = 1 \end{cases} ; \quad j' = \begin{cases} j-1 & j \neq 1 \\ L & j = 1 \end{cases} ; \quad i'' = \begin{cases} i+1 & L \neq 1 \\ 1 & L = 1 \end{cases} ; \quad j'' = \begin{cases} j+1 & L \neq 1 \\ 1 & L = 1 \end{cases}$$

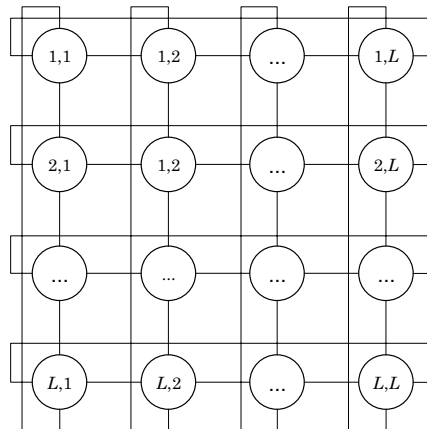


Figura 4.25: Malla de agentes.

En los AGs tradicionales, tal como el SGA desarrollado en la sección anterior, todos los individuos que participan en el proceso de reproducción (padres) son seleccionados de entre toda la población mediante alguna técnica que tenga en cuenta su aptitud frente al resto, por lo que dicha técnica puede ser considerada como una técnica de selección global. Sin embargo, la selección global no existe en la naturaleza, sino que el proceso de selección natural solamente tiene lugar de forma local, de tal forma que cada individuo de la población tan solo es capaz de percibir, y por tanto interaccionar, con su entorno más cercano. Por tanto, la evolución natural puede considerarse como un fenómeno local, en donde la información se transmite de forma global solamente tras un proceso de difusión. De forma análoga, los agentes situados en cada punto de la malla compiten y/o cooperan solamente con los de su entorno con el objetivo de incrementar su energía. Por tanto, la información de cada agente tan solo se transmite de forma directa a sus vecinos en cada generación, y es con el paso de varias generaciones cuando dicha información es distribuida de forma global al resto de la población mediante un proceso de difusión a través de toda la malla. Como puede verse, este modelo de evolución se asemeja más a la evolución natural que el modelo que siguen los AGs tradicionales.

Con el objetivo de implementar el comportamiento que cada agente ha de tener dentro de la malla en la que se encuentra, se han desarrollado los operadores de competición y cooperación. Adicionalmente a la utilización de estos operadores, cada agente puede sufrir ciertas mutaciones, e incluso utilizar el conocimiento que posee del problema a resolver para incrementar su energía.

Operador competición

Dicho operador implementa el comportamiento mediante el cual cada agente compite con los de su entorno. Sea $L_{i,j}$ el agente localizado en el punto (i,j) de la malla, y $Max_{i,j}$ el agente con mayor energía entre sus vecinos, es decir, $Max_{i,j} \in N_{i,j}$. Entonces $\forall y \in N_{i,j}$ se verifica que $E(y) \leq E(Max_{i,j})$. Si $L_{i,j}$ satisface la relación (4.13), entonces vence en la competición con los de su entorno y permanece en la red. En caso contrario, pierde dicha competición y su lugar es ocupado por $Max_{i,j}$.

$$E(L_{i,j}) > E(Max_{i,j}) \tag{4.13}$$

En cuanto a la estrategia de ocupación, existen dos posibilidades. Si $rand() < P_o$ se selecciona la primera estrategia según la cual $L_{i,j}$ es reemplazado por $Max_{i,j}$. En caso contrario, se adopta la segunda estrategia según la cual el agente que ocupa la posición de $L_{i,j}$ se construye mediante un operador similar al cruce SUPER diseñado

para el SGA. En este caso el agente ganador se construye mediante una copia de $Max_{i,j}$ y ejecutando el operador SUPER mediante el conjunto de genes de $L_{i,j}$ que difieren de los de $Max_{i,j}$.

Operador de cruce

La cooperación entre un agente y los de su entorno queda implementada mediante el operador cruce. La selección del agente a cruzar con $L_{i,j}$ se hace mediante una exploración de $N_{i,j}$ para encontrar $Max_{i,j}$. Una vez seleccionados los agentes a cruzar, de nuevo se ejecuta el cruce SUPER. En este caso el agente resultante del cruce se construye mediante una copia de $L_{i,j}$ y ejecutando el operador SUPER mediante el conjunto de genes de $Max_{i,j}$ que difieren de los de $L_{i,j}$. Una vez obtenido, dicho descendiente ocupa la posición de $L_{i,j}$.

Operador de mutación

Tras el cruce, análogamente a los AGs tradicionales, el algoritmo MAGA ejecuta una mutación de sus agentes con el objetivo de reducir la probabilidad de no explorar algún punto del espacio de búsqueda. Para ello, se utiliza una mutación similar a la desarrollada para el SGA.

Operador de autoaprendizaje

Los agentes suelen caracterizarse por el conocimiento que tienen acerca del problema a resolver. En vista de los resultados obtenidos mediante la integración de Búsquedas Locales dentro del algoritmo SGA (SGA-LS), se ha optado por utilizar alguna de las Metaheurísticas de Búsqueda desarrolladas en la sección 4.2 como operador de autoaprendizaje. En concreto se ha optado por la Búsqueda VNS.

Implementación del algoritmo MAGA

En el algoritmo MAGA, la competición es ejecutada sobre cada uno de los agentes de la malla. Por tanto, los agentes con poca energía son eliminados de la misma, dejando libre su posición en la malla para ser ocupada por agentes con una energía superior mediante alguna de las dos estrategias de ocupación desarrolladas con probabilidad P_o . Análogamente, tanto el operador de cruce como el de mutación se ejecutan sobre cada uno de los agentes de la malla con probabilidades P_c y P_m respectivamente. Para reducir el coste computacional del algoritmo se ha optado por ejecutar el operador de autoaprendizaje solamente sobre el mejor agente de la malla en cada generación. Aún así, dicho operador tiene un efecto importante sobre la evolución global de todos los agentes de la malla. Dicho operador se implementa mediante la ejecución de N_g iteraciones de la Búsqueda VNS sobre el agente

seleccionado. El algoritmo 4.15 muestra el pseudocódigo para la implementación del algoritmo MAGA desarrollado:

Algoritmo 4.15: Algoritmo Genético Multiagente (MAGA).

```
sol=MAGA(L, Po, Pc, Pm, Ng)
(1)  t=1
(2)  INICIALIZAR POP(t)
(3)  EVALUAR POP(t)
(4)  best=BEST(POP(t))
(5)  while best>criterio do
(6)    POP(t+1/3)=COMPETICION(POP(t), Po)
(7)    POP(t+2/3)=CRUCE(POP(t+1/3), Pc)
(8)    POP(t+1)=MUTACION(POP(t+2/3), Pm)
(9)    cbest=BEST(POP(t+1))
(10)   AUTOAPRENDIZAJE(cbest, Ng)
(11)   if cbest<best
(12)     best=cbest
(13)   else
(14)     cbest=best
(15)   end
(16)   t=t+1
(17) end
(18) return best
```

El valor de L se ha fijado a 20, por lo que la malla contiene 400 agentes, similar a la población de 500 individuos utilizada en los algoritmos SGA y SGA-LS. En cuanto a las probabilidades de cruce y mutación se han utilizado de nuevo los mismos valores que para los algoritmos SGA y SGA-LS, $P_c=0.8$ y $P_m=0.008$. Por tanto, tan solo queda por fijar el valor de los parámetros P_o y N_g . Para ello, se ha hecho un estudio ejecutando diferentes versiones del algoritmo MAGA para varios valores de dichos parámetros. En primer lugar, se han ejecutado tres instancias del algoritmo MAGA con $N_g=10$, correspondientes a diferentes valores de P_o . En segundo lugar, se han ejecutado otras cuatro instancias del algoritmo MAGA con $P_o=0.5$ y diferentes valores de N_g . Los resultados obtenidos se muestran en la figura 4.26. En la tabla 4.11 se compara la función de coste de las soluciones encontradas por cada una de dichas implementaciones, encontrándose la mejor combinación para $P_o=0.5$ y $N_g=30$.

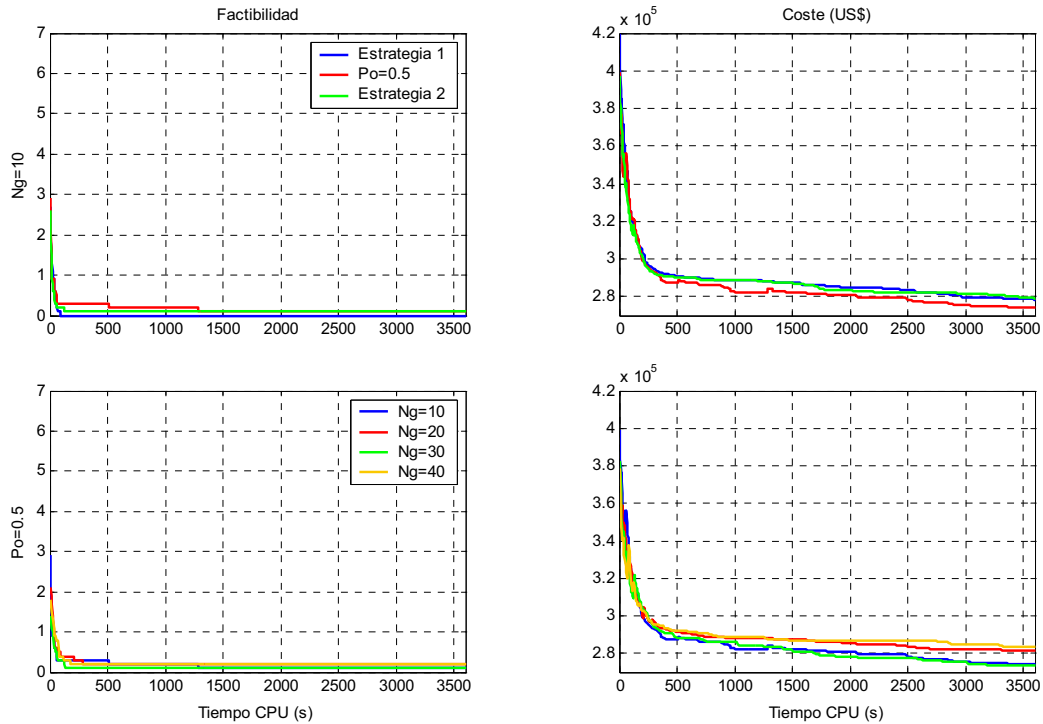


Figura 4.26: Determinación de los mejores parámetros del algoritmo MAGA.

Tabla 4.11: Resultados para cada implementación del algoritmo MAGA.

Tiempo (mm:ss)	Coste (US\$)			
	Ng=10	Ng=20	Ng=30	Ng=40
00:00:00	(2.9) 399372	(2.1) 378452	(1.4) 382857	(1.8) 378909
00:01:00	(0.3) 356180	(0.6) 332967	(0.4) 327848	(0.8) 323186
00:02:00	(0.3) 320907	(0.4) 317831	(0.3) 309593	(0.3) 317914
00:05:00	(0.3) 293227	(0.2) 296984	(0.1) 294248	(0.2) 295533
00:10:00	(0.2) 287639	(0.2) 290946	(0.1) 287869	(0.2) 291550
00:30:00	(0.1) 280691	(0.2) 286056	(0.1) 278637	(0.2) 286740
00:60:00	(0.1) 274283	(0.2) 281280	(0.1) 273437	(0.2) 283301

4.3.8 Comparativa entre todas las Metaheurísticas de Evolución desarrolladas

Análogamente a la comparativa hecha entre las diferentes Metaheurísticas de Búsqueda, en esta sección se comparan todas las Metaheurísticas de Evolución desarrolladas para resolver el problema de optimización aquí planteado. Aunque que cada una de ellas tiene diferentes variantes en función de los métodos y parámetros utilizados en cada algoritmo, solamente se comparan las mejores versiones

encontradas en el análisis anterior. Así, la tabla 4.12 compara la función de coste de las soluciones encontradas por cada uno de los algoritmos desarrollados: SGA, SGA-LS y MAGA. Además, La figura 4.27 muestra la evolución del mejor representante de cada uno de dichos algoritmos. Tal y como puede verse, el algoritmo MAGA alcanza los mejores resultados. Ello, es debido, tal y como se comentó en la sección anterior a que el modelo de evolución seguido por dicho algoritmo se asemeja más a la evolución natural que el modelo que siguen los AGs tradicionales tal como el SGA, incorporando además las ventajas del SGA-LS.

Tabla 4.12: Comparación entre las diferentes Metaheurísticas de Evolución desarrolladas.

Tiempo (hh:mm:ss)	SGA	SGA-LS	MAGA
00:00:00	(8.5) 394219	(1.9) 408477	(1.4) 382857
00:01:00	(1.0) 343315	(0.9) 327946	(0.4) 327848
00:02:00	(0.8) 330731	(0.6) 312736	(0.3) 309593
00:05:00	(0.4) 322242	(0.3) 296921	(0.1) 294248
00:10:00	(0.1) 319282	(0.3) 288830	(0.1) 287869
00:30:00	(0.1) 308250	(0.2) 286240	(0.1) 278637
00:60:00	302348	(0.1) 283228	(0.1) 273437

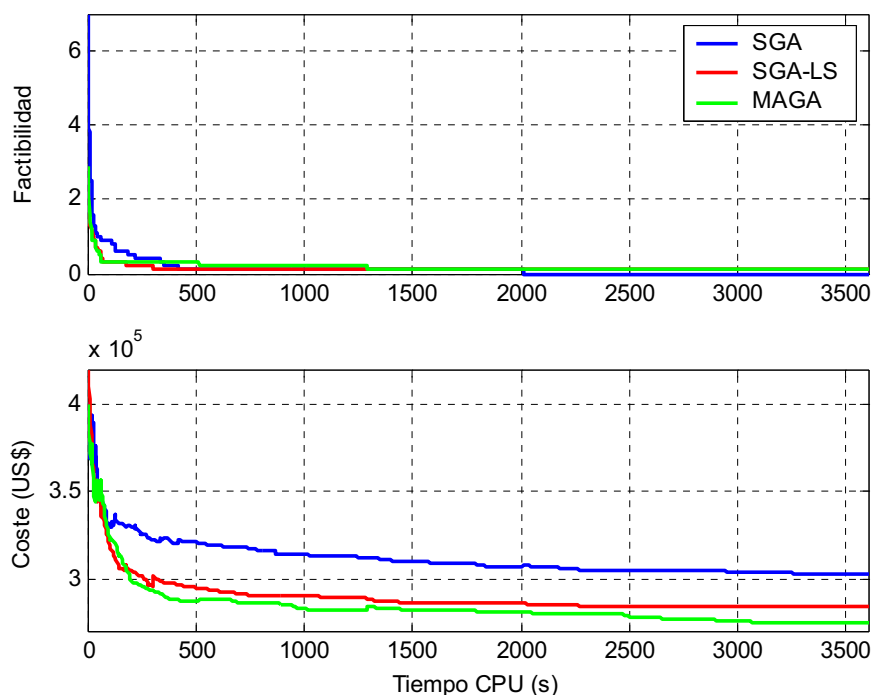


Figura 4.27: Comparación de las diferentes Metaheurísticas de Evolución desarrolladas.

4.4 Paralelización de los algoritmos desarrollados

Los algoritmos de optimización basados en Metaheurísticas se han mostrado como una técnica exitosa en muchas aplicaciones en diferentes áreas. Sin embargo, su utilización presenta algunos problemas. En algunos problemas, la evaluación de la función objetivo puede requerir mucho tiempo de cálculo, como es el caso en el que se requiera una simulación para su determinación, o la resolución de algún subproblema asociado. En otros problemas, el tamaño de la población (al utilizar metaheurísticas de evolución) debe ser suficientemente grande como para mantener la diversidad necesaria para encontrar una solución, por lo que el espacio en memoria requerido para almacenar la información de toda la población podría ser considerable.

El paralelismo en la evaluación de la función objetivo fue el primer intento de paralelizar los AGs mediante lo que se denominó AGs Paralelos maestro–esclavo. Este modelo utiliza una única población, y la evaluación de la función objetivo correspondiente a cada individuo es llevada a cabo en varios procesadores de forma simultánea. Además, los operadores de cruce y mutación son también ejecutados en paralelo. La naturaleza de los AGs no cambia al utilizar este tipo de paralelización ya que el operador de selección se ejecuta sobre toda la población de forma global en el procesador maestro. Este paralelismo puede ser muy útil cuando la evaluación de la función objetivo requiere mucho tiempo de cálculo.

Otro tipo de paralelismo es el implementado por los denominados AGs Distribuidos en donde múltiples poblaciones se mantienen en diferentes procesadores. Existen AGs Distribuidos de grano grueso y de grano fino. Los algoritmos de grano grueso utilizan pocas poblaciones de gran tamaño y, a su vez, se clasifican en dos categorías [NP99]:

- Aquellos en los que las diferentes subpoblaciones intercambian individuos cada cierto número de generaciones según el denominado *modelo de islas*.
- Aquellos en los que ciertas porciones de cada una de las poblaciones son compartidas con intercambio de material genético.

El modelo de islas es fácilmente implementable en una arquitectura multiprocesador, mientras que el modelo compartido es adecuado para arquitecturas con memoria compartida. Los algoritmos de grano fino operan sobre una población dividida en un gran número de subpoblaciones repartidas en varios procesadores. Una subpoblación podría incluso estar formada por un único individuo. Este modelo es adecuado para arquitecturas masivamente paralelas consistentes en un gran número de procesadores básicos conectados con una topología específica de alta velocidad.

En concreto aquí, se utiliza el modelo de islas para implementar la versión paralela de los algoritmos SMMC-SA y MAGA. Estos algoritmos han sido escogidos para su paralelización por ser los mejores representantes de las Metaheurísticas de Búsqueda y Evolución respectivamente. Se consideran además tres esquemas de interacción entre las poblaciones de cada procesador. En el primer esquema, denominado *maestro-esclavo*, el procesador con mejor promedio en la función objetivo es seleccionado como maestro y los demás como esclavos. Todos los esclavos mandan su mejor solución al maestro, y, a su vez, éste también manda su mejor solución a cada una de los esclavos. Una representación gráfica del modelo se muestra en la figura 4.28a. En el segundo esquema, denominado *en red*, todos los procesadores mandan su mejor solución a todos los demás. Una representación gráfica del modelo se muestra en la figura 4.28b. Finalmente, en el tercer esquema, denominado *en anillo*, cada procesador recibe la mejor solución encontrada entre sus dos vecinos. Una representación gráfica del modelo se muestra en la figura 4.28c.

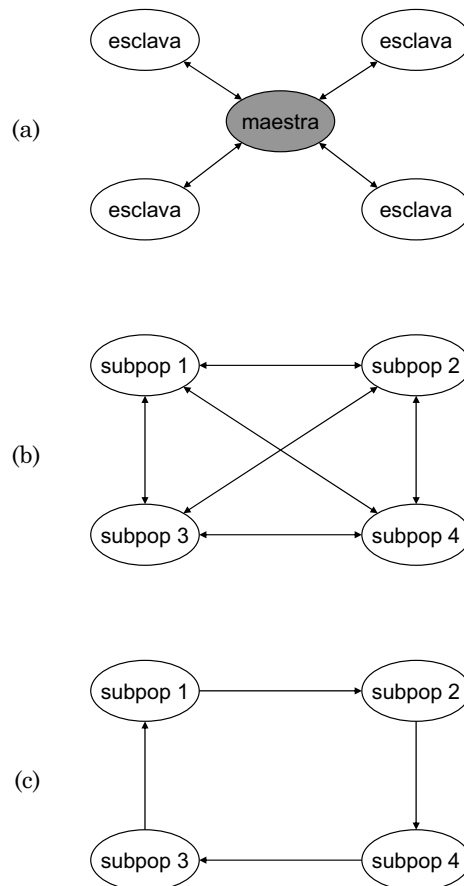


Figura 4.28: Esquemas de interacción entre procesadores.

4.4.1 Paralelización del algoritmo SMMC-SA

Tal y como se discutió en la sección 4.3.1, el algoritmo SMMC-SA es capaz de reducir exponencialmente la probabilidad de no encontrar una solución óptima mientras que el tiempo CPU tan solo aumenta de forma lineal con el número de SSMC-SA ejecutados de forma independiente. Por tanto, utilizando la computación paralela, el algoritmo SMMC-SA podría reducir exponencialmente la probabilidad de no encontrar una solución óptima sin incrementar el tiempo CPU del algoritmo SSMC-SA sin más que utilizar los procesadores que sean necesarios para ejecutar más cadenas de Markov en el mismo tiempo. Así, la paralelización suele realizarse para mejorar la calidad de la solución obtenida cuando se mantiene constante el tiempo CPU. Una buena introducción a los algoritmos de Enfriamiento Simulado paralelos con múltiples cadenas de Markov puede encontrarse en [Aze92a], [LL96] y [Mei98], donde estos últimos asumen una única cadena de Markov en cada procesador.

Supóngase un algoritmo SMMC-SA con S cadenas de Markov que utiliza t_s unidades de tiempo en ejecutar n iteraciones a lo largo de cada dirección de búsqueda. El valor de S se puede incrementar en varias unidades manteniendo t_s y n constantes utilizando la computación paralela para reducir exponencialmente la probabilidad de no encontrar una solución óptima. Esto se lleva a cabo mediante múltiples copias del algoritmo SMMC-SA ejecutándose en varios procesadores concurrentes. Sin embargo, en lugar de hacer esto, supóngase que las S cadenas de Markov se dividen en subgrupos de igual tamaño S_1, S_2, \dots, S_p distribuidos en P procesadores concurrentes. El tiempo CPU para la versión paralela del algoritmo SMMC-SA (PMMC-SA), t_p , será igual a t_s/P donde t_s es el tiempo CPU para el algoritmo SMMC-SA. Este tiempo puede ser ligeramente superior debido a la comunicación entre procesadores, siendo además dicho incremento función de la frecuencia de dicha comunicación. Dicho algoritmo se ha implementado en un único procesador con una filosofía orientada a objetos en C++ utilizando el compilador Borland C++ Builder 5.0, haciendo posible la interacción de los diferentes SMMC-SA en un único procesador. Aún así, se verá como las versiones paralelas obtienen mejores resultados que el algoritmo secuencial aún siendo ejecutadas durante el mismo tiempo.

En concreto, en la paralelización aquí propuesta para el algoritmo SMMC-SA desarrollado en la sección 4.3.6, se han distribuido las $S=15$ cadenas de Markov en $P=5$ procesadores, cada uno de ellos ejecutando un SMMC-SA con 3 cadenas de Markov. Se consideran además tres esquemas de interacción entre las cadenas de Markov de los P procesadores: maestro-esclavo (ME), en red (RED) y en anillo

(ANILLO). El algoritmo 4.16 muestra el pseudocódigo para la implementación del algoritmo PMMC-SA desarrollado. En dicho algoritmo el parámetro MI determina el esquema de interacción entre procesadores y la función $MIGRAR()$ implementa la migración cuya frecuencia está controlada mediante el parámetro R .

Algoritmo 4.16: Algoritmo PMMC-SA.

```

sol=PMMC-SA(S, To, N,  $\alpha$ , P, MI, R)
(1)  r=0
(2)  for p=1 to P
(3)    processor[p].POP(r)=INICIALIZAR(S)
(4)  end
(5)  while BEST(processor[p].POP(r))>tol do
(6)    for n=0 to (N-1)
(7)      for p=1 to P
(8)        for i=1 to S
(9)          processor[p].X'_{n,i}=GENERAR(processor[p].X_{n,i})
(10)         processor[p].X_{n+1,i}=Ecuación (4.6)
(11)        end
(12)      end
(13)    n=n+1
(14)  end
(15)  if mod(r, R)==0
(16)    MIGRAR(MI)
(17)  end
(18)  r=r+1
(19)  T_r= $\alpha$ *T_{r-1}
(20) end
(21) return BEST(processor[p].POP(r))

```

Como se ha dicho anteriormente se ha utilizado $S=15$ y $P=5$ por lo que cada procesador ejecuta tres cadenas de Markov en las que el cambio de temperatura tiene lugar cada $N=10^5$ iteraciones, descendiendo de forma lineal desde $T_0=10^4$ con un parámetro de enfriamiento $\alpha=0.950$. Por tanto, los únicos parámetros que faltan por fijar en el algoritmo PMMC-SA son la frecuencia (R) y el esquema de migración (MI). Para ello, se ha realizado un estudio ejecutando 4 instancias del algoritmo PMMC-SA

con un esquema de migración ME y variando la frecuencia de dicho migración. Los resultados obtenidos se muestran en la figura 4.29 encontrándose los mejores resultados para $R=10$. A continuación se han ejecutado otras 3 instancias utilizando el mejor valor de R encontrado ($R=10$) y utilizando diferentes esquemas de migración. Los resultados obtenidos se muestran en la figura 4.29 junto con la convergencia de los algoritmos SMMC-SA y PMMC-SA. Finalmente, en la tabla 4.13 se compara la función de coste de las soluciones encontradas por cada una de dichos algoritmos, siendo los mejores resultados los obtenidos mediante el algoritmo PMMC-SA-ME.

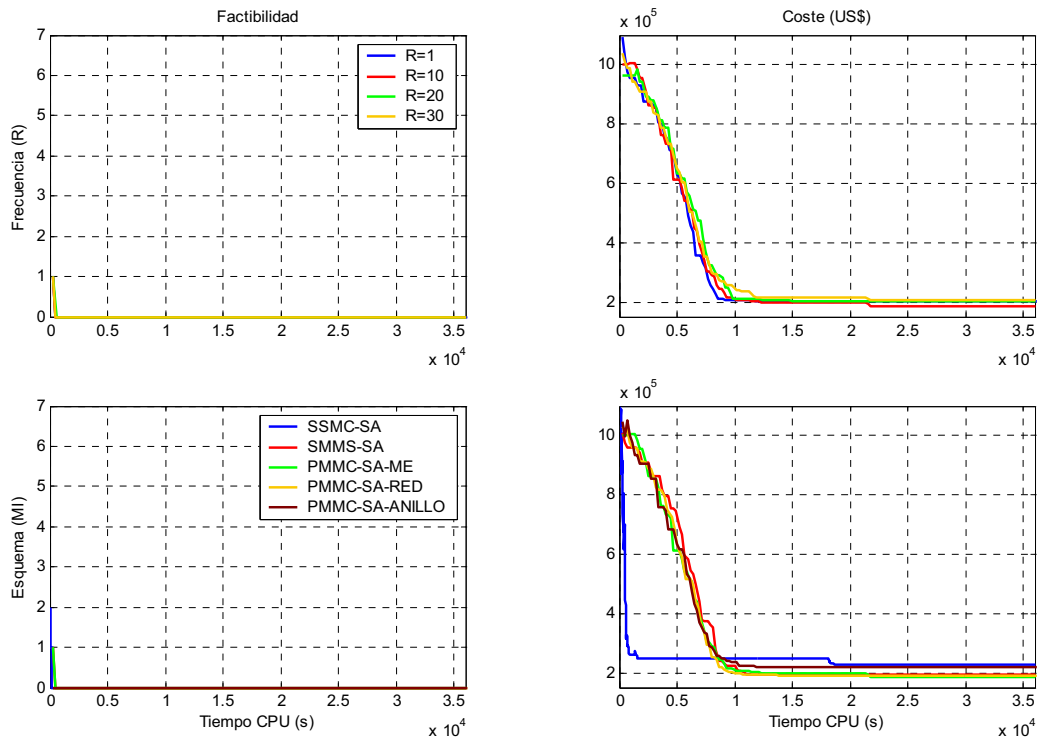


Figura 4.29: Determinación de los mejores parámetros del algoritmo PSA.

Tabla 4.13: Resultados obtenidos mediante el algoritmo PSA.

Tiempo (hh:mm:ss)	SMMC-SA		PMMC-SA		
	(2.0)	(1.0)	ME	RED	ANILLO
00:00:00	1097030	1033600	1003450	1066720	1115570
00:10:00	316070	960180	1006000	1018500	1050060
00:20:00	259590	960180	1006000	959970	936130
00:50:00	248150	863140	854180	825060	855980
01:40:00	248150	545800	514760	514710	519980
05:00:00	248150	193850	197850	191550	219950
10:00:00	228050	193850	187130	191550	219950

4.4.2 Paralelización del algoritmo MAGA

Tal y como se comentó en la sección 4.4 los AG Distribuidos son un tipo de AG paralelos en los que se mantiene una subpoblación en cada uno de los procesadores disponibles. Dichos algoritmos tienen la atractiva característica de que a menudo reducen el esfuerzo computacional requerido para resolver el problema cuando se los compara con los AGs Secuenciales, incluso en el caso de ser ejecutados en un único procesador [GW93]. Esta característica hace que, a diferencia de otros algoritmos de búsqueda, no se trate simplemente de versiones paralelas de los correspondientes algoritmos secuenciales. Así, representan una nueva clase de algoritmos en los que la búsqueda en el espacio de soluciones se lleva a cabo de una forma diferente [NP99]. La razón reside en las características más llamativas de dichos algoritmos recogidas en [AT00]:

- La búsqueda es descentralizada, permitiendo la especialización y haciendo que, por tanto, diferentes subpoblaciones evolucionan hacia diferentes soluciones.
- Se alcanzan mayores niveles de diversidad ya que muchas regiones de búsqueda son exploradas a la vez.
- Además implementa la explotación dentro de cada subpoblación mediante una búsqueda fina sobre las mejoras soluciones parciales.

La paralelización de las Metaheurísticas de Evolución aquí propuesta se basa en un AG Multiagente distribuido de grano grueso siguiendo el modelo de islas mostrado en la figura 4.28. Dicho algoritmo se denota por PMAGA por ser la versión paralela del algoritmo MAGA desarrollado en la sección anterior. El Algoritmo 4.17 muestra el pseudocódigo para la implementación del PMAGA diseñado. Al igual que en la paralelización del algoritmo SMMC-SA, el parámetro MI determina el esquema de interacción entre procesadores y la función `MIGRAR()` implementa la migración cuya frecuencia está controlada mediante el parámetro R . De nuevo, dicho algoritmo se ha implementado en un único procesador con una filosofía orientada a objetos en C++ utilizando el compilador Borland C++ Builder 5.0, haciendo posible la interacción de los diferentes SMMC-SA en un único procesador. Aún así, se verá como las versiones paralelas obtienen mejores resultados que el algoritmo secuencial aún siendo ejecutadas durante el mismo tiempo. Así, denotando por t_p el tiempo durante el que se ejecuta la versión paralela con P procesadores, y e efectos de comparar los resultados con los obtenidos mediante la versión no paralela, será necesario ejecutar dicha versión durante el tiempo $P \times t_p$ si la ejecución paralela se lleva a cabo mediante la implementación aquí utilizada con un único procesador.

Algoritmo 4.17: Algoritmo Genético Multiagente Paralelo (PMAGA).

```

sol=PMAGA(L, Po, Pc, Pm, Ng, P, MI, R)
(1)  t=0
(2)  for p=1 to P
(3)    processor[p].POP(t)=INICIALIZAR(L)
(4)    EVALUAR(processor[p].POP(t))
(5)    processor[p].best=BEST(processor[p].POP(t))
(6)  end
(7)  while BEST(processor [].POP(t))>tol do
(8)    for p=1 to P
(9)      processor[p].POP(t+1/3)=COMPETICION(processor[p].POP(t), Po)
(10)     processor[p].POP(t+2/3)=CRUCE(processor[p].POP(t+1/3), Pc)
(11)     processor[p].POP(t+1)=MUTACION(processor[p].POP(t+2/3), Pm)
(12)     processor[p].cbest=BEST(processor[p].POP(t+1))
(13)     processor[p].AUTOAPRENDIZAJE(processor[p].cbest, Ng)
(14)     if processor[p].cbest<processor[p].best
(15)       processor[p].best=processor[p].cbest
(16)     else
(17)       processor[p].cbest=processor[p].best
(18)     end
(19)   end
(20)   if mod(t, R)==0
(21)     MIGRAR(MI)
(22)   end
(23)   t=t+1
(24) end
(25) return BEST(processor[p].POP(t))

```

En concreto, se han utilizado $P=10$ procesadores en cada uno de los cuales se ejecuta un algoritmo MAGA con $L=20$ (malla con 400 agentes), $P_c=0.8$, $P_m=0.008$, $P_o=0.5$ y $N_g=10$. Por tanto, los únicos parámetros que faltan por fijar en el algoritmo PMAGA son la frecuencia (R) y el esquema de migración (MI). Para ello, se ha realizado un estudio ejecutando 4 instancias del algoritmo PMAGA con un esquema de migración ME y variando la frecuencia de dicha migración. Los resultados obtenidos se muestran en la parte superior de la figura 4.30 encontrándose los

mejores para $R=10$. A continuación se han ejecutado otras 3 instancias utilizando el mejor valor de R encontrado ($R=10$) y utilizando diferentes esquemas de migración. Los resultados obtenidos se muestran en la parte inferior de la figura 4.30 junto con la convergencia de los algoritmos MAGA y PAGA-SIN (PMAGA sin migración).

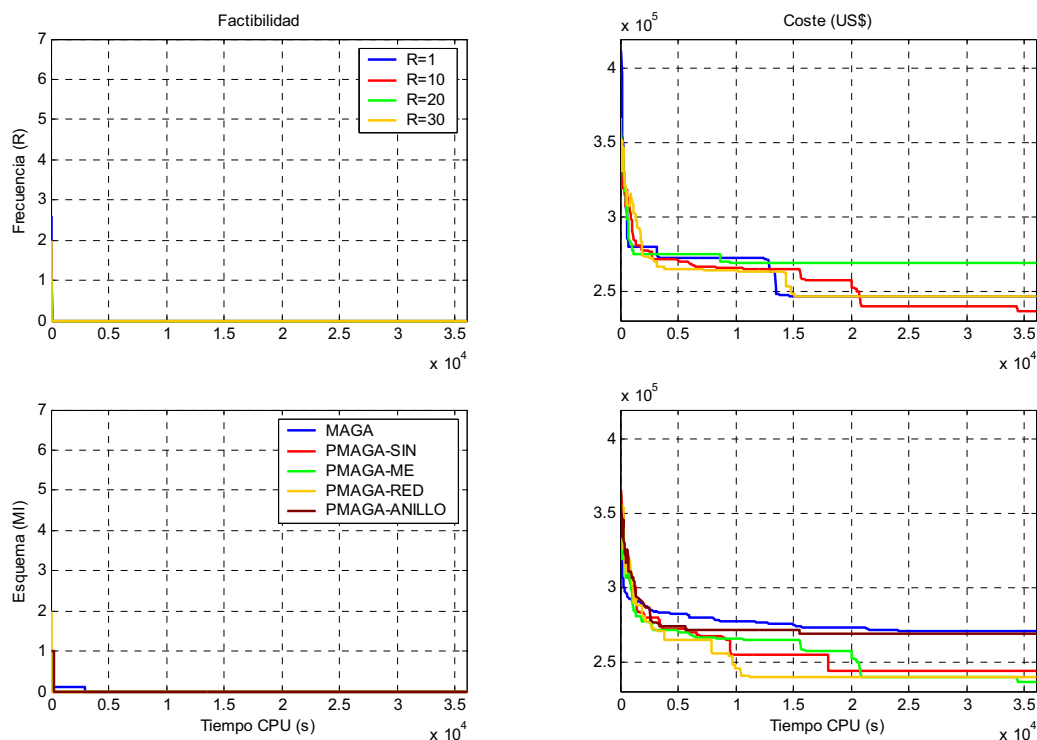


Figura 4.30: Determinación de los mejores parámetros del algoritmo PMAGA.

Finalmente, en la tabla 4.14 se compara la función de coste de las soluciones encontradas por cada uno de dichos algoritmos, siendo los mejores resultados los obtenidos mediante el algoritmo PMAGA-ME.

Tabla 4.14: Resultados obtenidos mediante el algoritmo PMAGA.

Tiempo (hh:mm:ss)	MAGA	PMAGA				
		SIN	ME	RED	ANILLO	
00:00:00	(0.7) 362311	(1.0) 423620	(1.0) 427860	(2.0) 381830	(1.0) 376790	
00:10:00	(0.1) 294358	350400	313230	327260	329150	
00:20:00	(0.1) 291371	307180	283980	294010	303970	
00:50:00	284117	284710	271720	271900	276200	
01:40:00	280211	272020	268740	264390	271020	
05:00:00	273179	243680	257250	239850	268990	
10:00:00	270303	243680	236350	239850	268990	

4.5 Metaheurísticas vs CPLEX

Todas las metaheurísticas de búsqueda presentadas en las secciones anteriores son combinaciones de métodos de mejora aplicados sobre las soluciones iniciales obtenidas mediante diferentes heurísticas de construcción. Se han descrito tres heurísticas de construcción: aleatoria (RND), basada en la relajación lineal de la formulación IP (RLP) y basada en la relajación cuadrática de la formulación IP (RQP). En cuanto a la generación de los vecindarios sobre los que buscar la solución mejora, se han descrito cinco métodos: cambio (Nc), intercambio (Ns), inserción (Ni), una combinación de los tres anteriores (COMB) y una mejora por probabilidades (PROB). Finalmente, tanto los métodos de construcción como los de mejora han sido utilizados en las diferentes versiones de las metaheurísticas de búsqueda desarrolladas: Búsquedas MS, VNS y Tabú, así como diferentes variantes del algoritmo de Enfriamiento Simulado (SA).

En cuanto a las metaheurísticas de evolución se han desarrollado tres versiones diferentes de los AGs. La primera de ellas es un AG Secuencial (SGA) para el que se han diseñado unos operadores específicos para implementar el cruce y la mutación. Una mejora del SGA consiste en introducir búsquedas locales sobre el mejor individuo de la población cada cierto número de generaciones. Con este propósito se ha utilizado el algoritmo VNS como algoritmo de búsqueda local dando lugar a la segunda versión de los AG desarrollada (SGA-LS). En tercer y último lugar se ha desarrollado un AG Multiagente (MAGA) utilizando un modelo de evolución que se asemeja más a la evolución natural que el modelo que siguen tanto el SGA como el SGA-LS (AGs tradicionales).

Finalmente se han implementado las versiones paralelas de los mejores representantes de las metaheurísticas de Búsqueda (SMMC-SA) y Evolución (MAGA). En ambos casos se ha hecho un estudio para determinar el mejor esquema de migración entre las diferentes poblaciones, así como de la frecuencia de dicha migración. Los mejores algoritmos encontrados fueron el PMMC-SA-ME (como metaheurística de búsqueda) y el PMAGA-ME (como metaheurística de evolución) con una frecuencia de 10 generaciones. Estos algoritmos han sido aplicados a la resolución del problema planteado en la sección 3.4.3 del *Capítulo* anterior. La figura 4.31 muestra la evolución de la mejor solución encontrada por dicho algoritmos en comparación con la encontrada por el resolutor comercial CPLEX a través de ILOG-OPL Studio 4.2 sobre un procesador Intel Xeon a 2.8GHz y 2GB de RAM (el mismo que el utilizando con las metaheurísticas). La tabla 4.15 muestra el valor de la función de coste de las soluciones encontradas por cada uno de dichos algoritmos. En ella, el símbolo * denota que se detuvo la ejecución.

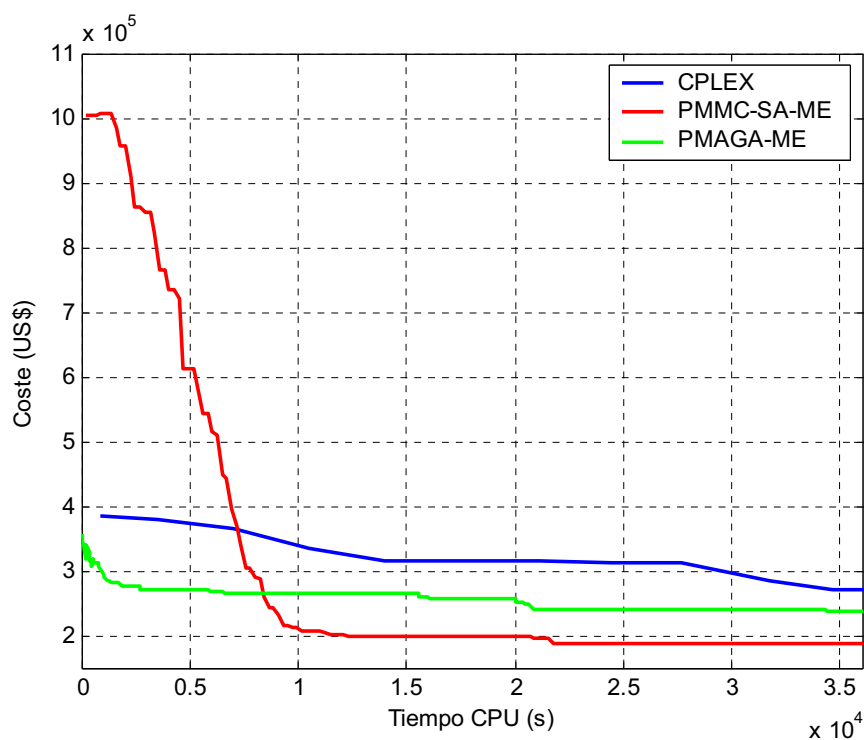


Figura 4.31: Comparación de las metaheurísticas de búsqueda con CPLEX.

Tabla 4.15: Comparación de las Metaheurísticas desarrolladas con CPLEX.

Tiempo (hh:mm:ss)	CPLEX		Metaheurísticas	
	Límite inf.	Objetivo	PMMC-SA-ME	PMAGA-ME
00:14:06	70461.8374	383540	1028878	305220
00:58:12	70461.8374	378540	812272	271720
01:56:33	83787.3624	366360	398526	266540
02:55:16	84301.9547	335170	209938	265210
03:53:06	85086.6826	316440	198030	265090
05:51:11	88235.8983	314510	197606	239850
06:47:42	88333.8148	312650	187130	239850
07:41:03	89413.9948	312150	187130	239850
08:49:24	89532.6895	285030	187130	239850
09:37:33	91623.6239	270770	187130	236350
12:22:26	91623.6239	269540	*	*
20:02:00	100543.7841	258760	*	*
48:00:00	100543.7841	258760	*	*

Tal y como puede verse, cualquiera de las metaheurísticas ofrece mejores resultados que CPLEX, siendo el mejor algoritmo a la hora de resolver el problema aquí planteado el PMMC-SA-ME. No obstante el algoritmo PMAGA-ME da mejores resultados que el PMMC-SA-ME para tiempos de cómputo inferiores a 2 horas. Así, si lo que se desea es obtener una solución relativamente buena en un tiempo de cómputo aceptable, el algoritmo PMAGA-ME sería una buena opción. Por el contrario, si se dispone de mayor tiempo de CPU para resolver el problema, el algoritmo PMMC-SA-ME ofrecerá mejores resultados que ningún otro de entre los aquí desarrollados.

Capítulo V

Modelado de sistemas de transporte de gas

El gas natural es transportado mediante presión a través de la red de gasoductos que forman el sistema de distribución de gas. Dicho sistema está formado fundamentalmente por los gasoductos a través de los cuales se transporta el gas mediante presión, y las estaciones de compresión instaladas para restablecer periódicamente las caídas de presión en ciertos puntos de la red. La dinámica del gas en el interior del gasoducto es estimulada desde el exterior a través de la válvula que inyecta el gas en la boca del mismo, de modo que una variación de presión o caudal en dicha válvula se traduce en una evolución del estado del gas a lo largo de todo el gasoducto hacia un nuevo estado de equilibrio. Dicha evolución, como todo sistema físico, viene descrita en términos de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. Este *Capítulo* se encarga de establecer tales ecuaciones. Tras aplicar ciertas propiedades conocidas de los fluidos se obtienen un par de modelos simplificados, proponiéndose los correspondientes esquemas para su integración numérica en un computador. Por otro lado, durante su transporte el gas pierde parte de su energía inicial debido a la fricción del mismo con las paredes internas del gasoducto. Esto se traduce en una pérdida de presión que debe ser compensada mediante las estaciones de compresión instaladas en la red. La parte final de este *Capítulo* se encarga del modelado matemático de tales estaciones de compresión a partir de los datos que se poseen sobre el funcionamiento de las mismas.

Los objetivos de este capítulo son:

- Modelar la dinámica de del flujo de gas en el interior de un gasoducto de sección circular constante inclinado y extraer unos modelos simplificados manejables.
- Desarrollar los esquemas numéricos que permitan la integración de tales modelos simplificados en un computador.
- Modelar el funcionamiento de las estaciones de compresión a partir de los datos experimentales que se poseen.

5.1 Ecuaciones del gas en un gasoducto

5.1.1 Ecuaciones de conservación

Un tratamiento riguroso de las ecuaciones que describen la dinámica del gas en el interior de un gasoducto requiere de la aplicación de los métodos usados en teoría de fluidos turbulentos. Sin embargo, esto es innecesariamente complicado, ya que tras ciertas aproximaciones que se justifican más adelante, se puede asumir que el flujo es laminar y unidimensional. En este caso, suponiendo un gasoducto recto y con sección circular constante, las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales que describen la dinámica de este flujo se obtienen sin más que aplicar las leyes de conservación de masa, momento y energía a un volumen de control infinitesimal tal y como el mostrado en la figura 5.1 [GF89].

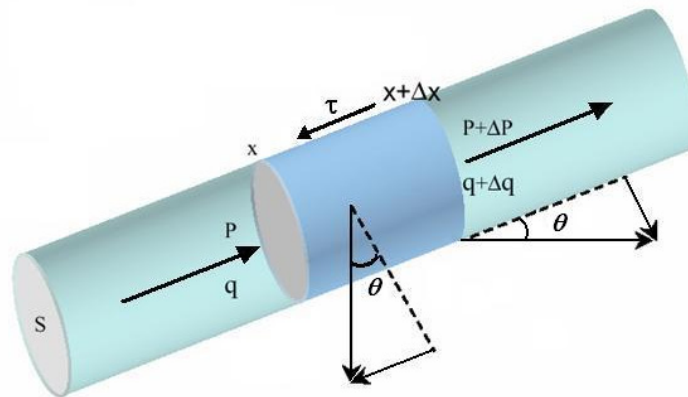


Figura 5.1: Volumen de control.

Sea S el área del gasoducto, D su diámetro, ρ la densidad del gas, v su velocidad, p la presión, T la temperatura del gas, e la energía interna específica, h la entalpía específica ($h=e+p/\rho$), τ la tensión tangencial en la pared del tubo y Ω el flujo de calor del gasoducto a tierra por unidad de longitud. Entonces, dado el volumen de control de la figura 5.1, las ecuaciones que rigen la dinámica de presión y caudal del gas en el interior del gasoducto se obtienen como se detalla a continuación.

Ecuación de continuidad

Aplicando conservación de masa al volumen de control de la figura 5.1, se obtiene la ecuación (5.1), que dividida por $S \cdot \Delta x$ y tras aplicar el límite cuando Δx tiende a cero, proporciona la ecuación de continuidad o conservación de la masa mostrada en la ecuación (5.2):

$$S\Delta x \frac{\partial \rho}{\partial t} = q_x - q_{x+\Delta x} \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) = 0 \quad (5.2)$$

Conservación del momento

Aplicando la conservación de momento al volumen de control de la figura 5.1 y procediendo de forma análoga al caso anterior, se obtiene la ecuación de conservación del momento:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v S) + \frac{\partial}{\partial x}(p S + \rho v^2 S) + |\tau| \pi D + \rho S g \sin \theta = 0 \quad (5.3)$$

Conservación de la energía

Finalmente, aplicando la conservación de la energía al volumen de control de la figura 5.1, y de nuevo dividiendo por $S \Delta x$ y aplicando el límite cuando Δx tiende a cero, se obtiene la ecuación de conservación de la energía:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\left(e + \frac{1}{2} v^2 \right) \rho S \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(h + \frac{1}{2} v^2 \right) \rho v S \right] - \Omega + \rho S g v \sin \theta = 0 \quad (5.4)$$

Ecuación de estado del gas

Considerando como incógnitas de estas ecuaciones las variables p , ρ , v y T (el valor de otras magnitudes es conocido o calculable a partir de éstas), se dispone de tres ecuaciones y cuatro incógnitas. Por tanto, se necesita otra ecuación para resolver el sistema. Esta es precisamente la ecuación de estado del gas mostrada en la ecuación (5.5), donde M es el peso molecular del gas y Z una compresibilidad variable correspondiente a un gas no ideal, y $R_g = R_u / M$.

$$p = \rho \cdot \frac{Z R_u T}{M} = \rho \cdot Z R_g T \quad (5.5)$$

5.1.2 Factor de fricción

En un desarrollo completo del flujo estacionario la fricción puede representarse mediante el factor de fricción de Fanning mostrado en la (5.6). Dicho factor f es una cantidad adimensional y en general es función del número de Reynolds, Re , y de la rugosidad del gasoducto, k . Para un flujo compresible de alta velocidad se observa

cierta influencia del número de Match (v/c) sobre f , pero este efecto es despreciable para la transmisión de gas en donde v/c suele ser del orden de 0.02.

$$f = \frac{|\tau|}{\frac{1}{2}\rho v^2} \quad (5.6)$$

$$f \equiv g\left(Re, \frac{k}{D}\right) \quad (5.7)$$

Si se tienen en cuenta con detalle ciertos aspectos teóricos junto con los datos experimentales de que se disponen para el factor de fricción en la transmisión de gas, algunos autores recomiendan estas otras alternativas, [Uhl65]:

$$\sqrt{\frac{1}{f_{SPL}}} = 4 \log\left(\frac{Re}{\sqrt{1/f_{SPL}}}\right) - 0.6 \quad (5.8)$$

$$\sqrt{\frac{1}{f_{PT}}} = F_f \sqrt{\frac{1}{f_{SPL}}} \quad (5.9)$$

$$\sqrt{\frac{1}{f_{FT}}} = 4 \log\left(\frac{3.7D}{k_e}\right) \quad (5.10)$$

En estas ecuaciones, el factor de arrastre, F_f , y la rugosidad efectiva, k_e , son parámetros ajustables que tienen en cuenta los efectos de recodos y estrechamientos en un gasoducto real. La transición de flujo parcialmente turbulento, ecuaciones (5.8) y (5.9), a fuertemente turbulento, ecuación (5.10), tiene lugar para un número de Reynolds crítico donde:

$$\sqrt{\frac{1}{f_{PT}}} = \sqrt{\frac{1}{f_{FT}}} \quad (5.11)$$

Otra famosa ecuación para el factor de fricción en la transmisión de gas es la fórmula de Panhandle mostrada en la ecuación (5.12). En ella, la eficiencia, E , es análoga al factor de arrastre de la ecuación (5.9), y el factor de fricción de la fórmula es muy similar al del flujo parcialmente turbulento de las ecuaciones (5.8) y (5.9). La ecuación (5.12) tiene la ventaja de que es explícita en $\sqrt{1/f}$, mientras que la ecuación (5.8) requiere iteración para ser resuelta.

$$\sqrt{\frac{1}{f}} = 6.78 Re^{0.073} E \quad (5.12)$$

El uso de un factor de fricción para representar la fricción en la pared está justificado teóricamente sólo para flujo estacionario, pero en la práctica se usa el mismo factor de fricción para flujo no estacionario. Es razonable esperar que esto sea válido para pequeñas perturbaciones entorno a la condición de flujo estacionario existiendo bastantes evidencias experimentales de ello, [BMS69]. Cuando se produce un cambio de flujo grande y rápido esta aproximación no es muy buena, sin embargo, se sigue aplicando. Actualmente se trabaja para establecer las limitaciones en el uso de los factores de fricción para flujo estacionario. Para flujo suave, una buena aproximación está dada por la ecuación (5.13).

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log \left(\frac{Re}{5.03 \cdot \log(Re) - 4.32} \right) \quad (5.13)$$

Esta es la denominada de Rumber, válida para valores del número de Reynolds entre 5×10^6 y 5×10^7 , [SRK69].

5.1.3 Conducción de calor

Para resolver las ecuaciones (5.2), (5.3), (5.4) y (5.5) es necesario conocer el valor del flujo de calor del gasoducto a tierra por unidad de longitud, Ω . Hay dos casos especialmente importantes:

- Flujo isotérmico ($T=\text{cte}$), donde la ecuación de la energía se hace redundante excepto para calcular el valor de Ω .
- Flujo adiabático ($\Omega=0$), que incluye el caso particular de flujo isentrópico.

Estos dos casos pueden ser considerados como dos extremos:

- El flujo isotérmico corresponde a pequeños cambios dinámicos en donde los cambios de temperatura dentro del gas son lo suficientemente lentos como para verse cancelados por la conducción de calor entre el gasoducto y la tierra que lo rodea.
- El flujo adiabático corresponde a rápidos cambios dinámicos en el gas donde los lentos efectos de conducción de calor pueden ser despreciados.

El flujo isentrópico sólo es posible cuando los efectos de fricción son despreciables, y no es válido normalmente en los problemas de transmisión de gas. En el caso mas general, donde $\Omega \neq 0$ y no hay equilibrio térmico entre el gasoducto y el suelo, son necesarias más ecuaciones para modelar el proceso de conducción de calor.

5.1.4 Validez de la aproximación unidimensional

Ya se ha mostrado que el modelo de flujo unidimensional permite obtener el comportamiento básico del flujo de gas en el gasoducto de una manera muy simple. Sin embargo, el flujo no puede ser unidimensional ya que los efectos de viscosidad producirán un perfil de velocidades a través del tubo con velocidad nula en la pared y velocidad máxima en el centro. Además el flujo es turbulento, por lo que hay movimientos aleatorios superpuestos al flujo promedio. Las diferencias con el modelo de flujo unidimensional serán tanto más acusadas cuantos más recodos y estrechamientos haya en el gasoducto.

Una aproximación mas rigurosa consistiría en aplicar el método de integración de ecuaciones tal y como se usa en teoría de flujos turbulentos. [War71] usa esta aproximación para flujo estacionario en gasoductos. Para ello define un conjunto apropiado de propiedades para el flujo promedio en una sección transversal, S , y expresa las ecuaciones integrales en términos de esas variables. Las ecuaciones del flujo promedio son similares a las del modelo unidimensional para flujo estacionario, excepto por la existencia de unos coeficientes variables multiplicando a algunos términos de dichas ecuaciones. Para el flujo turbulento [War71] argumenta que esos coeficientes son siempre muy próximos a uno, por lo que pueden ser sustituidos por la unidad resultando así las ecuaciones del flujo turbulento idénticas a las ecuaciones unidimensionales para flujo estacionario. Para ilustrar esta idea, considérese el coeficiente α definido por [War71] y mostrado en la ecuación (5.14), donde los valores medios de la velocidad y la densidad que aparecen en ella se muestran en las ecuaciones (5.15) y (5.16) respectivamente.

$$\alpha = \frac{1}{S} \iint_S \frac{\rho v^2}{\rho v} dS \tag{5.14}$$

$$\bar{v} = \frac{1}{S} \iint_S v dS \tag{5.15}$$

$$\bar{\rho} = \frac{\iint_S \rho v dS}{\iint_S v dS} \tag{5.16}$$

Ahora, el término $\partial_x (\rho v^2 S)$ en la ecuación (5.3) se sustituye por el mostrado en la ecuación (5.17) que tiene en cuenta la utilización del coeficiente α . Como puede verse a partir de la ecuación (5.14) ambos términos son equivalentes si $\alpha=1$. [War71] encontró

valores de α entre 1 y 1.02 para flujo turbulento. Esto lo corroboró [BMS69], que obtuvo los valores mostrados en la tabla 5.1 para flujo estacionario rigurosamente tratado en un gasoducto. La transmisión de gas se encuentra generalmente en la región $Re \approx 10^7$, por lo que la aproximación $\alpha = 1$ es muy buena.

$$\alpha \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho v^2} \right) S + \frac{1}{\rho v^2} S \frac{\partial \alpha}{\partial x} \tag{5.17}$$

Tabla 5.1: Número de Reynolds.

Re	α
Flujo laminar	4/3
2500	1.113
10^4	1.049
10^5	1.020
10^6	1.012
10^7	1.008
∞	1.000

En las regiones cercanas a recodos y estrechamientos habrá mayores diferencias con respecto a la unidad aunque estarán muy localizadas. En el flujo no estacionario se pueden además esperar mayores discrepancias respecto a la aproximación de flujo unidimensional sobre todo cuando hay cambios grandes y rápidos en las condiciones de operación.

5.1.5 Formulación en flujo de masa

Normalmente, la demanda de consumo de gas suele expresarse en términos de flujo de masa, por lo que es más conveniente reemplazar la velocidad v en las ecuaciones (5.2) y (5.3) por el flujo de masa, q , definido mediante la ecuación (5.18):

$$q = \rho v S = \rho Q \tag{5.18}$$

Asumiendo un flujo isotérmico (aproximación más común) las ecuaciones (5.2) y (5.3) pueden expresarse en función del factor de fricción y del flujo de masa, para a continuación obtener con ayuda de las ecuaciones (5.6) y (5.18) el sistema (5.19):

$$\begin{aligned} \text{Masa :} & \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{S} \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \\ \text{Momento :} & \quad \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(S p + \frac{q^2}{S \rho} \right) + \frac{2 f q |q|}{D S \rho} + \rho S g \sin \theta = 0 \end{aligned} \tag{5.19}$$

Aquí puede verse como el término de fricción contiene la expresión $q|q|$ en vez de q^2 , lo que asegura que la fuerza de fricción se opone siempre al movimiento de gas. La presión p se puede relacionar con la densidad de dos formas diferentes como se detalla a continuación:

Relación 1: A partir de la ecuación de estado del gas, ecuación (5.5), puede verse que la velocidad del sonido isotérmica en el gas está dada por la ecuación (5.20), por tanto, la relación entre la presión y la densidad viene dada por la ecuación (5.21).

$$c^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_T = ZRT \quad (5.20)$$

$$p = c^2 \rho \quad (5.21)$$

Relación 2: Si se considera que se trata de un flujo adiabático, se verifica la relación mostrada en la ecuación (5.22), donde γ (siempre mayor que 1) es el cociente entre los calores específicos a presión y volumen constante mostrado en la ecuación (5.23). A partir de la ecuación (5.22), se deduce fácilmente la ecuación (5.24) donde $p_o=1bar$ y $\rho_o=0.78kg/m^3$ son respectivamente la presión y densidad en condiciones normales.

$$pV^\gamma = cte \quad (5.22)$$

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} \quad (5.23)$$

$$p = p_o \left(\frac{\rho}{\rho_o} \right)^\gamma \quad (5.24)$$

5.2 Modelos simplificados

5.2.1 Simplificación de las ecuaciones

La suposición del flujo isotérmico ya se introdujo en la sección 5.1.3 como una importante simplificación de las ecuaciones (5.2)–(5.4) para efectos dinámicos lentos. Aun así, se deben resolver todavía un par de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales no lineales (conservación de la masa y del momento). Si se desprecia el término de fricción, se obtienen las ecuaciones de la dinámica clásica para gas no viscoso en la cual las ondas se propagan a través del gas a la velocidad del sonido sin ningún amortiguamiento. Si en su lugar se desprecian los términos de inercia, se

obtiene un movimiento deslizando descrito por ecuaciones en derivadas parciales hiperbólicas relacionadas con la conducción de calor y la difusión, desapareciendo por tanto el fenómeno de la propagación ondulatoria. El flujo en un gasoducto real es una mezcla de estos dos extremos, aún así, a efectos de hacer la integración del modelo más sencilla, es posible despreciar ciertos términos de las ecuaciones. Para decidir qué términos despreciar es necesario estimar la magnitud de cada uno de ellos para valores típicos de las variables involucradas en el proceso. Como ejemplo, considérese un gasoducto diseñado para la transmisión de gas a alta presión en donde las variaciones dinámicas son causadas por lentas fluctuaciones en la demanda. Valores típicos para las variables del proceso en estas condiciones pueden ser los siguientes:

$$\begin{aligned}x &= 10^5 \text{ m} \\D &= 1 \text{ m} \\t &= 3600 \text{ s} \\f &= 0.002 \\p &= 70 \text{ bar} \\\rho &= 50 \text{ Kg/m}^3 \\v &= 10 \text{ m/s}\end{aligned}$$

Con estos valores, la magnitud estimada para los términos de la ecuación del momento es:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(\rho v S) &\approx 0,1 \\\frac{\partial}{\partial x}(p S) &\approx 50 \\\frac{\partial}{\partial x}(\rho v^2 S) &\approx 0,04 \\f \frac{\rho v^2 \pi D}{2} &\approx 15 \\\rho S g \sin \theta &\approx 385 \sin \theta\end{aligned}$$

En estas condiciones es razonable despreciar los términos de inercia $\partial_t(\rho v S)$ y $\partial_x(\rho v^2 S)$, ya que estos contribuyen menos del 1% sobre el término del factor de fricción. Esta es la aproximación de movimiento deslizando comentada antes.

Existen ciertas circunstancias en las que se pueden tener perturbaciones más rápidas. Por ejemplo una válvula que se abre, un compresor que se deja de funcionar o un cambio repentino en la demanda. Bajo estas condiciones los valores de los términos de inercia en la región de la perturbación son significativos, y el movimiento deslizando no es una aproximación satisfactoria en dicha región aun siendo todavía

una aproximación razonable para el comportamiento general del sistema entero. En estos casos, es difícil decidir qué términos despreciar, y en general esto depende de la importancia que se le quiera dar a las perturbaciones más rápidas. La mayoría de los especialistas desprecian el término $\partial_x(\rho v^2 S)$ pero conservan $\partial_t(\rho v S)$, aunque en algunos casos la decisión viene determinada por la conveniencia de esta aproximación al aplicar un determinado método para la integración del sistema de EDPs. [Wei78] investigó la forma mas adecuada de aproximación mediante el estudio de la respuesta en frecuencia de un gasoducto típico. Concluyó que el término $\partial_x(\rho v^2 S)$ puede ser despreciado pero el término $\partial_t(\rho v S)$ debe ser conservado si las perturbaciones con período menor que 8 minutos son importantes. Un fuerte argumento para conservar ambos términos de inercia fue dado por Rachford y Dupont en sus publicaciones presentando ejemplos típicos de cuándo la inercia es importante [RD74].

5.2.2 Modelo A

Se puede hacer una primera simplificación de las ecuaciones despreciando el término de inercia en (5.19). En este caso, y con ayuda de la relación (5.21), la dinámica del flujo a través de un gasoducto inclinado puede representarse por el siguiente sistema de 2 EDPs:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} &= -\frac{c^2}{S} \frac{\partial q}{\partial x} \\ \frac{\partial q}{\partial t} &= -S \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{2fc^2 q^2}{DS} - \frac{Sg \sin \theta}{c^2} p \end{aligned} \quad (5.25)$$

Finalmente, teniendo en cuenta que $q = \rho v S = cte = \rho Q = \rho_n Q_n$, el sistema de ecuaciones (5.25) adopta la forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} &= -\frac{c^2 \rho_n}{S} \frac{\partial Q_n}{\partial x} \\ \frac{\partial Q_n}{\partial t} &= -\frac{S}{\rho_n} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{2fc^2 \rho_n Q_n^2}{DS} - \frac{Sg \sin \theta}{\rho_n c^2} p \end{aligned} \quad (5.26)$$

5.2.3 Modelo B

Partiendo de la hipótesis de que las condiciones de contorno varían lentamente, o que la capacidad del gasoducto es relativamente grande, los términos $\partial_t(\rho v S)$ y $\partial_x(\rho v^2 S)$ pueden ser eliminados de la ecuación del momento (5.19). En este caso, y con ayuda de la relación (5.21), la dinámica del flujo a través de un gasoducto inclinado puede representarse por el siguiente sistema de 2 EDPs:

$$\begin{aligned}\frac{\partial p}{\partial t} &= -\frac{c^2}{S} \frac{\partial q}{\partial x} \\ \frac{\partial p}{\partial x} &= -\frac{2fc^2q^2}{DS^2p} - \frac{g \sin \theta}{c^2} p\end{aligned}\quad (5.27)$$

Teniendo en cuenta que $q = \rho v S = cte = \rho Q = \rho_n Q_n$, el sistema de ecuaciones (5.27) adopta la forma:

$$\begin{aligned}\frac{\partial p}{\partial t} &= -\frac{c^2 \rho_n}{S} \frac{\partial Q_n}{\partial x} \\ \frac{\partial p}{\partial x} &= -\frac{2fc^2 \rho_n^2 Q_n^2}{DS^2p} - \frac{g \sin \theta}{c^2} p\end{aligned}\quad (5.28)$$

Si ahora se tiene en cuenta que $\partial_x p^2 = 2p \cdot \partial_x p$, el sistema de ecuaciones (5.28) se convierte en el mostrado en la ecuación (5.29). Dicho sistema fue utilizado por Larson y Wismer en [LW71] para la simulación del flujo transitorio.

$$\begin{aligned}\frac{\partial p}{\partial t} &= -\frac{c^2 \rho_n}{S} \frac{\partial Q_n}{\partial x} \\ \frac{\partial p^2}{\partial x} &= -\frac{4fc^2 \rho_n^2 Q_n^2}{DS^2} - \frac{2g \sin \theta}{c^2} p^2\end{aligned}\quad (5.29)$$

Diferenciando con respecto a x la segunda de las ecuaciones del sistema (5.29) obtenemos la ecuación (5.30), y utilizando la primera para eliminar el término $\partial_x Q_n$ de la (5.30) se obtiene la (5.31).

$$\frac{\partial^2 p^2}{\partial x^2} = -\frac{8fc^2 \rho_n^2 Q_n}{DS^2} \frac{\partial Q_n}{\partial x} - \frac{2g \sin \theta}{c^2} \frac{\partial p^2}{\partial x}\quad (5.30)$$

$$\frac{\partial^2 p^2}{\partial x^2} = \frac{8fc^2 \rho_n^2 Q_n}{DS^2} \frac{S}{c^2 \rho_n} \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{2g \sin \theta}{c^2} \frac{\partial p^2}{\partial x}\quad (5.31)$$

Si ahora se tiene en cuenta que $\rho Q = \rho_n Q_n$, la ecuación (5.21) y $\partial_t p^2 = 2p \cdot \partial_t p$, este sistema de ecuaciones se convierte en:

$$\frac{\partial^2 p^2}{\partial x^2} = \frac{4fQ}{DSc^2} \frac{\partial p^2}{\partial t} - \frac{2g \sin \theta}{c^2} \frac{\partial p^2}{\partial x}\quad (5.32)$$

Finalmente, teniendo en cuenta que $S = \pi R^2 = \pi \cdot (D^2/4)$, y pasando a la derecha todas las derivadas espaciales resulta la ecuación (5.33), correspondiente al modelo B, en donde los coeficientes α y β vienen dados por las ecuaciones (5.34) y (5.35) respectivamente.

$$\frac{\partial^2 p^2}{\partial x^2} + \beta \frac{\partial p^2}{\partial x} = \alpha \frac{\partial p^2}{\partial t} \quad (5.33)$$

$$\alpha = \frac{16fQ}{D^3 c^2 \pi} \quad (5.34)$$

$$\beta = \frac{2g \sin \theta}{c^2} \quad (5.35)$$

Este es un modelo parabólico no lineal en el que:

- Si se asume que α es constante (cierto siempre que las variaciones de flujo a través del gasoducto son lentas), se obtiene un modelo lineal con respecto al cuadrado de la presión.
- Si se asume que $Q(x,t)$ está promediado sobre toda la longitud del gasoducto en cada intervalo de tiempo, Δt , se obtiene una EDP de 2° orden parabólica lineal con respecto al cuadrado de la presión en cada Δt . Este modelo es el adoptado en [Ayl80] y [Osi82] pero sin utilizar el término correspondiente a la inclinación del gasoducto consecuencia de diferentes cotas a la entrada y salida del mismo.

5.3 Esquemas numéricos para el modelo A

5.3.1 Método de las curvas características

Dicho método consiste en esencia en encontrar las direcciones o líneas en el plano (x,y) a lo largo de las cuales el sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales se reduce a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias. En concreto, considérese la forma general de un sistema cuasilineal que forman las ecuaciones (A.4) y (A.5) del *Apéndice A*. La ecuación característica de dicho sistema, (A.12), puede reescribirse mediante la ecuación (5.36) con la ayuda de las constantes a, b, c y γ definidas por las ecuaciones (5.37) y (5.38).

$$a\gamma^2 - b\gamma + c = 0 \quad (5.36)$$

$$\begin{aligned} a &= a_1 c_2 - a_2 c_1 \\ b &= a_1 d_2 - a_2 d_1 + b_1 c_2 - b_2 c_1 \\ c &= b_1 d_2 - b_2 d_1 \end{aligned} \quad (5.37)$$

$$\gamma = \frac{dy}{dx} \quad (5.38)$$

La ecuación (5.36) tiene dos soluciones reales diferentes, por lo que en el punto (x,y) tiene dos direcciones características diferentes:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \gamma_+(x, y, u, v) \\ \frac{dy}{dx} &= \gamma_-(x, y, u, v) \end{aligned} \tag{5.39}$$

Dichas ecuaciones forman dos ecuaciones diferenciales ordinarias separadas de primer orden si u y v son solución de las ecuaciones (A2.4) y (A2.5). Las ecuaciones (5.39) determinan un par de familias uniparamétricas de curvas características C_+ y C_- en el plano xy al que pertenece dicha solución. El problema se simplifica si γ_+ y γ_- son funciones sólo de x e y . En este caso, sustituyendo las ecuaciones (5.39) en la (A2.11), se obtienen las ecuaciones (5.40) con las que eliminar los coeficientes λ de la ecuación (A2.9) para obtener las ecuaciones (5.41), cuyos coeficientes f , g , h y k se muestran en las ecuaciones (5.42).

$$\begin{aligned} -\frac{\lambda_1}{\lambda_2} &= \frac{a_2\gamma_+ - b_2}{a_1\gamma_+ - b_1} \\ -\frac{\lambda_1}{\lambda_2} &= \frac{a_2\gamma_- - b_2}{a_1\gamma_- - b_1} \end{aligned} \tag{5.40}$$

$$\begin{aligned} fdu + (a\gamma_+ - g)dv + (k\gamma_+ - h)dx &= 0 \\ fdu + (a\gamma_- - g)dv + (k\gamma_- - h)dx &= 0 \end{aligned} \tag{5.41}$$

$$\begin{aligned} f &= a_1b_2 - a_2b_1 & g &= b_1c_2 - b_2c_1 \\ h &= b_1e_2 - b_2e_1 & k &= a_1e_2 - a_2e_1 \end{aligned} \tag{5.42}$$

Finalmente, combinando las ecuaciones (5.39) y (5.41) se obtiene el sistema de cuatro ecuaciones características mostrado en la ecuación (5.43). Cada solución del sistema original, ecuaciones (A2.4) y (A2.5), satisface el sistema de ecuaciones (5.43) y el recíproco también es cierto.

$$\left. \begin{aligned} dy - \gamma_+ dx &= 0 \\ fdu + (a\gamma_+ - g)dv + (k\gamma_+ - h)dx &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ a lo largo de } C_+ \tag{5.43}$$

$$\left. \begin{aligned} dy - \gamma_- dx &= 0 \\ fdu + (a\gamma_- - g)dv + (k\gamma_- - h)dx &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ a lo largo de } C_-$$

Existen varias formas de aproximar las ecuaciones (5.43). La aproximación por diferencias finitas, conocida como aproximación lineal, puede expresarse mediante la ecuación (5.44). Sin embargo, existen problemas, como procesos con dinámica rápida,

en los que se hace necesaria la utilización de una aproximación de mayor orden. Una aproximación por diferencias finitas de segundo orden puede expresarse mediante la ecuación (5.45).

$$\int_{y_1}^{y_2} f(y)dy \cong f(y_1) \cdot (y_2 - y_1) \tag{5.44}$$

$$\int_{y_1}^{y_2} f(y)dy \cong 0.5 \cdot [f(y_1) + f(y_2)] \cdot (y_2 - y_1) \tag{5.45}$$

Sea D el punto de intersección entre las dos curvas características C_+ y C_- mostradas en la figura 5.2a. Supóngase que se conoce el valor de las variables x , y , u y v en los puntos A y B y se desea conocer el valor de los mismos en el punto D .

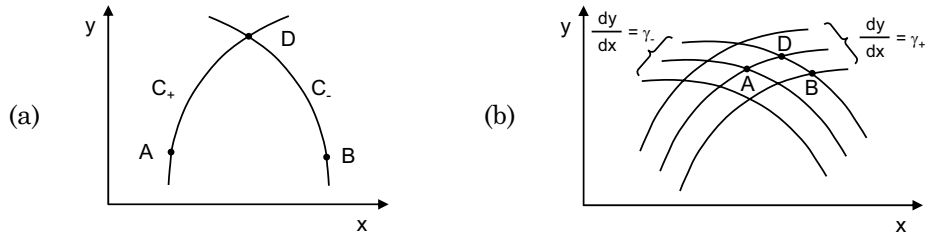


Figura 5.2: Curvas características.

Aplicando la ecuación (5.44) sobre el sistema de ecuaciones (5.43) se obtienen las ecuaciones (5.46). Dado que se conocen los valores de γ_+ , γ_- , f , g , k y h en los puntos A y B , resolviendo simultáneamente las ecuaciones 1 y 3 del sistema (5.46) se obtienen los valores de x_D y y_D . Ahora, se pueden sustituir estos valores en las ecuaciones 2 y 4 para obtener u_D y v_D .

$$\begin{aligned} y_D - y_A - (\gamma_+)_A (x_D - x_A) &= 0 \\ f_A (u_D - u_A) + (\alpha\gamma_+ - g)_A (v_D - v_A) + (k\gamma_+ - h)_A (x_D - x_A) &= 0 \\ y_D - y_B - (\gamma_-)_B (x_D - x_B) &= 0 \\ f_B (u_D - u_B) + (\alpha\gamma_- - g)_B (v_D - v_B) + (k\gamma_- - h)_B (x_D - x_B) &= 0 \end{aligned} \tag{5.46}$$

Utilizando la ecuación (5.45) en lugar de la (5.44), puede obtenerse un sistema análogo al (5.46). Dicho sistema se muestra en las ecuaciones (5.47) y se resuelve de forma iterativa. Para ello, se puede utilizar una red de curvas características como la mostrada en la figura 5.2b. Dicha red es particularmente simple en el caso de que γ_+ y γ_- dependan sólo de x e y . En este caso, para cada par de puntos A y B sobre dicha red de curvas características, las ecuaciones (5.46) son un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas. Una vez resueltas, proporcionan directamente los valores de x_D ,

y_D , u_D y v_D que pueden utilizarse como punto de partida del proceso iterativo necesario para resolver las ecuaciones (5.47).

$$\begin{aligned}
 y_D - y_A + 0.5[(\gamma_+)_D + (\gamma_-)_A](x_D - x_A) &= 0 \\
 0.5(f_A + f_D)(u_D - u_A) + 0.5[(a\gamma_+ - g)_A + (a\gamma_+ - g)_D](v_D - v_A) \\
 + 0.5[(k\gamma_+ - h)_A + (k\gamma_+ - h)_D](x_D - x_A) &= 0
 \end{aligned} \tag{5.47}$$

$$\begin{aligned}
 y_D - y_A + 0.5[(\gamma_+)_D + (\gamma_-)_A](x_D - x_A) &= 0 \\
 0.5(f_B + f_D)(u_D - u_A) + 0.5[(a\gamma_- - g)_B + (a\gamma_- - g)_D](v_D - v_B) \\
 + 0.5[(k\gamma_- - h)_B + (k\gamma_- - h)_D](x_D - x_B) &= 0
 \end{aligned}$$

5.3.2 Aplicación sobre el modelo A

Supóngase que el flujo de gas en estado no estacionario a lo largo de un gasoducto está descrito por el sistema mostrado en la ecuación (5.26). Dicho sistema puede escribirse de la forma mostrada en las ecuaciones (5.48) donde los coeficientes α vienen dados por la ecuación (5.49).

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial p}{\partial t} + \alpha_1 \frac{\partial Q_n}{\partial x} &= 0 \\
 \frac{\partial Q_n}{\partial t} + \alpha_2 \frac{\partial p}{\partial x} + \alpha_3 \frac{Q_n^2}{p} + \alpha_4 p &= 0
 \end{aligned} \tag{5.48}$$

$$\alpha_1 = \frac{c^2 \rho_n}{S} \quad , \quad \alpha_2 = \frac{S}{\rho_n} \quad , \quad \alpha_3 = \frac{2fc^2 \rho_n}{DS} \quad , \quad \alpha_4 = \frac{Sg \sin \theta}{\rho_n c^2} \tag{5.49}$$

Comparando dicho sistema con el mostrado en las ecuaciones (A2.4) y (A2.5), se obtienen los coeficientes de la ecuación (5.50). Entonces, la ecuación (5.36) toma la forma mostrada en la (5.51) ó (5.52) donde c es la velocidad del sonido en el gas.

$$\begin{aligned}
 \alpha_1 = 0 \quad b_1 = 1 \quad c_1 = \alpha_1 \quad d_1 = 0 \quad e_1 = 0 \\
 \alpha_2 = \alpha_1 \quad b_2 = 0 \quad c_2 = 0 \quad d_2 = 1 \quad e_2 = \alpha_3 \frac{Q_n^2}{p} + \alpha_4 p
 \end{aligned} \tag{5.50}$$

$$-\alpha_1 \alpha_2 \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = 1 \tag{5.51}$$

$$\frac{dx}{dt} = +c \quad y \quad \frac{dx}{dt} = -c \tag{5.52}$$

Por otro lado, los coeficientes determinados por la ecuación (5.42), toman la forma mostrada en la ecuación (5.53), a partir de los cuales se obtienen las cuatro ecuaciones características mostradas en la ecuación (5.54).

$$f = -\alpha_2 \quad g = 0 \quad h = \alpha_3 \frac{Q_n^2}{p} + \alpha_4 p \quad k = 0 \quad (5.53)$$

$$\left. \begin{aligned} dx - cdt &= 0 \\ -\alpha_2 dp - \alpha_1 \alpha_2 \frac{1}{c} dQ_n - \left(\alpha_3 \frac{Q_n^2}{p} + \alpha_4 p \right) dx &= 0 \end{aligned} \right\} C_+ \quad (5.54)$$

$$\left. \begin{aligned} dx + cdt &= 0 \\ -\alpha_2 dp + \alpha_1 \alpha_2 \frac{1}{c} dQ_n - \left(\alpha_3 \frac{Q_n^2}{p} + \alpha_4 p \right) dx &= 0 \end{aligned} \right\} C_-$$

Este sistema de ecuaciones puede integrarse sobre una red de características como la mostrada en la figura 5.3 en el rango $0 \leq t \leq t_{max}$, $0 \leq x \leq L$. Además, suponiendo una aproximación lineal, las pendientes de las características satisfacen la ecuación (5.55).

$$\pm c \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1 \quad (5.55)$$

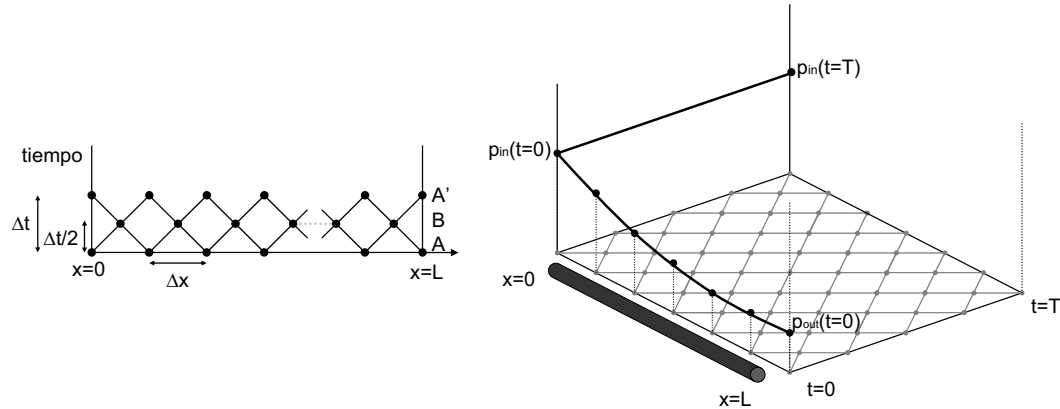


Figura 5.3: Red de curvas características.

Por otro lado, las ecuaciones 2 y 4 de (5.54) pueden escribirse de la forma

$$C_- : \quad dp - \frac{c\rho_n}{S} dQ_n + \left(\frac{2f}{D} \left(\frac{c\rho_n}{S} \right)^2 \frac{Q_n^2}{p} + \frac{g \sin \theta}{c^2} \right) dx = 0 \quad (5.56)$$

$$C_+ : \quad dp + \frac{c\rho_n}{S} dQ_n + \left(\frac{2f}{D} \left(\frac{c\rho_n}{S} \right)^2 \frac{Q_n^2}{p} + \frac{g \sin \theta}{c^2} \right) dx = 0 \quad (5.57)$$

Definiendo los coeficientes mostrados en la ecuación (5.58) y llamando p_A a la presión en la capa A, p_B a la presión en la capa B, Q_{nA} al caudal en la capa A y Q_{nB} al caudal en la capa B, se obtienen las ecuaciones aproximadas (5.59) donde $i=0,1,\dots,I-1$.

$$\alpha_5 = \frac{c\rho_n}{S}$$

$$\alpha_6 = \frac{2f}{D} \left(\frac{c\rho_n}{S} \right)^2 dx \quad \text{con } dx = \frac{\Delta x}{2} \quad (5.58)$$

$$\alpha_7 = \frac{g \sin \theta}{c^2} dx$$

$$C_- : p_{i,B} - p_{i+1,A} - \alpha_5 (Q_{ni,B} - Q_{ni+1,A}) - 0.5\alpha_6 \left(\frac{Q_{ni,B}^2}{p_{i,B}} + \frac{Q_{ni+1,A}^2}{p_{i+1,A}} \right) - 0.5\alpha_7 (p_{i,B} + p_{i+1,A}) = 0 \quad (5.59)$$

$$C_+ : p_{i,B} - p_{i,A} + \alpha_5 (Q_{ni,B} - Q_{ni,A}) + 0.5\alpha_6 \left(\frac{Q_{ni,B}^2}{p_{i,B}} + \frac{Q_{ni,A}^2}{p_{i,A}} \right) + 0.5\alpha_7 (p_{i,B} + p_{i,A}) = 0 \quad (5.60)$$

Sumando las ecuaciones (5.59) y (5.60), se obtiene la ecuación (5.61), con la que puede calcularse p_{iB} , y posteriormente $Q_{ni,B}$ mediante las ecuaciones (5.59) ó (5.60).

$$p_{i,B} = 0.5(p_{i,A} + p_{i+1,A}) + 0.5\alpha_5 (Q_{ni,A} - Q_{ni+1,A}) + 0.25\alpha_6 \left(\frac{Q_{ni+1,A}^2}{p_{i+1,A}} - \frac{Q_{ni,A}^2}{p_{i,A}} \right) + 0.25\alpha_7 (p_{i+1,A} - p_{i,A}) \quad (5.61)$$

Ahora, procediendo de forma análoga a con las ecuaciones (5.59) y (5.60), las ecuaciones (5.56) y (5.57) se pueden reescribir de la forma mostrada en las (5.62) y (5.63) respectivamente para los niveles B y A', para posteriormente sumarlas y obtener la ecuación (5.64) con la que calcular $p_{A'}$ para $i=1,2,\dots,I-1$. Una vez hecho esto, el caudal en la capa A, $Q_{ni,A'}$, puede calcularse a partir de las ecuaciones (5.62) ó (5.63).

$$C_- : p_{i,A'} - p_{i,B} - \alpha_5 (Q_{ni,A'} - Q_{ni,B}) - 0.5\alpha_6 \left(\frac{Q_{ni,A'}^2}{p_{i,A'}} + \frac{Q_{ni,B}^2}{p_{i,B}} \right) - 0.5\alpha_7 (p_{i,A'} + p_{i,B}) = 0 \quad (5.62)$$

$$C_+ : p_{i,A'} - p_{i-1,B} + \alpha_5 (Q_{ni,A'} - Q_{ni-1,B}) + 0.5\alpha_6 \left(\frac{Q_{ni,A'}^2}{p_{i,A'}} + \frac{Q_{ni-1,B}^2}{p_{i-1,B}} \right) + 0.5\alpha_7 (p_{i,A'} + p_{i-1,B}) = 0 \quad (5.63)$$

$$p_{A',j} = 0.5(p_{i,B} + p_{i-1,B}) - 0.5\alpha_5(Q_{ni,B} - Q_{ni-1,B}) - 0.25\alpha_6\left(\frac{Q_{ni-1,B}^2}{p_{i-1,B}} - \frac{Q_{ni,B}^2}{p_{i,B}}\right) - 0.25\alpha_7(p_{i-1,B} - p_{i,B}) \quad (5.64)$$

Finalmente, la presión o el caudal, dependiendo de las condiciones de contorno, en la capa A' se encuentran a partir de las relaciones (5.65) ó (5.66).

$$C_- : p_{0,A'} - p_{0,B} - \alpha_5(Q_{n0,A'} - Q_{n0,B}) - 0.5\alpha_6\left(\frac{Q_{n0,A'}^2}{p_{0,A'}} + \frac{Q_{n0,B}^2}{p_{0,B}}\right) - 0.5\alpha_7(p_{0,A'} + p_{0,B}) = 0 \quad (5.65)$$

$$C_+ : p_{I,A'} - p_{I-1,B} + \alpha_5(Q_{nI,A'} - Q_{nI-1,B}) + 0.5\alpha_6\left(\frac{Q_{nI,A'}^2}{p_{I,A'}} + \frac{Q_{nI-1,B}^2}{p_{I-1,B}}\right) + 0.5\alpha_7(p_{I,A'} + p_{I-1,B}) = 0 \quad (5.66)$$

La figura 5.4 muestra un diagrama de flujo del algoritmo final junto con un esquema que ilustra el proceso de cálculo de la presión y el caudal del gas sobre las curvas características. Para que dicho esquema numérico sea consistente es necesario que Δx y Δt estén relacionados mediante la expresión (5.55).

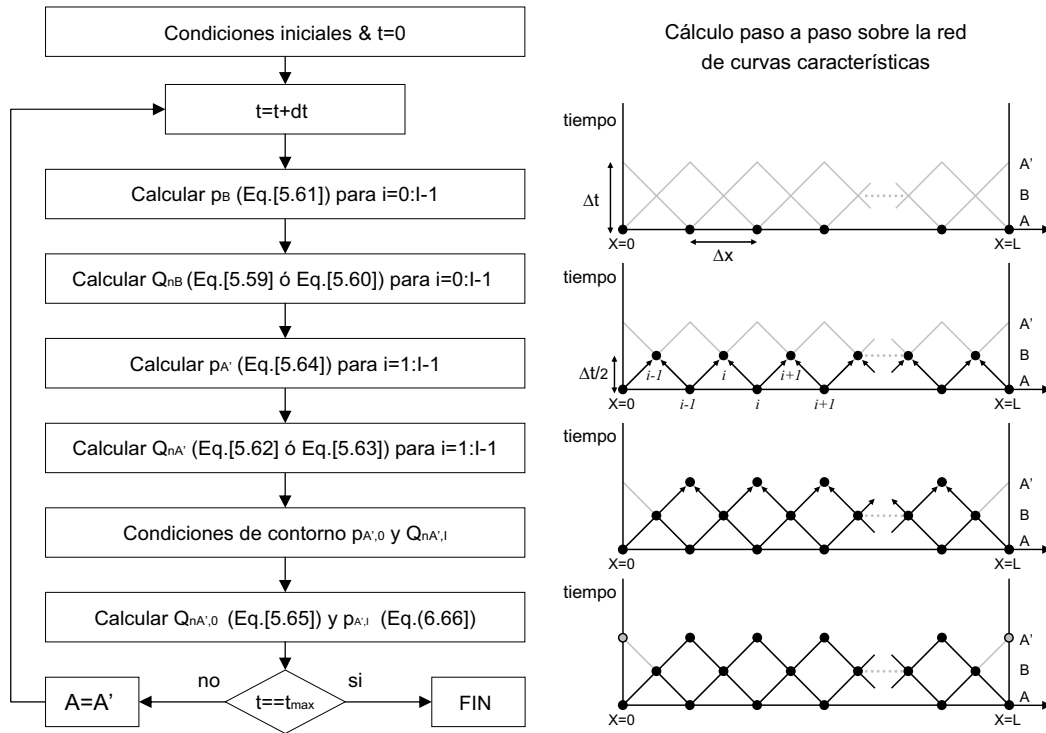


Figura 5.4: Ejecución del método de las características.

5.4 Esquemas numéricos para el modelo B

5.4.1 Método de Crank–Nicolson

Supóngase que una determinada variable g (presión, caudal, velocidad, etc...) satisface la EDP parabólica mostrada en la (5.67). En ella, se pueden sustituir cada una de las derivadas por sus aproximaciones en diferencias finitas.

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \beta \frac{\partial g}{\partial x} = \alpha \frac{\partial g}{\partial t} \quad (5.67)$$

Para la derivada temporal se puede utilizar la diferencia avanzada en el punto (i,n) mostrada en la ecuación (A.25) del Apéndice A. Haciendo esto se obtiene la ecuación (5.68).

$$\left(\frac{\partial g}{\partial t} \right)_{i,n} = \frac{g_{i,n+1} - g_{i,n}}{\Delta t} \quad (5.68)$$

Para la derivada espacial, ha de tenerse en cuenta que una diferencia avanzada en el punto (i,n) puede verse como una diferencia centrada en el punto $(i,n+1/2)$. Dicha diferencia centrada puede verse a su vez como una media de las diferencias centradas en $(i,n+1)$ y (i,n) obtenidas mediante la ecuación (A.30) para la derivada segunda y mediante la ecuación (A.28) para la derivada primera, obteniendo las ecuaciones (5.69) y (5.70) respectivamente.

$$\left(\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \right)_{i,n} = \frac{1}{2} \left(\frac{g_{i-1,n} - 2g_{i,n} + g_{i+1,n}}{\Delta x^2} + \frac{g_{i-1,n+1} - 2g_{i,n+1} + g_{i+1,n+1}}{\Delta x^2} \right) \quad (5.69)$$

$$\left(\frac{\partial g}{\partial x} \right)_{i,n} = \frac{1}{2} \left(\frac{g_{i+1,n} - g_{i-1,n}}{2\Delta x} + \frac{g_{i+1,n+1} - g_{i-1,n+1}}{2\Delta x} \right) \quad (5.70)$$

5.4.2 Aplicación sobre el modelo B

Ahora, se puede aplicar el método de Crank–Nicolson sobre el modelo del gas mostrado en la ecuación (5.33). Dicho modelo tiene la misma forma que la ecuación (5.67) pero con el cambio $u=p^2$. Sustituyendo las ecuaciones (5.68), (5.69) y (5.70) en la (5.67) y utilizando los coeficientes mostrados en las ecuaciones (5.72) y (5.73), se obtiene la ecuación del método para $i=1,2,\dots,I-1$:

$$\begin{aligned} (a-b) \cdot g_{i-1,n+1} + (-2a-2) \cdot g_{i,n+1} + (a+b) \cdot g_{i+1,n+1} = \\ (-a+b) \cdot g_{i-1,n} + (2a-2) \cdot g_{i,n} + (-a-b) \cdot g_{i+1,n} \end{aligned} \quad (5.71)$$

$$a = \frac{\Delta t}{\alpha \Delta x^2} \tag{5.72}$$

$$b = \frac{\beta \Delta t}{2\alpha \Delta x} \tag{5.73}$$

Dicha ecuación puede utilizarse para el cálculo del valor de la variable g sobre cada uno de los puntos de la malla mostrada en la figura 5.5.

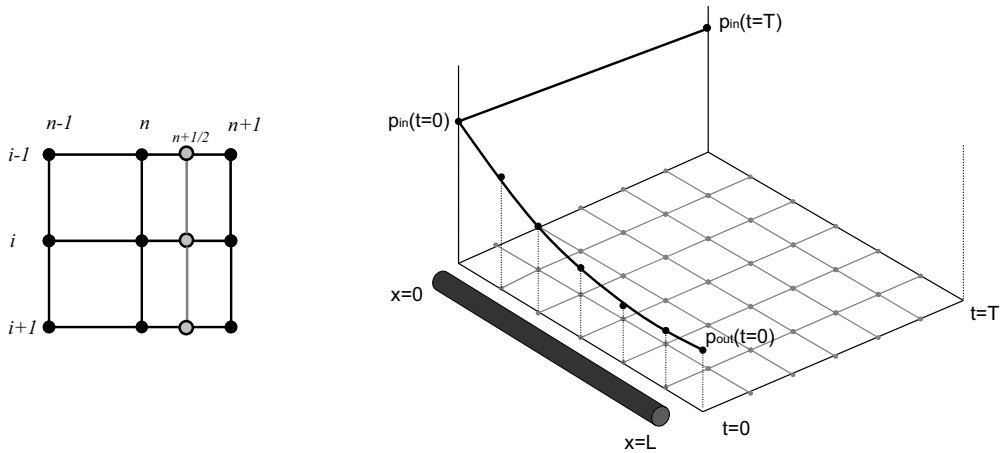


Figura 5.5: Esquema numérico para el método de Crank–Nicolson.

La ecuación (5.71) corresponde a la ecuación de un método numérico implícito. Esto, puede verse más fácilmente si se escribe la ecuación del método en forma matricial. Para ello, considérese el vector V_n mostrado en la ecuación (5.74) cuyas componentes son el de la variable g en cada uno de los puntos de la discretización espacial para $t=n \times \Delta t$. Con él, la ecuación del método puede escribirse según se muestra en (5.75) con ayuda de las matrices A , B y C definidas en las ecuaciones (5.76), (5.77) y (5.78) respectivamente.

$$V_n = (g_{1,n} \ g_{2,n} \ g_{3,n} \ \dots \ g_{I-3,n} \ g_{I-2,n} \ g_{I-1,n})^T \tag{5.74}$$

$$A \cdot V_{n+1} = B \cdot V_n + C \tag{5.75}$$

$$A = \begin{pmatrix} -2a-2 & a+b & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a-b & -2a-2 & a+b & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a-b & -2a-2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -2a-2 & a+b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a-b & -2a-2 & a+b \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a-b & -2a-2 \end{pmatrix} \tag{5.76}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2a-2 & -a-b & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -a+b & 2a-2 & -a-b & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a+b & 2a-2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2a-2 & -a-b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a+b & 2a-2 & -a-b \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a+b & 2a-2 \end{pmatrix} \quad (5.77)$$

$$C = \begin{pmatrix} -(a-b) \cdot (g_{0,n} + g_{0,n+1}) \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ -(a+b) \cdot (g_{1,n} + g_{1,n+1}) \end{pmatrix} \quad (5.78)$$

Para cada n , el término de la derecha es conocido, por lo que el resto de los valores a medida que avanza el tiempo pueden calcularse resolviendo el sistema mostrado en la ecuación (5.79). Dicho sistema es tridiagonal, por lo que puede resolverse fácilmente con poco coste computacional mediante el método de Crout basado en la factorización LU. Para ello, basta con descomponer la matriz tridiagonal A mostrada en la ecuación (5.80) como producto de las matrices L y U mostradas en las ecuaciones (5.81) y (5.82), en donde las relaciones entre sus coeficientes vienen dadas por las ecuaciones (5.83).

$$D_n = B \cdot V_n + C \quad \Rightarrow \quad A \cdot V_{n+1} = D_n \quad (5.79)$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{N-2,N-2} & a_{N-2,N-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{N-1,N-2} & a_{N-1,N-1} & a_{N-1,N} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{N,N-1} & a_{NN} \end{pmatrix} \quad (5.80)$$

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & l_{32} & l_{33} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & l_{N-2,N-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & l_{N-1,N-2} & l_{N-1,N-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & l_{N,N-1} & l_{NN} \end{pmatrix} \quad (5.81)$$

$$U = \begin{pmatrix} 1 & u_{12} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & u_{23} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & u_{N-2,N-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & u_{N-1,N} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.82)$$

- a) $a_{11} = l_{11}$
 - b) $a_{i,i-1} = l_{i,i-1} \quad ; \quad i = 2, \dots, n$
 - c) $a_{i,i} = l_{i,i-1} \cdot u_{i-1,i} + l_{i,i} \quad ; \quad i = 2, \dots, n$
 - d) $a_{i,i+1} = l_{i,i} \cdot u_{i,i+1} \quad ; \quad i = 1, \dots, n-1$
- (5.83)

Con dicha factorización LU para la matriz A , el sistema de ecuaciones mostrado en la ecuación (5.75) puede resolverse mediante sustitución hacia delante y sustitución hacia atrás. Una vez tenemos descompuesta la matriz A en el producto de L y U , el sistema de la ecuación (5.75) se puede resolver en cada etapa temporal mediante el siguiente algoritmo:

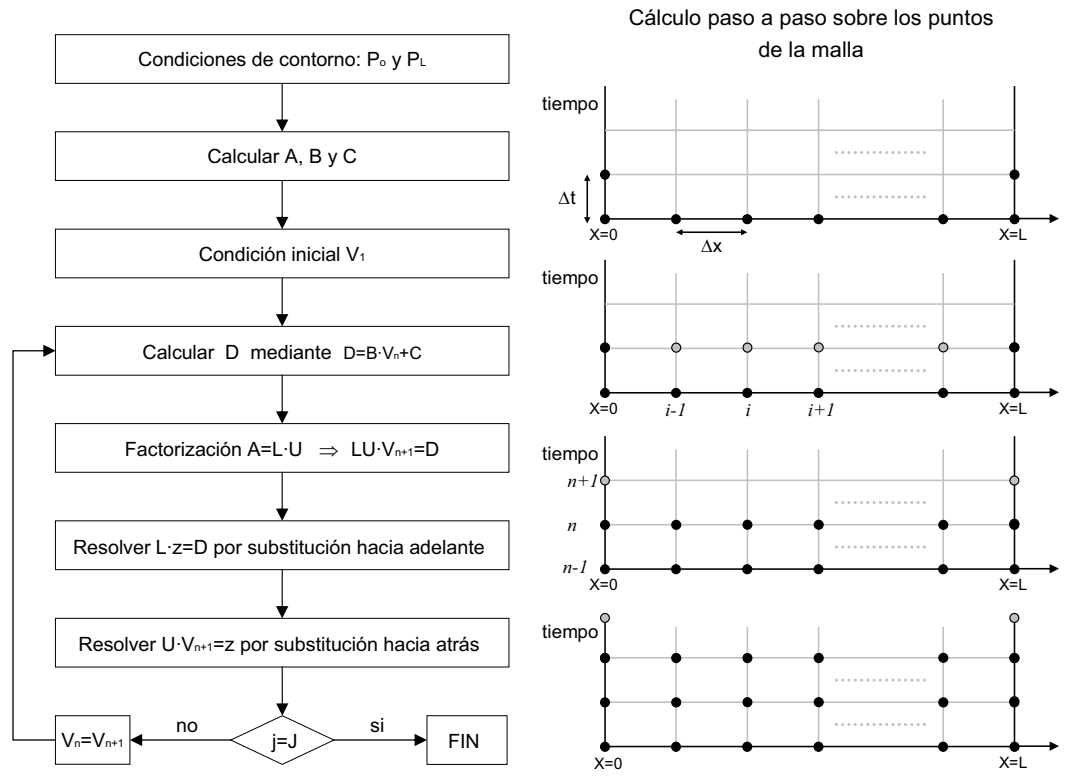


Figura 5.6: Algoritmo para el método de Crank–Nicolson.

5.4.3 Consistencia y estabilidad

La característica más importante del método de Crank–Nicolson es que es consistente y estable, y por tanto, convergente. Un método es consistente si al realizar la sustitución $g_{i,n} \rightarrow g(x_i, t_n)$ en la representación totalmente exacta de la ecuación diferencial que rige la dinámica del proceso, ésta, se sigue cumpliendo. Al hacer dicha sustitución surge un término residual denominado error de truncamiento local $R_{i,n}$. La condición para que un método sea consistente es que dicho error tienda a cero al disminuir el paso en la discretización. Si se aplica esto sobre la ecuación (5.71), se obtiene el error de truncamiento mostrado en la ecuación (5.84), por lo que $R_{i,n} \rightarrow 0$ cuando $\Delta t \rightarrow 0$ y $\Delta x \rightarrow 0$, siendo así el método consistente.

$$R_{i,n} = f(g_{xxxx}) \cdot \Delta x^2 + O(\Delta t^2) + O(\Delta x^3) \quad (5.84)$$

Un método es estable si perturbando ligeramente las condiciones iniciales, la solución queda ligeramente modificada. La cuestión de la estabilidad en los procedimientos numéricos para resolver ecuaciones diferenciales parciales surge en casi todos los problemas que usan el tiempo como variable independiente. Esto es natural, dado que puede ser de interés conocer la solución en intervalos largos de tiempo. Un posible método de análisis de la estabilidad de un método numérico es el conocido como método de Von Neumann. Dicho método se basa en la búsqueda de soluciones en forma de modos de Fourier como los mostrados en la ecuación (5.85), que sustituidas en la ecuación del método dan lugar a soluciones del tipo mostrado en la ecuación (5.86), donde $\xi(k)$ es el factor de amplificación. Si ahora se perturba ligeramente la solución $A^n(k) \rightarrow A^n(k) + \delta A^n(k)$, puede verse que la perturbación debe satisfacer la condición mostrada en la ecuación (5.87). Entonces, para que el método sea estable, se debe satisfacer la condición mostrada en la ecuación (5.88).

$$g_{i,n} = A^n(k) \cdot e^{jkx_i} \quad (5.85)$$

$$A^{n+1}(k) = A^n(k) \cdot \xi(k) \quad (5.86)$$

$$\delta A^{n+1}(k) = \delta A^n(k) \cdot \xi(k) \quad (5.87)$$

$$|\xi(k)| \leq 1 \quad \forall k \quad (5.88)$$

Aplicando el método de Von Neumann a la ecuación (5.71) se obtiene el factor de amplificación mostrado en la ecuación (5.89). A partir de dicha expresión puede demostrarse que el método numérico es incondicionalmente estable.

$$\xi(k) = -\frac{2a \cos(\Delta x) + 2bj \sin(\Delta x) - 2a - 2}{2a \cos(\Delta x) + 2bj \sin(\Delta x) - 2a + 2} \quad (5.89)$$

5.5 Otros esquemas numéricos

5.5.1 Método de Lax–Wendrof

Considérese un punto i de la rejilla resultante al discretizar el gasoducto espacialmente. Denótese por g_i el valor de una determinada variable (presión, caudal, velocidad, etc...) en dicho punto. Dicha variable será función del tiempo, y además, su valor en $t=0$ sobre todos los puntos del gasoducto está determinado por las condiciones iniciales. Ahora, para calcular un nuevo valor de g_i en $t+\Delta t$ puede utilizarse el desarrollo en serie de Taylor de $g_i(t+\Delta t)$ mostrado en la ecuación (5.90), ó (5.91) con diferente notación.

$$g_i(t + \Delta t) = g_i(t) + \left(\frac{\partial g}{\partial t}\right)_i \cdot \Delta t + \left(\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}\right)_i \cdot \frac{(\Delta t)^2}{2} + \dots \quad (5.90)$$

$$g_{i,n+1} = g_{i,n} + \left(\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{i,n} \cdot \Delta t + \left(\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}\right)_{i,n} \cdot \frac{(\Delta t)^2}{2} + \dots \quad (5.91)$$

Por tanto, es posible calcular los valores de g_i en el siguiente instante si se conocen las cantidades mostradas en la ecuación (5.92), que pueden obtenerse del sistema de EDPs que gobiernan la física del proceso.

$$\left(\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{i,n} \quad \text{y} \quad \left(\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}\right)_{i,n} \quad (5.92)$$

Utilizando las ecuaciones del modelo definido por el sistema de EDPs (5.19), se obtienen las siguientes derivadas temporales de primer orden para las variables ρ y q .

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} &= -\frac{1}{S} \frac{\partial q}{\partial x} \\ \frac{\partial q}{\partial t} &= -\left(Sa^2 - \frac{q^2}{S\rho^2}\right) \frac{\partial \rho}{\partial x} - \frac{2q}{S\rho} \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{2f}{DS} \frac{q^2}{\rho} + \rho Sg \sin \theta \end{aligned} \quad (5.93)$$

Una vez obtenidas las derivadas temporales de primer orden, tan solo hacen falta las de segundo para completar el proceso. Para obtener la correspondiente a ρ se comienza por derivar la primera de las ecuaciones mostradas en (5.93), obteniendo:

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right) = -\frac{1}{S} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial q}{\partial x} \right) = -\frac{1}{S} \frac{\partial^2 q}{\partial t \partial x} = -\frac{1}{S} \frac{\partial^2 q}{\partial x \partial t} = -\frac{1}{S} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial q}{\partial t} \right) \quad (5.94)$$

Así, derivando con respecto a x la segunda de las ecuaciones (5.93), se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = & \left(\alpha^2 - \frac{2fq^2}{DS^2\rho^2} + g \sin \theta \right) \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{4fq}{DS^2\rho} \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{4q}{S^2\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{2q^2}{S^2\rho^3} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \right)^2 + \\ & \frac{2}{S^2\rho} \left(\frac{\partial q}{\partial x} \right)^2 + \left(\alpha^2 - \frac{q^2}{S^2\rho^2} \right) \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + \frac{2}{S^2\rho} \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} \end{aligned} \quad (5.95)$$

En cuanto a la derivada temporal de segundo orden para q , derivando de nuevo la segunda de las ecuaciones (5.93) pero ahora con respecto al tiempo, se obtiene la ecuación (5.96). En dicha ecuación aparecen derivadas segundas de ρ y q con respecto a t y x que pueden ser transformadas en derivadas espaciales con ayuda de la primera ecuación del sistema (5.93) según se muestra en las ecuaciones (5.97):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = & - \left(\alpha^2 S - \frac{2q}{S\rho^2} \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{2q^2}{S\rho^3} \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) \frac{\partial \rho}{\partial x} - \left(\alpha^2 S - \frac{q^2}{S\rho^2} \right) \left[\frac{\partial^2 \rho}{\partial t \partial x} \right] - \\ & \left(\frac{2}{S\rho} \frac{\partial q}{\partial t} - \frac{2q}{S\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{2q}{S\rho} \left[\frac{\partial^2 q}{\partial t \partial x} \right] - \frac{4fq}{DS\rho} \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{2fq^2}{DS\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial t} - Sg \sin \theta \frac{\partial \rho}{\partial t} \end{aligned} \quad (5.96)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 q}{\partial t \partial x} = & \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial q}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(-S \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) = -S \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 \rho}{\partial t \partial x} = & \frac{\partial^2 \rho}{\partial x \partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{1}{S} \frac{\partial q}{\partial x} \right) = -\frac{1}{S} \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} \end{aligned} \quad (5.97)$$

Una vez insertadas todas las derivadas temporales en el desarrollo de Taylor para ρ y q , ya se está en disposición de implementar el esquema numérico en una computadora para proceder a la simulación de las ecuaciones a partir de unas determinadas condiciones iniciales y de contorno. Para ello, puede utilizarse un esquema de diferencias centradas para aproximar las derivadas espaciales que aparecen en el desarrollo.

5.5.2 Método de Mac-Cormak

Se trata de un método cercanamente relacionado con el de Lax-Wendroff pero más fácil de aplicar. También se basa en el desarrollo de Taylor en el tiempo de g_i pero truncado hasta primer orden de precisión tal y como se muestra en la ecuación (5.98), donde $(\partial g / \partial t)_{ave}$ es un promedio de los valores obtenidos en las etapas t y $t + \Delta t$ calculado de tal forma que la ecuación (5.98) pase a tener un segundo orden de precisión. Para ello, se utiliza una filosofía predictor-corrector.

$$\mathbf{g}_{i,n+1} = \mathbf{g}_{i,n} + \left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} \right)_{ave} \cdot \Delta t \quad (5.98)$$

Etapa predictora

A partir de la primera ecuación del sistema (5.93) se obtiene la ecuación (5.99), y a partir de la segunda se obtiene la (5.100), donde las derivadas espaciales se han aproximado mediante el esquema de diferencias avanzadas. Utilizando estos valores en la ecuación (5.98) se obtienen las predicciones para ρ y q denotadas por $\bar{\rho}$ y \bar{q} .

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_{i,n} = -\frac{1}{S} \frac{q_{i+1,n} - q_{i,n}}{\Delta x} \quad (5.99)$$

$$\left(\frac{\partial q}{\partial t} \right)_{i,n} = -\left(Sa^2 - \frac{q_{i,n}^2}{S\rho_{i,n}^2} \right) \frac{\rho_{i+1,n} - \rho_{i,n}}{\Delta x} - \frac{2q_{i,n}}{S\rho_{i,n}} \frac{q_{i+1,n} - q_{i,n}}{\Delta x} + \frac{2f}{DS} \frac{q_{i,n}^2}{\rho_{i,n}} + \rho_{i,n} Sg \sin \theta \quad (5.100)$$

Etapa correctora

Utilizando un esquema de diferencias retardadas junto con los valores predichos en la etapa anterior se obtienen los valores de las derivadas temporales mostradas en la ecuación (5.101).

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_{i,n+1} &= -\frac{1}{S} \frac{\bar{q}_{i,n} - \bar{q}_{i-1,n}}{\Delta x} \\ \left(\frac{\partial q}{\partial t} \right)_{i,n+1} &= -\left(Sa^2 - \frac{\bar{q}_{i,n}^2}{S\bar{\rho}_{i,n}^2} \right) \frac{\bar{\rho}_{i,n} - \bar{\rho}_{i-1,n}}{\Delta x} - \frac{2\bar{q}_{i,n}}{S\bar{\rho}_{i,n}} \frac{\bar{q}_{i,n} - \bar{q}_{i-1,n}}{\Delta x} + \frac{2f}{DS} \frac{\bar{q}_{i,n}^2}{\bar{\rho}_{i,n}} + \bar{\rho}_{i,n} Sg \sin \theta \end{aligned} \quad (5.101)$$

Ahora ya se está en disposición de calcular el promedio de las derivadas temporales tal y como muestra la ecuación (5.102), a partir de la que obtener los valores de g_i en la siguiente etapa temporal mediante la ecuación (5.98).

$$\left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} \right)_{ave} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} \right)_{i,n} + \left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} \right)_{i,n+1} \right] \quad (5.102)$$

5.5.3 Criterio de estabilidad

Tanto el método de Lax–Wendroff como el de Mac–Cormak son métodos explícitos en los que Δt no puede ser arbitrario. Tal y como se muestra en la ecuación (A2.59), Δt debe obedecer el criterio de CLF. Esta ecuación se derivada a partir de la ecuación de ondas lineal en la que c es la velocidad de propagación de la onda correspondiente. Si

la onda se propaga a través de un gas el cual ya posee una velocidad v , entonces la onda viajará a una velocidad de $(v+c)$. Por tanto, en este caso la ecuación (A2.59) se convierte en la (5.103) donde C es el número de Courant. Esta ecuación indica que el paso temporal utilizado debe ser inferior que el tiempo requerido por la onda sonora para propagarse desde un punto de la malla discreta al siguiente. Además, para ganar en precisión se sabe que C debe ser lo más cercano a la unidad posible. En general, valores adecuados para C son los comprendidos entre 0.5 y 1.

$$\Delta t = C \left(\frac{\Delta x}{v+c} \right) \quad \text{con} \quad C \leq 1 \quad (5.103)$$

Finalmente, se debe tener en cuenta que los criterios de estabilidad obtenidos hasta el momento están basados en el análisis de ecuaciones lineales, mientras que las ecuaciones que gobiernan la dinámica de un fluido son altamente no lineales. Por tanto, no se debe esperar que el criterio CLF se aplique exactamente en la resolución de este tipo de ecuaciones. En tales casos, el criterio CLF tan solo proporciona una estimación razonable para el paso temporal necesario en un problema no lineal en el que el valor de C puede irse ajustando para compensar los efectos producidos por dichas no linealidades.

5.5.4 Formulaciones matriciales

Existen una serie de métodos equivalentes a los anteriores pero utilizando un tratamiento matricial, [MG97]. El análisis se lleva a cabo sobre un sistema que puede escribirse de la forma mostrada en la ecuación (5.104) donde \mathbf{f} es una función de \mathbf{u} . Aquí, se ha utilizado negrita para indicar que se trata de funciones vectoriales.

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} = 0 \quad (5.104)$$

Método de Lax-Wendroff

El sistema mostrado en la ecuación (5.104) se puede reescribir de la forma mostrada (5.105) con la ayuda del Jacobiano de \mathbf{f} respecto a \mathbf{u} mostrado en la ecuación (5.106). Esta forma de reescribir el sistema es más instructiva a la hora de considerar la aplicación de los métodos de diferencias finitas sobre el mismo.

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + A(\mathbf{u}) \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = 0 \quad (5.105)$$

$$A(\mathbf{u}) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \quad (5.106)$$

A partir del desarrollo en serie de Taylor mostrado en la ecuación (5.107) puede obtenerse una formulación en diferencias que involucre dos niveles temporales adyacentes, denominada esquema de dos niveles. Para ello, teniendo en cuenta las aproximaciones $t=n \times \Delta t$, $x=i \times \Delta x$, y utilizando tan solo los tres primeros términos del desarrollo, se obtiene la ecuación (5.108) que puede transformarse en la (5.109) con ayuda de la (5.104).

$$\mathbf{u}(x, t + \Delta t) = \left(1 + \Delta t \cdot \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \dots \right) \cdot \mathbf{u}(x, t) \quad (5.107)$$

$$\mathbf{u}_{i,n+1} \approx \left(1 + \Delta t \cdot \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{u}_{i,n} = \left[\mathbf{u} + \Delta t \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right) \right]_{i,n} \quad (5.108)$$

$$\mathbf{u}_{i,n+1} \approx \left[\mathbf{u} - \Delta t \cdot \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} - \frac{\Delta t^2}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} \right) \right]_{i,n} = \left[\mathbf{u} - \Delta t \cdot \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} - \frac{\Delta t^2}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} \right) \right]_{i,n} \quad (5.109)$$

Ahora, utilizando las ecuaciones (5.104) y (5.106) en combinación con la (5.109), se obtiene la ecuación (5.111), en donde $v = \Delta t / \Delta x$, $\mathbf{f}_{i,n} = \mathbf{f}(\mathbf{u}_{i,n})$ y se ha utilizado un esquema de diferencias centradas para el término $\partial_x (A \cdot \partial_x \mathbf{f})$.

$$\mathbf{u}_{i,n+1} = \left[\mathbf{u} - \Delta t \cdot \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} + \frac{\Delta t^2}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(A \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} \right) \right]_{i,n} \quad (5.110)$$

$$\mathbf{u}_{i,n+1} = \mathbf{u}_{i,n} - \frac{1}{2} v (\mathbf{f}_{i+1,n} - \mathbf{f}_{i-1,n}) + \frac{1}{2} v^2 [A_{i+1/2,n} (\mathbf{f}_{i+1,n} - \mathbf{f}_{i,n}) - A_{i-1/2,n} (\mathbf{f}_{i,n} - \mathbf{f}_{i-1,n})] \quad (5.111)$$

Para evitar evaluaciones sobre puntos que no pertenezcan a la malla discreta, los términos donde aparece A pueden calcularse como promedios mediante las ecuaciones (5.112), con lo que la expresión final para el método de Lax–Wendroff es la mostrada en la ecuación (5.113), donde la función \mathbf{g} se calcula mediante las ecuaciones (5.114).

$$A_{i+1/2,n} = \frac{1}{2} (A_{i+1,n} + A_{i,n}) \quad (5.112)$$

$$A_{i-1/2,n} = \frac{1}{2} (A_{i,n} + A_{i-1,n})$$

$$\mathbf{u}_{i,n+1} = \mathbf{u}_{i,n} - \frac{1}{2} v (\mathbf{f}_{i+1,n} - \mathbf{f}_{i-1,n}) + \frac{1}{2} v^2 (\mathbf{g}_{i,n} - \mathbf{g}_{i-1,n}) \quad (5.113)$$

$$\mathbf{g}_{i,n} = \frac{1}{2} (A_{i+1,n} + A_{i,n}) \cdot (\mathbf{f}_{i+1,n} - \mathbf{f}_{i,n}) \quad (5.114)$$

$$\mathbf{g}_{i-1,n} = \frac{1}{2} (A_{i,n} + A_{i-1,n}) \cdot (\mathbf{f}_{i,n} - \mathbf{f}_{i-1,n})$$

Supóngase que la relación funcional entre p y ρ está dada por la ecuación (5.21). En este caso, el sistema de EDPs (5.19) se puede reescribir de la forma:

$$\begin{aligned} \text{Masa:} \quad & \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{q}{S} \right] = 0 \\ \text{Momento:} \quad & \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[Sc^2 \rho + \frac{q^2}{S\rho} + \int_0^x \left(\frac{2fq^2}{DS\rho} + \rho Sg \sin \theta \right) dx \right] = 0 \end{aligned} \quad (5.115)$$

Comparando este sistema con el mostrado en la ecuación (5.104) y teniendo en cuenta que $\mathbf{u}=[\rho \ q]^T$, las funciones f_1 y f_2 del vector $\mathbf{f}=[f_1 \ f_2]^T$ son las mostradas en la ecuación (5.115), siendo el Jacobiano A el mostrado en (5.116).

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{q}{S} \\ f_2 &= Sc^2 \rho + \frac{q^2}{S\rho} + \int_0^x \left(\frac{2fq^2}{DS\rho} + \rho Sg \sin \theta \right) dx \end{aligned} \quad (5.116)$$

$$A(\rho, q) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{S} \\ Sa^2 - \frac{q^2}{S\rho^2} - \int_0^x \left(\frac{2fq^2}{DS\rho^2} + Sg \sin \theta \right) dx & \frac{2q}{S\rho} + \int_0^x \frac{4fq}{DS\rho} dx \end{pmatrix} \quad (5.117)$$

Si por el contrario, la relación funcional entre p y ρ está dada por la ecuación (5.24), se obtienen las ecuaciones (5.118), (5.119) y (5.120).

$$\begin{aligned} \text{Masa:} \quad & \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{q}{S} \right] = 0 \\ \text{Momento:} \quad & \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[SP_o \left(\frac{\rho}{\rho_o} \right)^\gamma + \frac{q^2}{S\rho} + \int_0^x \left(\frac{2fq^2}{DS\rho} + \rho Sg \sin \theta \right) dx \right] = 0 \end{aligned} \quad (5.118)$$

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{q}{S} \\ f_2 &= SP_o \left(\frac{\rho}{\rho_o} \right)^\gamma + \frac{q^2}{S\rho} + \int_0^x \left(\frac{2fq^2}{DS\rho} + \rho Sg \sin \theta \right) dx \end{aligned} \quad (5.119)$$

$$A(\rho, q) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{S} \\ \frac{SP_o \gamma}{\rho_o} \rho^{\gamma-1} - \frac{q^2}{S\rho^2} - \int_0^x \left(\frac{2fq^2}{DS\rho^2} + Sg \sin \theta \right) dx & \frac{2q}{S\rho} + \int_0^x \frac{4fq}{DS\rho} dx \end{pmatrix} \quad (5.120)$$

Se puede demostrar que la estabilidad de dicho método depende de los autovalores del Jacobiano. Sin entrar en detalles, puede decirse que este método numérico es estable si y sólo si cada autovalor del Jacobiano A satisface la desigualdad mostrada en la ecuación (5.121), siendo $\rho(A)$ el radio espectral de A . Por tanto, dicha ecuación constituye el criterio CLF, equivalente al mostrado en la ecuación (A2.60), para el sistema de EDPs (5.115). Dado que A depende de ρ y q , sus autovalores varían cuando se avanza tanto espacial como temporalmente en la simulación de las ecuaciones. Debido a esto, el valor de Δt debe ser reajustado en cada paso temporal de tal forma que se siga verificando el criterio CLF. Por tanto, se trabaja con una malla homogénea en el espacio y no homogénea en el tiempo.

$$v \cdot |\lambda| \leq 1 \quad \text{ó} \quad v \cdot \rho(A) \leq 1 \tag{5.121}$$

Variantes de Lax–Wendroff

A continuación se exponen otras variantes del método de Lax–Wendroff que requieren más tiempo de cómputo aunque sin dar mucho mejores resultados que el anterior. La *variante de Richtmyer* consiste en el esquema definido mediante las ecuaciones (5.122) y (5.123). Como puede verse, este esquema tan solo usa diferencias centradas.

$$\bar{u}_i = \mu_x u_{i,n} - \frac{1}{2} v \delta_x f_i^n \tag{5.122}$$

$$u_{i,n+1} = u_{i,n} - v \delta_x \bar{f}_i$$

$$\bar{f}_i = f(\bar{u}_i)$$

$$\Delta_x u_i = u_{i+1} - u_i$$

$$\nabla_x u_i = u_i - u_{i-1} \tag{5.123}$$

$$\delta_x u_i = u_{i+1/2} - u_{i-1/2}$$

$$\mu_x u_i = \frac{1}{2} (u_{i+1/2} + u_{i-1/2})$$

La *variante de Mac–Cormack* también usa un esquema de dos pasos. Se puede plantear con el primero en diferencias retardadas y el segundo en diferencias avanzadas como se muestra en la ecuación (5.124), o bien el primero en diferencias avanzadas y el segundo en diferencias retardadas como se muestra en (5.125).

$$\bar{u}_i = U_i^n - \frac{1}{2} v \nabla_x f_i^n \tag{5.124}$$

$$u_i^{n+1} = \frac{1}{2} (u_i^n + \bar{u}_i) - \frac{1}{2} v \Delta_x \bar{f}_i$$

$$\begin{aligned}\bar{u}_i &= u_i^n - \frac{1}{2}v\Delta_x f_i^n \\ u_i^{n+1} &= \frac{1}{2}(u_i^n + \bar{u}_i) - \frac{1}{2}v\nabla_x \bar{f}_i\end{aligned}\tag{5.125}$$

McGuire y Morris

McGuire y Morris generalizaron en 1973 estos esquemas introduciendo un parámetro s ($0 < s < 1$) para dar el proceso de dos pasos mostrado en las ecuaciones (5.126) y (5.127). Este esquema se reduce al de MacCormack en diferencias centradas cuando $s=1/2$, y al de Rubin y Burstein cuando $s=1$. Si se hace $f=Au$ en los puntos de la malla, conduce además a la fórmula de Lax–Wendroff.

$$\begin{aligned}\bar{u}_i &= \mu_x u_i^n - sv\delta_x f_i^n \\ u_i^{n+1} &= u_i^n - \frac{1}{2}\left[\left(1 - \frac{1}{2s}\right)H_x f_i^n + \frac{1}{s}\delta_x \bar{f}_i\right]\end{aligned}\tag{5.126}$$

$$H_x u_i = u_{i+1} - u_{i-1}\tag{5.127}$$

5.5.5 Método de elementos finitos

El método de los elementos finitos (FEM, de Finite Element Method en inglés) es un método de aproximación de funciones de una o más variables con amplia utilización en las más diversas áreas de ingeniería, mecánica de fluidos, campos eléctricos y magnéticos, elasticidad y plasticidad, etc... La forma más sencilla de explicar el método es mediante funciones de una variable. Supóngase la función $f(x)$ definida en el intervalo $[a,b]$. En principio $f(x)$ puede ser una función cualquiera e incluso una función desconocida solución de una ecuación diferencial de la cual se quiere hallar una aproximación.

Una posible solución para aproximar $f(x)$ es sustituirla por los $(n+1)$ primeros términos del desarrollo en serie de Taylor alrededor de un punto interior del intervalo $[a,b]$. En otras palabras, mediante este método $f(x)$ se expresaría como suma de potencias de x cuyos coeficientes serían los parámetros buscados. Esta solución tiene el inconveniente de requerir el conocimiento de derivadas de orden superior en un punto, y que las potencias elevadas de x tienden a introducir grandes errores al alejarse del punto donde se ha hecho el desarrollo en serie. Otra posible solución sería sustituir $f(x)$ por un polinomio de grado n cuyos $(n+1)$ coeficientes se determinasen con la condición de que dicho polinomio pasase por $(n+1)$ puntos de $f(x)$, convenientemente elegidos sobre el intervalo $[a,b]$. Esta solución tiene también varios inconvenientes, como por ejemplo las dificultades de manejar polinomios de grados elevados y las

oscilaciones que la interpolación polinomial tiende a introducir en los extremos del intervalo (para puntos igualmente espaciados en el mismo).

El método de los elementos finitos proporciona una interesante alternativa a los métodos citados. Analíticamente, la función $f(x)$ producida por el FEM tiene una expresión diferente en cada uno de los subintervalos en los que se divide el intervalo inicial $[a,b]$ en el que se desea hallar la solución al problema. Una forma de expresar analíticamente la función es mediante el desarrollo mostrado en la ecuación (5.128) donde f_i son los valores de $\tilde{f}(x_i)$ en los nudos y las funciones $\phi_i(x)$ son unas funciones tales como las que se muestran en la figura 5.7 y que reciben el nombre de funciones de interpolación. Estas funciones juegan un papel central en el FEM y cumplen las siguientes condiciones mostradas en las ecuaciones (5.129).

$$\tilde{f}(x) = \sum_{i=0}^N f_i \cdot \phi_i(x) \tag{5.128}$$

$$\begin{aligned} \phi_i(x) &= \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} & \text{para } x_{i-1} \leq x \leq x_i \\ \phi_i(x) &= \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} & \text{para } x_i \leq x \leq x_{i+1} \end{aligned} \tag{5.129}$$

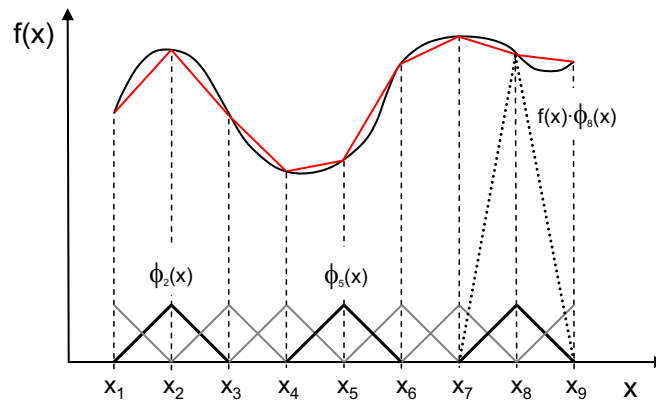


Figura 5.7: Método de los elementos finitos.

Estas funciones son muy sencillas y fáciles de manejar, por ser lineales y responder a expresiones matemáticas diferentes en cada subintervalo. Además, los intervalos no tienen por qué ser de la misma dimensión, de hecho para mejorar la aproximación pueden hacerse más pequeños en las zonas en las que la función varía más rápidamente. Una importante ventaja de la expresión (5.128) es que, a diferencia por ejemplo de los coeficientes de un polinomio, los $(n+1)$ coeficientes de la función representan precisamente los valores de la función en los nudos.

Supóngase el modelo formado por las ecuaciones (5.2) y (5.3) formando el sistema de EDPs mostrado en la ecuación (5.130). Tratando como variables independientes la densidad y la velocidad, dicho modelo se puede escribir matricialmente tal y como se muestra en la ecuación (5.131).

$$\begin{aligned} \text{Masa:} \quad & \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) = 0 \\ \text{Momento:} \quad & \frac{\partial}{\partial t}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial x}(p + \rho v^2) + \frac{2f}{D} \rho v + \rho g \sin \theta = 0 \end{aligned} \quad (5.130)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v & \rho \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \rho_t \\ v_t \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} v & \rho \\ c^2 + v^2 & 2\rho v \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \rho_x \\ v_x \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2f}{D} \rho v^2 + \rho g \sin \theta \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.131)$$

Este par de ecuaciones pueden ser resueltas numéricamente de modo aproximado mediante el FEM. Para ello, utilizando la notación vectorial dicho sistema se puede escribir de forma:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + A(\mathbf{u}) \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + \mathbf{b}(\mathbf{u}) = 0 \quad (5.132)$$

Ahora, se puede usar el método de separación de variables. Este método se basa en escribir la solución a la misma de forma aproximada mediante un desarrollo en serie de la forma mostrada en la ecuación (5.133), donde la variación de la solución con la coordenada x viene dada por las funciones de interpolación $\phi_i(x)$, mientras que su variación con respecto a t viene dada por los coeficientes $y_i(t)$, propios de la aproximación utilizando el FEM.

$$\tilde{\mathbf{u}}(x, t) = \sum_{i=0}^N u_i(t) \cdot \phi_i(x) = \mathbf{u}(t) \cdot \boldsymbol{\phi}(x) \quad (5.133)$$

En otras palabras, se utiliza el FEM para aproximar en la coordenada espacial pero no en la coordenada temporal. Así pues, la solución aproximada que proporcione el FEM habrá de venir definida por el vector $\mathbf{u}(t)$ que será función del tiempo. Para calcular este vector lo más conveniente es utilizar el método de los residuos ponderados. La idea de este método consiste en sustituir la aproximación mostrada en la ecuación (5.133) en la ecuación diferencial. El resultado será algo que debería ser cero, sin embargo no lo es, pues se trata de la solución aproximada, resultando de dicha sustitución un residuo R dado por:

$$R = \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial t} + A(\tilde{\mathbf{u}}) \cdot \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial x} + \mathbf{b}(\tilde{\mathbf{u}}) \quad (5.134)$$

Este es el momento de imponer que el residuo sea lo más pequeño posible para obtener las ecuaciones necesarias con las que determinar los coeficientes $\mathbf{u}(t)$. Existen varias formas de obtener dichas ecuaciones:

- *Método de colocación:* Se obliga a que el residuo R sea cero en $n+1$ puntos del intervalo $[a,b]$ y de aquí se obtienen las $n+1$ ecuaciones necesarias.
- *Método de los mínimos cuadrados:* Se impone la condición de que la integral del cuadrado del residuo R , es decir, el error cuadrático, se mínima. Derivando esta integral respecto a los $n+1$ coeficientes de $\mathbf{u}(t)$ e igualando a cero, se obtienen las $n+1$ ecuaciones necesarias.
- *Método de Galerkin:* Se iguala a cero la integral del producto del residuo R por $n+1$ funciones linealmente independientes mostrados en la ecuación (5.135), y de ahí se obtienen las ecuaciones necesarias para determinar $\mathbf{u}(t)$. Las funciones independientes son precisamente las funciones de interpolación $\phi_i(x)$. Este es el método que conduce a las ecuaciones más sencillas y a los resultados más precisos.

$$\int_0^{\infty} R \cdot \phi_i(x) dx = 0 \quad i = 0, \dots, N \quad (5.135)$$

5.6 Modelo de los compresores

Durante su transporte a través de los gasoductos de la red, el gas pierde parte de su energía inicial debido a una resistencia consecuencia de la fricción con las paredes internas del gasoducto y a la transferencia de calor entre el gas y su entorno, lo que se traduce en una pérdida de presión. Dicha pérdida es compensada por los compresores instalados en las estaciones de compresión ubicadas en la red, llegando a consumir entre el 3 y el 5% del gas transportado. Este porcentaje supone un costo significativo en el transporte, dada la enorme cantidad de gas transportado anualmente en todo el mundo. Esto, hace que el problema de cómo operar de forma óptima sobre los compresores instalados en cada una de las estaciones de la red sea una tarea de especial importancia. Para ello, deben tenerse en cuenta las relaciones existentes entre las variables involucradas en tal proceso. Además, deben tenerse en cuenta que los rangos de valores que dichas variables pueden tomar estarán limitados por las restricciones físicas propias del sistema. Por todo ello, en esta sección se trata de

establecer el modelo matemático que liga las variables en el proceso de compresión del gas así como la región de funcionamiento del mismo.

5.6.1. Estaciones de compresión

Las estaciones de compresión están equipadas con compresores que, dependiendo de los requerimientos del sistema y de las capacidades de los dispositivos pueden conectarse:

1. En serie
2. En paralelo
3. En serie-paralelo

Por ejemplo, suelen conectarse en serie cuando la razón de compresión total se logra en base a varias compresiones sucesivas. Por el contrario, suelen conectarse en paralelo cuando la capacidad del dispositivo no es suficiente para comprimir el flujo de gas entrante en cada compresor de la estación, y por tanto, se divide en partes iguales entre todos los compresores de la misma, todos ellos utilizando la misma razón de compresión. Los compresores utilizados en la industria del gas están normalmente clasificados dentro de los tipos siguientes:

1. Rotatorios:
 - a) Ventiladores rotatorios, impulsores rotatorios en direcciones opuestas.
 - b) Centrífugos.
2. Recíprocos:
 - a) De acción única.
 - b) De doble acción.
3. De chorro o surtidores.

Como impulsor para los compresores pueden utilizarse todo tipo de motores primarios (motores eléctricos, turbinas de vapor, turbina de gas, etc...). El principal aspecto para la elección de unos u otros es el económico. Los compresores de chorro son utilizados cuando las presiones de succión y descarga no varían demasiado con el tiempo. Los ventiladores rotatorios se usan principalmente en sistemas de gas en los que la diferencia entre la presión de succión y descarga es inferior a 0.1bar . Sin embargo, el compresor más ampliamente utilizado es el centrífugo y por ello se hace un estudio detallado del mismo en la siguiente sección.

En general, las estaciones de compresión instaladas en una red de distribución de gas pueden llegar a ser extremadamente complicadas, estando formadas por decenas de compresores de varios tipos conectados según diferentes configuraciones. Sin embargo, aquí se consideran tan solo estaciones de compresión formadas por un determinado número de compresores centrífugos idénticos conectados en paralelo. Este tipo de estaciones es muy común en la industria actual, y la comprensión de su funcionamiento es fundamental para el modelado de estaciones de compresión más complejas.

5.6.2 Compresores centrífugos

En un compresor centrífugo todo el trabajo realizado sobre el gas es llevado a cabo por un impulsor [KSS66]. El gas es descargado a alta velocidad dentro de un difusor. La velocidad del gas se reduce y su energía cinética es convertida en presión estática. El compresor centrífugo consta de una cubierta con pasos de flujo, un eje rotatorio sobre el cual hay un impulsor fijo, cojinetes, y un sellado para evitar fugas de gas. Las características más importantes de un compresor centrífugo son:

- Posee pocas partes móviles (tan solo el émbolo y el eje rotatorio) por lo que tanto el coste de mantenimiento como el consumo de lubricante son bajos.
- Alta capacidad.
- Entrega continua de gas sin variaciones.
- Las razones de compresión no son tan altas como en otros tipos de compresor, debido a la ausencia de desplazamiento positivo.
- Normalmente no necesitan refrigeración con agua debido a las bajas razones de compresión y las bajas pérdidas por fricción. Aunque los compresores multietapa pueden requerir alguna forma de refrigeración.

Puesto que los compresores centrífugos son máquinas de baja razón de presiones, suelen estar conectados en serie dentro de las estaciones de compresión. En tal caso, cada compresor desarrolla tan solo una parte de la razón de compresión total. Para una determinada presión de descarga y capacidad, las siguientes características son necesarias en el diseño de un compresor centrífugo:

- Caballos de potencia del eje.
- Velocidad de operación.

- Temperatura de descarga.

El trabajo total desarrollado por un compresor para comprimir el gas desde una presión p_1 a otra p_2 , puede calcularse como el área encerrada por los puntos 1, 2, 3 y 4 del diagrama p - V mostrado en la figura 5.8. Por tanto, dicho trabajo puede calcularse mediante la integral mostrada en la ecuación (5.136). Si se tiene en cuenta que para un proceso adiabático se verifica la relación (5.137), el trabajo desarrollado por el compresor para este tipo de proceso queda según se muestra en la ecuación (5.138).

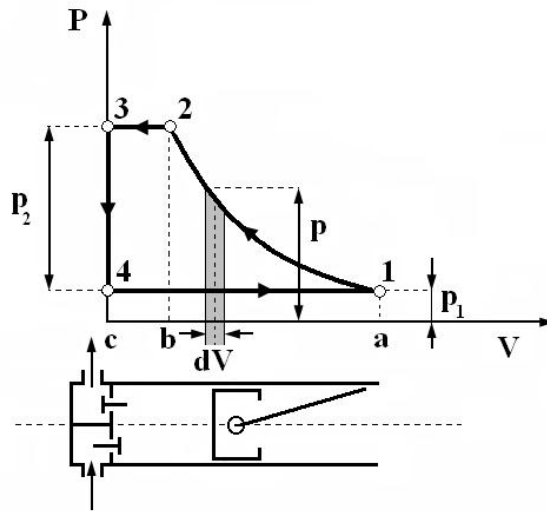


Figura 5.8: Diagrama p - V del proceso de compresión.

$$H = \int_{p_1}^{p_2} V dp \quad (5.136)$$

$$V = V_1 \left(\frac{p_1}{p} \right)^{1/\gamma} \quad (5.137)$$

$$H_{adt} = \int_{p_1}^{p_2} V dp = V_1 p_1^{1/\gamma} \int_{p_1}^{p_2} p^{-1/\gamma} dp = \frac{\gamma}{\gamma-1} p_1 V_1 \left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\gamma-1/\gamma} - 1 \right] \quad (5.138)$$

En dicha ecuación se puede reemplazar el exponente adiabático, γ , por el exponente politrópico, n , y así obtener la expresión para el trabajo total realizado por un compresor que realiza una compresión politrópica desde p_1 hasta p_2 mostrada en la ecuación (5.139), donde V_1 es el volumen inicial, p_1 es la presión de succión y p_2 la presión de descarga. Esta ecuación puede escribirse alternativamente de la forma mostrada en la ecuación (5.140) donde R es la constante específica del gas, T_1 la temperatura a la entrada, Z_1 el factor de compresibilidad a la entrada y m la masa.

$$H_{poli} = \frac{n}{n-1} p_1 V_1 \left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{n-1}{n}} - 1 \right] \quad (5.139)$$

$$H_{poli} = \frac{n}{n-1} m Z_1 R T_1 \left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{n-1}{n}} - 1 \right] \quad (5.140)$$

El exponente politrópico que aparece en estas ecuaciones puede ser determinado mediante la ecuación (5.141), donde η es la eficiencia politrópica. Dicha eficiencia politrópica puede determinarse mediante test y es generalmente función de la capacidad a la entrada del compresor.

$$\eta = \frac{n}{n-1} \frac{\gamma-1}{\gamma} \quad (5.141)$$

La potencia requerida para la compresión del gas desde p_1 hasta p_2 puede ser calculada mediante la ecuación (5.142), donde Δh es el cambio en la entalpía del gas, relacionado con la eficiencia politrópica mediante la ecuación (5.143), siendo v el volumen específico del gas.

$$P = q \cdot \Delta h \quad (5.142)$$

$$\eta = \frac{\int_{p_1}^{p_2} v dp}{\Delta h} \quad (5.143)$$

Teniendo en cuenta estas dos expresiones, se obtiene la ecuación (5.144). Finalmente, asumiendo un proceso politrópico y teniendo en cuenta las relaciones $q = \rho \cdot Q = \text{cte}$ y $v = V/m$, la potencia actual requerida para la compresión de un flujo de gas Q desde la presión de succión p_s a la presión de descarga p_d , puede expresarse mediante la ecuación (5.145).

$$P = \frac{1}{\eta} \cdot q \int_{p_1}^{p_2} v dp \quad (5.144)$$

$$P = \frac{1}{\eta} \cdot \frac{p_s Q}{(n-1)/n} \left[\left(\frac{p_d}{p_s} \right)^{\frac{n-1}{n}} - 1 \right] \quad (5.145)$$

La figura 5.9 muestra la envoltura típica de un compresor centrífugo como una función de la razón de presiones p_d/p_s y del flujo de entrada Q . En ella, el límite de *surge* representa la máxima razón de presiones que puede conseguirse a una

determinada velocidad, más allá de la cual el compresor se hace inestable y pueden surgir fluctuaciones. Por el contrario, el límite de *stonewall* representa la mínima razón de presiones que puede conseguirse a una determinada velocidad. Obviamente, esto es así si el compresor está funcionando, ya de lo contrario la mínima razón de presiones es 1 no existiendo por tanto compresión alguna del gas. Las otras dos líneas que delimitan la región de funcionamiento del compresor las marcan las velocidades máxima y mínima a las que puede operar el mismo. La envoltura típica del compresor muestra además unas líneas discontinuas perpendiculares a las de las diferentes velocidades de operación, indicando el rendimiento del mismo para cada una de tales velocidades. El límite o línea de *stonewall* puede verse también como el límite más allá del cual el compresor entra en una zona de muy bajo rendimiento y, por tanto, se evita su funcionamiento.

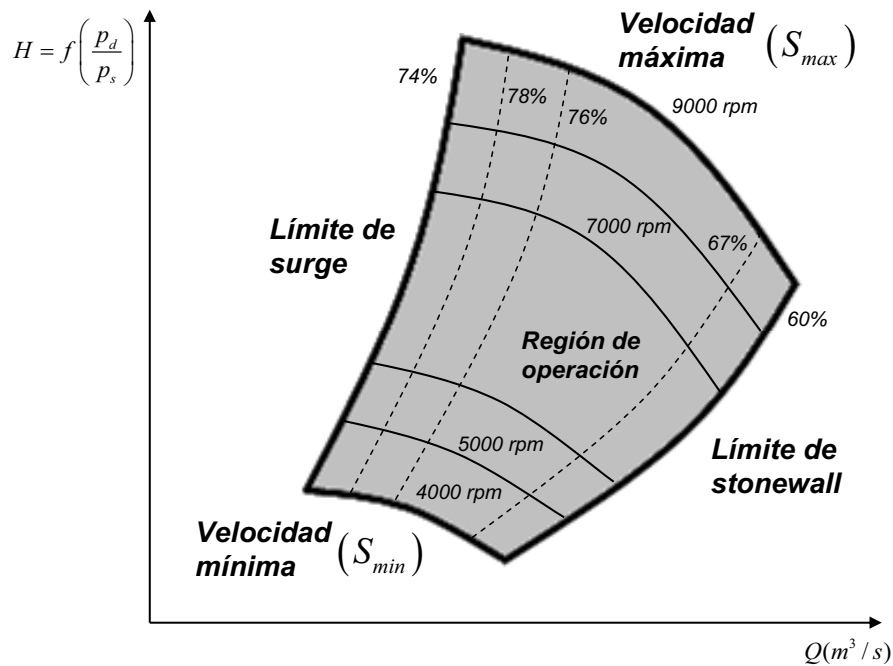


Figura 5.9: Envoltura típica de operación de un compresor.

Como puede verse en la figura 5.9, las principales variables relacionadas con el modo de operación de un compresor centrífugo son el caudal de gas a la entrada del mismo (Q), la velocidad de funcionamiento (S), la altura adiabática (H), y la eficiencia adiabática (η). Las relaciones entre estas variables pueden aproximarse mediante las ecuaciones (5.146) y (5.147) [PR87], donde los coeficientes que en ellas aparecen dependen del tipo de compresor utilizado y suelen estimarse a partir de datos experimentales obtenidos al realizar mediciones de Q , S , H , y η durante el funcionamiento del sistema.

$$\frac{H}{S^2} = A_H \cdot \left(\frac{Q}{S}\right)^3 + B_H \cdot \left(\frac{Q}{S}\right)^2 + C_H \cdot \left(\frac{Q}{S}\right) + D_H \quad (5.146)$$

$$\eta = A_E \cdot \left(\frac{Q}{S}\right)^3 + B_E \cdot \left(\frac{Q}{S}\right)^2 + C_E \cdot \left(\frac{Q}{S}\right) + D_E \quad (5.147)$$

Las curvas que forman la envoltura de la región de operación de un compresor proporcionan además límites sobre S y Q/S según las ecuaciones (5.148) y (5.149).

$$S_{min} \leq S \leq S_{max} \quad (5.148)$$

$$surge \leq \frac{Q}{S} \leq stonewall \quad (5.149)$$

5.6.3 Dominio de operación de un compresor

Las desigualdades mostradas en las ecuaciones (5.148) y (5.149) junto con la ecuación (5.146) definen el dominio de operación factible de un compresor centrífugo. La figura 5.9 muestra dicho dominio en función de las variables Q , S y H . Puesto que las variables utilizadas en el modelado de los gasoductos de la red utilizan son el caudal de gas en condiciones normales y las presiones a la entrada y salida de un gasoducto, el dominio de operación de los compresores se suele definir en función de dichas variables (Q_n , p_s , p_d). La relación de estas variables con H y Q se muestran en las ecuaciones (5.150) y (5.151), en donde la temperatura T_s se supone constante.

$$H = \frac{Z_s R T_s}{(n-1)/n} \left[\left(\frac{p_d}{p_s} \right)^{n-1/n} - 1 \right] \quad (5.150)$$

$$Q = \frac{Q_n \cdot Z_s}{p_s} \quad (5.151)$$

$$Z_s = 1 - \frac{p_s}{390} \quad (5.152)$$

De las ecuaciones (5.148) y (5.149), se desprende que el flujo de gas a la entrada de un compresor estará limitado según muestra la ecuación (5.153). Además, para cada valor de Q en este rango, la altura adiabática H tiene un límite inferior, $H^L(Q)$, determinado por S_{min} o la línea de *stonewall*, y un límite superior, $H^U(Q)$, marcado por S_{max} o el límite de *surge*.

$$S_{min} \times surge = Q^L \leq Q \leq Q^U = S_{max} \times stonewall \quad (5.153)$$

Además, la presión de succión solamente puede estar en el rango determinado por sus límites inferior y superior. Así, el dominio de operación de un compresor centrífugo en función de las variables Q_n , p_s , y p_d está definido mediante la ecuación (5.154), donde las funciones F^L y F^U se muestran en la ecuación (5.155).

$$D = \left\{ (q, p_s, p_d) : p_s^L \leq p_s \leq p_s^U, \frac{Q^L \cdot p_s}{Z_s} \leq Q_n \leq \frac{Q^U \cdot p_s}{Z_s}, F^L \cdot p_s \leq p_d \leq p_s \cdot F^U \right\} \quad (5.154)$$

$$F^L \left(\frac{Q_n}{p_s} \right) = \left[1 + \frac{(n-1)/n}{Z_s R T_s} H^L \left(\frac{Q_n \cdot Z_s}{p_s} \right) \right]^{n-1} \quad (5.155)$$

$$F^U \left(\frac{Q_n}{p_s} \right) = \left[1 + \frac{(n-1)/n}{Z_s R T_s} H^U \left(\frac{Q_n \cdot Z_s}{p_s} \right) \right]^{n-1}$$

Si se representan los valores máximo y mínimo de la presión de descarga sobre todos los valores permitidos de p_s y Q_n , obtenidos a partir de los valores $[Q^L, Q^U]$ y $[H^L, H^U]$ mediante la envoltura del compresor, se obtiene el dominio de operación mostrado en la figura 5.10. Las líneas continuas de dicho dominio corresponden a la envoltura de la región de operación para un valor fijo de la presión de succión. En concreto, la figura 5.11 muestra esta envoltura para una presión de succión de 38bar. Como se aprecia, su forma es similar a la mostrada en la figura 5.9.

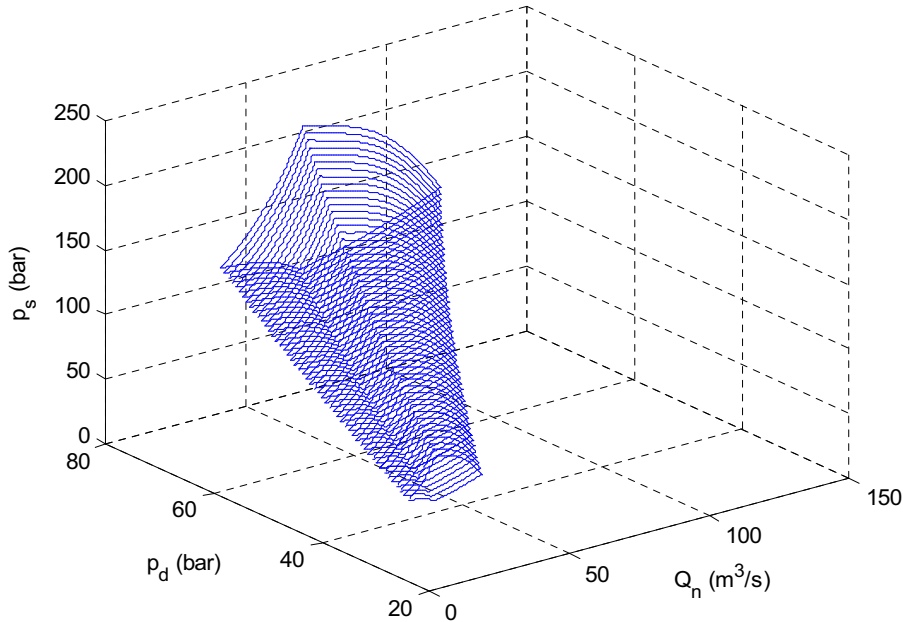


Figura 5.10: Dominio de operación de un compresor.

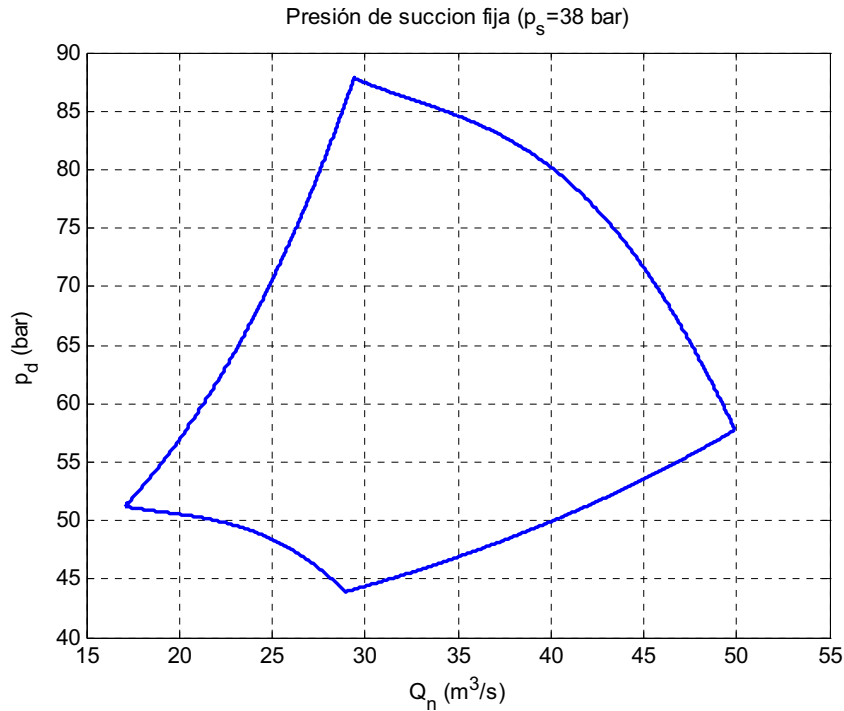


Figura 5.11: Envoltura un compresor para p_s fija.

5.6.4 Consumo de un compresor

Tal y como se comentó en la sección anterior, normalmente se trabaja con las variables (Q_n, p_s, p_d) . Sin embargo, para encontrar el modo en el que debe operar un compresor para alcanzar unos valores de (Q_n, p_s, p_d) dentro del dominio de operación, el primer paso es mapear dichos valores sobre el dominio original calculando el valor de H y Q mediante las ecuaciones (5.150) y (5.151) respectivamente, y posteriormente resolviendo la ecuación (5.146) para encontrar el valor de S . Si estos tres valores están dentro de la envoltura del compresor, éste puede funcionar correctamente siendo el coste asociado a dicho funcionamiento el mostrado en la ecuación (5.156). Como puede verse, la función de coste G es proporcional a la potencia consumida con un coste C .

$$G(Q_n, p_s, p_d) = C \times P = C \times \frac{1}{\eta} \cdot \frac{Z_s Q_n}{(n-1)/n} \left[\left(\frac{p_d}{p_s} \right)^{n-1/n} - 1 \right] \quad (5.156)$$

El comportamiento de esta función depende, por supuesto, de las características del compresor. Sin embargo, típicamente, dicho coste es una función creciente con la razón de presiones (p_d/p_s) y el flujo de masa, y decreciente con respecto a la presión de succión. La figura (5.156) muestra la función de cote de un compresor típico para una presión de succión fija.

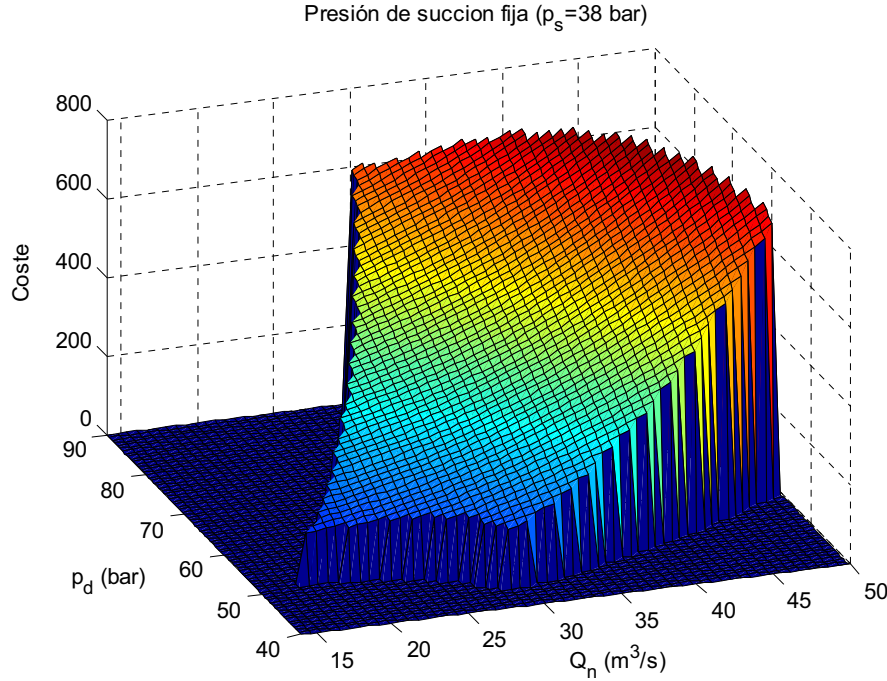


Figura 5.12: Coste de asociado al funcionamiento de un compresor.

5.6.5 Dominio de operación de una estación de compresión

Supóngase ahora una estación formada por NC compresores centrífugos idénticos conectados en paralelo en donde los valores del caudal de gas y las presiones de succión y descarga son (Q_n, p_s, p_d) . Supóngase además, que las presiones de succión y descarga son las mismas todos los compresores que forman la estación, pero el flujo se divide en partes iguales entre cada uno de los NC compresores. Así, si la estación pone tan solo un compresor en funcionamiento, el dominio de operación de la estación coincide con el del compresor, D , mostrado en la figura 5.10. Sin embargo, si se ponen en funcionamiento nc compresores, el dominio de operación la estación pasará a ser el mostrado en la ecuación (5.157). Así, el dominio de operación que contempla todas las posibilidades en el funcionamiento de la estación de compresión será el formado por la unión de los dominios que se obtienen cuando funciona con 1 compresor, con 2 compresores, ..., con NC compresores. Dicho dominio se muestra en la (5.158).

$$D^{nc} = \left\{ (Q_n, p_s, p_d) : \left(\frac{Q_n}{nc}, p_s, p_d \right) \in D \right\} \quad (5.157)$$

$$D^{ec} = \bigcup_{nc=1}^{NC} D^{nc} \quad (5.158)$$

La figura 5.13 muestra el dominio de operación de una estación formada por cuatro compresores idénticos. Así mismo, la figura 5.14 muestra la envoltura de la región de operación correspondiente a una presión de succión fija.

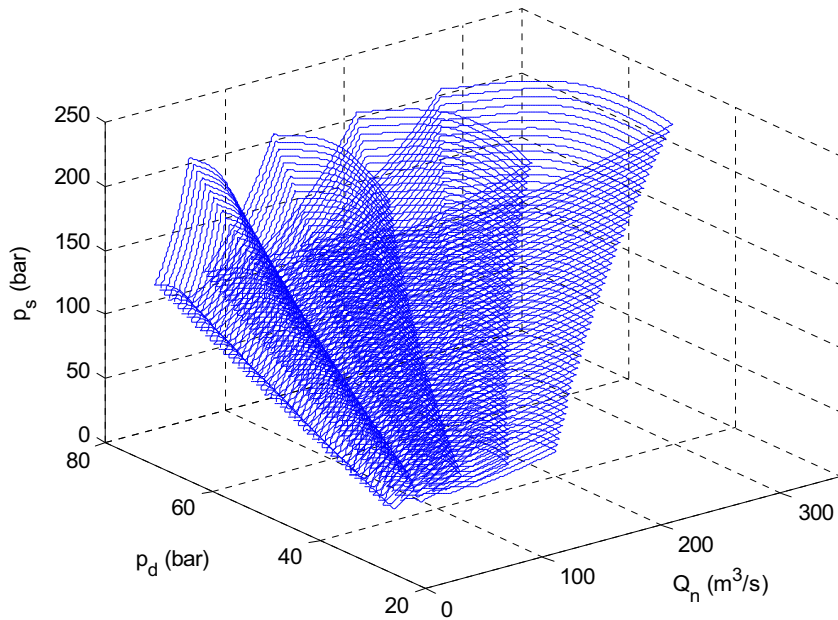


Figura 5.13: Dominio de operación de una estación con 4 compresores.

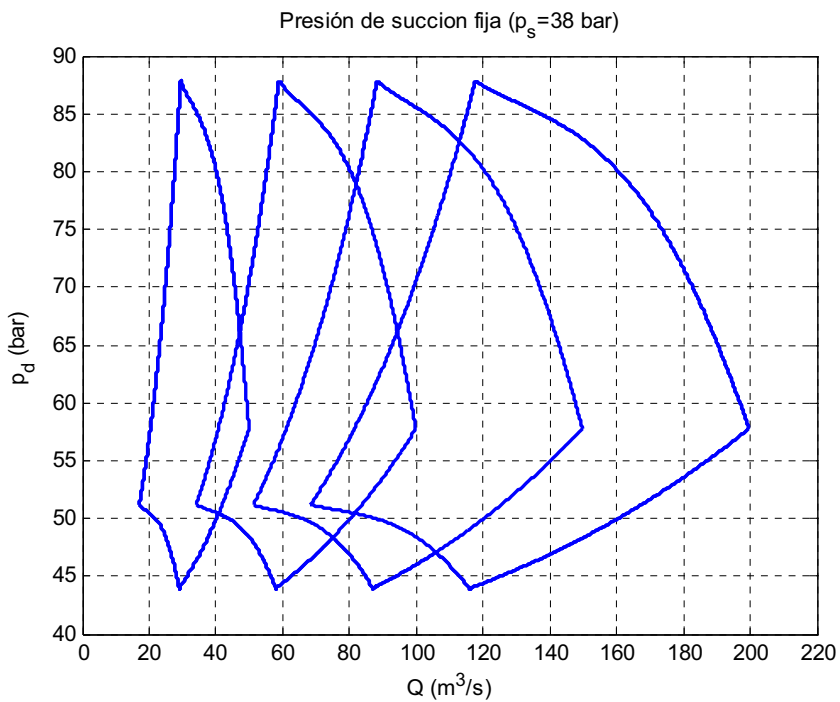


Figura 5.14: Envoltura una estación con 4 compresores para p_s fija.

Tal y como puede verse se trata de un dominio conexo. Sin embargo, esto no es siempre así, ya que dicho dominio depende de las características de cada uno de los compresores instalados en la estación. En general, puede demostrarse que para que el dominio de operación de una estación formada por varios compresores sea conexo, se debe satisfacer la condición mostrada en la ecuación (5.159).

$$\frac{Q^U}{Q^L} \geq 2 \quad (5.159)$$

5.6.6 Consumo de una estación de compresión

Tal y como puede verse a partir de la figura 5.14, en ciertas ocasiones, la estación puede funcionar poniendo en marcha varios compresores. Tal es el caso en el que las condiciones de operación fijadas por unos determinados valores de Q_n , p_s , y p_d están dentro del dominio de operación de la estación cuando funciona con un solo compresor, D , o con más de uno, D^{nc} . Sin embargo, el coste asociado a dicha operación es diferente en cada uno de estos casos. Esto es debido a que al cambiar el número de compresores que la estación pone en marcha, se modifica el caudal de entrada a cada uno de ellos, y por tanto, la eficiencia con la que funcionan. La figura 5.15 muestra el coste asociado al funcionamiento de una estación formada por cuatro compresores idénticos cuando pone en funcionamiento 1, 2, 3 o 4 compresores de forma separada.

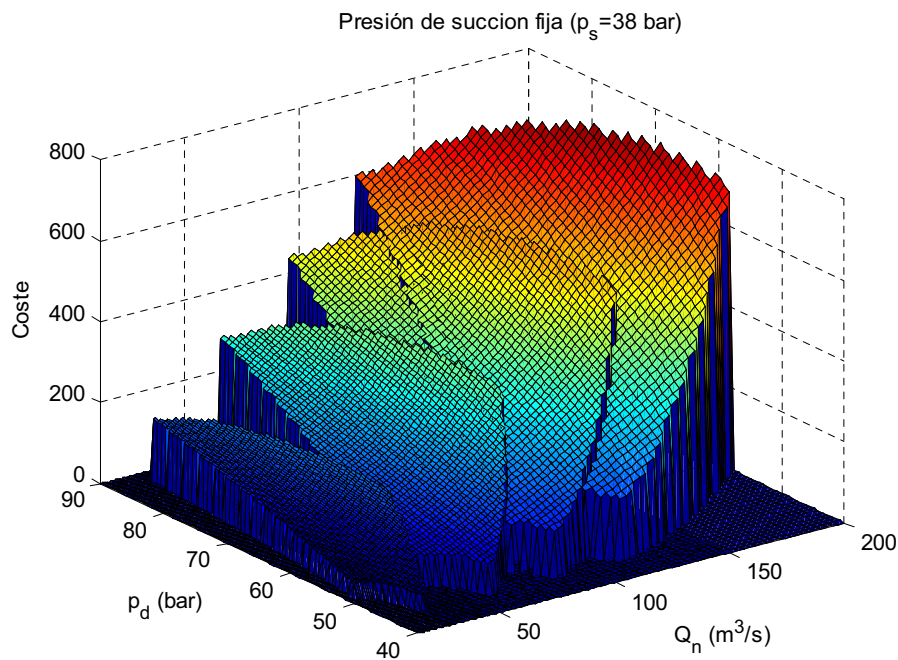


Figura 5.15: Coste de asociado al funcionamiento de una estación con 4 compresores.

Así, defínase R como el conjunto de valores de nc para los que la estación puede operar correctamente para uno valores dados de Q_n , p_s , y p_d .

$$R = \{nc \in [1, NC] / (Q_n, p_s, p_d) \in D^{nc}\} \quad (5.160)$$

Cuando el punto de operación de la estación de compresión está definido por las variables (Q_n, p_s, p_d) y el número de compresores funcionando es nc , las presiones de succión y descarga para cada uno de los compresores serán p_s y p_d respectivamente, mientras que el caudal de gas a través de cada uno de ellos será Q_n/nc . Por tanto, el coste asociado al funcionamiento de cada compresor será $G(Q_n/nc, p_s, p_d)$, y el consumo total asociado a la estación será $nc \times G(Q_n/nc, p_s, p_d)$. Puesto que la eficiencia de cada compresor depende del flujo de gas a comprimir, dicho coste es diferente dependiendo del número de compresores que operan en la estación. Así, si dados unos valores de (Q_n, p_s, p_d) existen varios modos de operación diferentes, el número de compresores con los que debe operar la estación se obtiene como solución del problema de optimización mostrado en la ecuación (5.161). La figura 5.16 muestra el coste mínimo para una estación cuyo coste es el mostrado en la figura 5.15. Esta función puede tener o no tener saltos dependiendo de las características de cada compresor.

$$G_{ec}(Q_n, p_s, p_d) = \min_{nc \in R} \left\{ nc \times G\left(\frac{Q_n}{nc}, p_s, p_d\right) \right\} \quad (5.161)$$

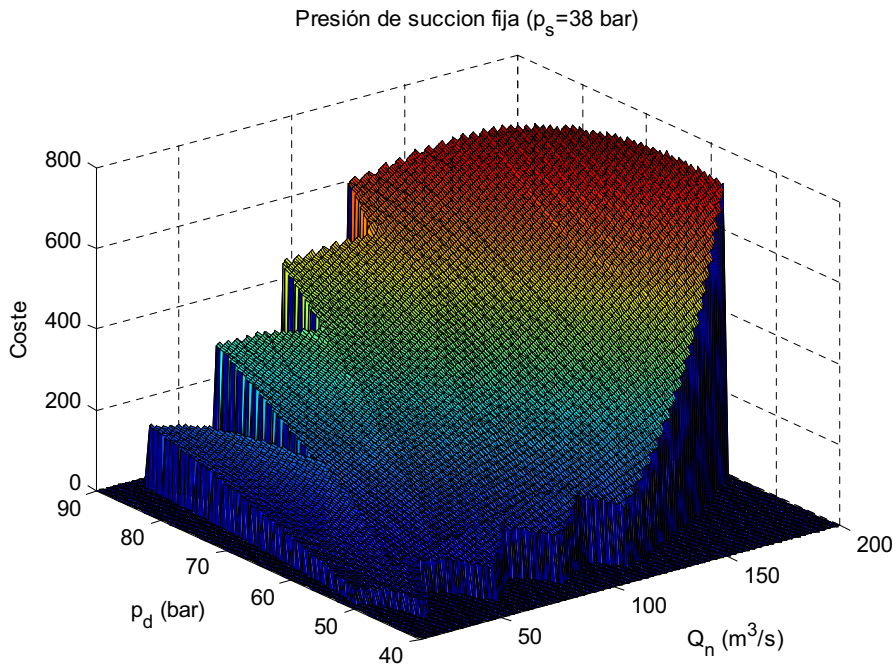


Figura 5.16: Coste mínimo de una estación con 4 compresores.

5.7 Otros elementos

Aparte de los gasoductos y las estaciones de compresión, las redes de distribución de gas poseen otros elementos que aseguran el correcto funcionamiento de las mismas. A continuación se muestra un a breve descripción de cada uno de ellos:

- Las *fuentes* están constituidas por un sistema de recolección que toma el gas de pozos u otros gasoductos. Es común en la literatura suponer que las fuentes proporcionan el gas requerido, dentro de un cierto límite mínimo y máximo de caudal de gas, a una presión constante y conocida.
- El gas es entregado a través de los gasoductos hacia los consumidores, también llamados *cargas*, en las que se especifica la variación temporal de la demanda junto con el valor de la presión a la que esta debe ser entregada.
- A veces se hace necesaria la conexión de dichos sistemas a sistemas que operan a bajas presiones. En este caso es necesario reducir la presión del gas de forma local mediante un *regulador de presión*. Por tanto, un regulador de presión efectúa la operación inversa a la de un compresor.
- Otro importante elemento son las *válvulas*. Estas permiten cortar el flujo de gas en determinadas secciones de la red. Existen otro tipo de válvulas destinadas a evitar el cambio en la dirección del flujo en algunas secciones de la red.

Capítulo VI

Desarrollo de un modelo experimental

El comportamiento físico de cada uno de los elementos de la red de distribución de gas puede ser implementado en un lenguaje de modelado con el fin de poseer un sistema experimental que reproduzca los mismos resultados que el sistema real. Para este propósito, se muestra en este *Capítulo* la utilización de MATLAB–Simulink como lenguaje de modelado y simulación. En concreto, se utilizan las *funciones–S* de MATLAB como elemento central para implementar la dinámica de cada uno de los elementos de la red, construyendo una librería Simulink de componentes. En primer lugar, se muestra la implementación del bloque diseñado para la simulación de los gasoductos. Con dicho bloque se resuelve un problema concreto para varios parámetros del método numérico seleccionado en el mismo analizando los efectos de dicha selección. A continuación se muestra la implementación del bloque diseñado para la simulación de las estaciones de compresión, analizando los posibles modos de operación de las mismas. Una vez diseñada, la librería de componentes se utiliza para resolver cuatro ejemplos de aplicación. Finalmente, se muestra el proceso de identificación de los parámetros del modelo en variables de estado en tiempo discreto utilizado como modelo de predicción en los controladores que se desarrollarán en el *Capítulo* siguiente.

Los objetivos de este capítulo son:

- Implementar de la dinámica de cada uno de los elementos de la red en un lenguaje de modelado y simulación como MATLAB–Simulink construyendo una librería de componentes.
- Utilizar la librería desarrollada para resolver varios ejemplos de aplicación mostrando la utilidad de la misma.
- Mostrar el proceso de identificación de los parámetros de un modelo en variables de estado en tiempo discreto para los gasoductos de la red. Dicho modelo será el modelo de predicción utilizado por los controladores predictivos desarrollados en el siguiente *Capítulo*.

6.1 Implementación del modelo en un computador

6.1.1 Librería de componentes en MATLAB–Simulink

Con el objetivo de poseer un sistema experimental sobre el que poder llevar a cabo diferentes experimentos, tales como simulaciones de su comportamiento o prueba de los diferentes controladores que serán diseñados en el *Capítulo 7*, se desarrolla en este *Capítulo* una librería en MATLAB–Simulink con todos los elementos existentes en una red de distribución de gas. La figura 6.1 muestra los componentes que forman dicha librería entre los que destacan los gasoductos y las estaciones de compresión. El bloque red es utilizado para simular redes complejas que no incluyan estaciones de compresión. Las fuentes son los bloques desde los que se proporciona el gas demandado con una determinada presión de salida. Las cargas son los puntos en los que se especifica la demanda. Finalmente, el controlador implementa las diferentes estrategias de control desarrolladas en el siguiente *Capítulo* para este tipo de sistemas, por ello, dicho bloque se describe en mayor detalle en el *Capítulo 7*.

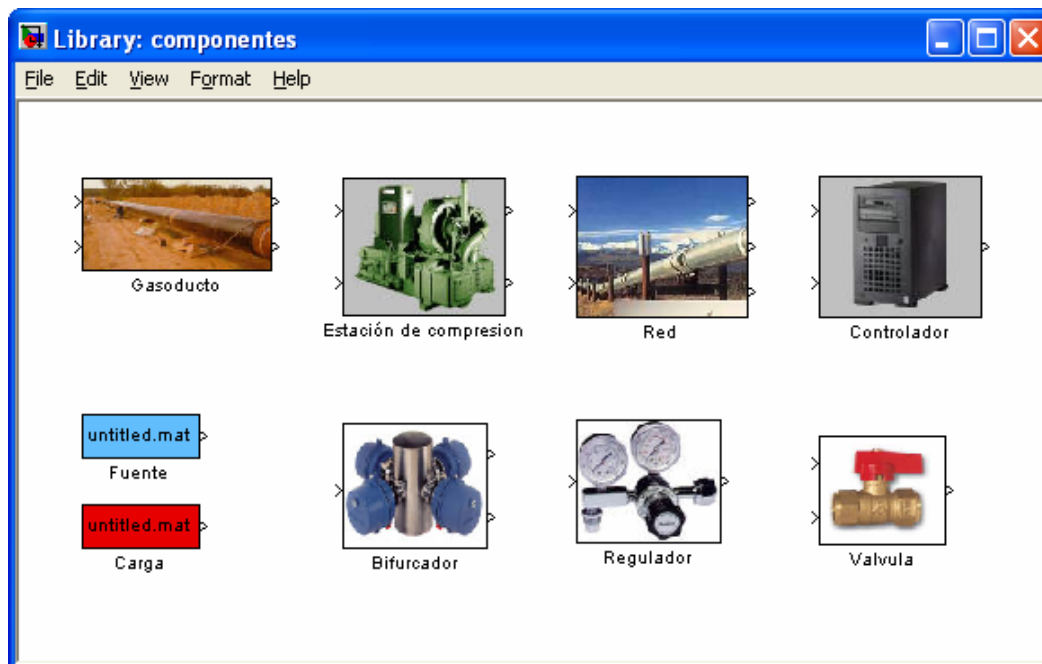


Figura 6.1: Librería desarrollada en MATLAB–Simulink.

Cada uno de estos bloques realiza una llamada a la correspondiente función que implementa la dinámica del mismo en cada paso de la simulación. Por ejemplo, la función asociada al gasoducto debe contener la implementación de los esquemas numéricos desarrollados en el *Capítulo* anterior para la simular la dinámica de

presión y caudal del gas en su interior. La función asociada a las estaciones de compresión implementará las ecuaciones mediante las que comprobar si tanto la presión como el caudal están dentro de la región de funcionamiento de cada compresión determinando el modo de funcionamiento del mismo. En el caso del controlador, la función a la que el bloque asociado llamará en cada paso de la simulación contendrá los algoritmos de control diseñados en el *Capítulo 7*. En definitiva, cada uno de estos bloques llama a una función asociada a cada uno de ellos con el código que implementa la funcionalidad del mismo. Estas funciones pueden integrarse dentro del lenguaje de modelado que utiliza MATLAB-Simulink mediante lo que se conoce como *funciones-S* [Sim03].

Mediante las *funciones-S* se pueden diseñar nuevas librerías Simulink formadas por bloques de propósito específico implementando la funcionalidad deseada. Para entender como funcionan estas funciones, primeramente es necesario entender cómo Simulink simula un modelo, lo que requiere a su vez el entendimiento de las relaciones entre las variables involucradas en cada bloque Simulink.

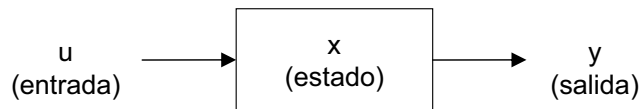


Figura 6.2: Estructura de un bloque Simulink.

Un bloque Simulink consiste en un conjunto de entradas, estados y salidas, en donde dichas salidas son función del paso temporal, las entradas y los estados del bloque de acuerdo con las relaciones mostradas en (6.1), donde $x = x_c + x_d$.

$$\begin{aligned}
 y &= f_o(t, x, u) && \text{(Salidas)} \\
 \dot{x}_c &= f_d(t, x, u) && \text{(Derivadas)} \\
 x_{d_{k+1}} &= f_u(t, x, u) && \text{(Actualización)}
 \end{aligned} \tag{6.1}$$

La ejecución de un modelo Simulink tiene lugar en una serie de etapas tal y como se muestra en la figura 6.3. En primer lugar está la etapa de inicialización. En ella, Simulink incorpora los bloques de la librería al modelo, chequea las dimensiones y tipos de los datos, así como el paso temporal de la simulación, evalúa los parámetros de cada uno de los bloques incluidos en el modelo, determina su orden de ejecución y reserva espacio en memoria. A continuación, Simulink entra en lo que se denomina el lazo de simulación, en el que cada ejecución del mismo se denomina paso de simulación. Durante cada uno de estos pasos de simulación, Simulink ejecuta cada uno de los bloques incluidos en el modelo en el orden establecido en la etapa de

inicialización. Para cada bloque, Simulink invoca a las funciones que calculan los estados, derivadas y salidas en el instante temporal correspondiente. Todo este proceso continúa hasta que se completa el tiempo de simulación establecido.

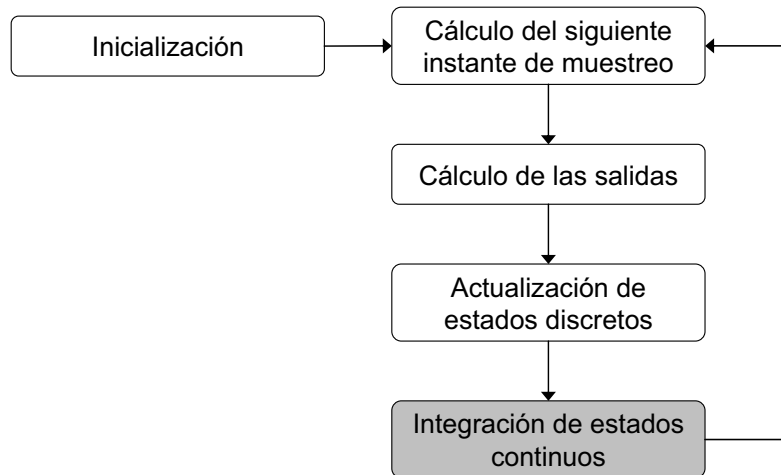


Figura 6.3: Etapas del proceso de simulación en Simulink.

Cada *función-S* invoca a una serie de métodos cada uno de los cuales implementa las tareas requeridas en cada uno de los pasos de simulación. En cada etapa de la simulación de un modelo, Simulink llama al método apropiado de la *función-S* de cada uno de los bloques incluidos en el modelo. Las tareas implementadas en cada uno de los métodos de una *función-S* son:

- *Inicialización:* Antes de la primera pasada por el lazo de simulación, Simulink inicializa la *función-S*. Durante esta etapa, Simulink inicializa una estructura con cierta información sobre la *función-S*, fija el número y dimensiones de los puertos de entrada y salida, fija los instantes de muestreo y reserva el espacio en memoria necesario para ejecutar el modelo.
- *Cálculo el siguiente instante de muestreo:* Si el bloque utiliza un paso temporal variable, esta etapa determina la longitud de dicho paso a utilizar en el siguiente instante de muestreo.
- *Cálculo de las salidas:* Determina el valor de cada uno de los puertos de salida para el paso temporal actual.
- *Actualización de los estados discretos:* Este método actualiza los estados de cada uno de los bloques incluidos en el modelo.

- *Integración de estados continuos*: Esta etapa se aplica sobre modelos que contengan estados continuos. En tales casos, Simulink llama a las porciones de código de la *función-S* que contienen el cálculo de las salidas y las derivadas para poder determinar el estado actual.

Una de las principales ventajas de implementar los modelos desarrollados en el *Capítulo* anterior mediante *funciones-S* es que los bloques de cada componente así contruidos pueden ser usados tantas veces como se quiera dentro de un modelo Simulink, variando los parámetros de cada instancia de los mismos. Por ejemplo, si se desea crear un modelo de red con tres poliductos con diferentes características, tan solo hay que arrastrar tres bloques *gasoducto* dentro del modelo Simulink y pinchar sobre los mismos para modificar sus parámetros (longitud, diámetro, etc...). Sin embargo, el código que implementa el esquema numérico necesario para simular la dinámica de cada gasoducto (Crank-Nicolson o Características) es común a los tres bloques. Dicho código es invocado en la etapa de actualización de los estados discretos desde la *función-S* de cada gasoducto. Una vez arrastrados todos los componentes de la red a simular sobre el esquemático de Simulink, tan solo queda conectarlos adecuadamente para formar el modelo de la misma. Por tanto, tal y como puede verse la simulación de redes de gasoductos mediante MATLAB-Simulink es fácilmente llevada a cabo de forma visual e intuitiva gracias a la librería desarrollada. A continuación se hace una descripción detallada de cada uno de los elementos que la componen, prestando especial atención a gasoductos y estaciones de compresión.

6.1.2 Implementación de un gasoducto

Como puede verse en la figura 6.1, el bloque desarrollado para la simulación de la dinámica de presión y caudal en el gasoducto contiene dos entradas y dos salidas, correspondientes a la presión y el caudal. La figura 6.4 muestra la implementación interna de dicho bloque que, como puede verse, consta de la *función-S* “sgasoducto”. Dicha función recibe desde los puertos de entrada la presión con la que se inyecta gas a la entrada del gasoducto y la demanda de caudal a su salida (condiciones de contorno necesarias para la integración numérica de los modelos A ó B), y proporciona a través de los puertos de salida la presión y el caudal a la salida del gasoducto, y el flujo de gas a la entrada. Además, dichas señales pasan a través de unos retenedores de orden cero (ZOH, de Zero Order Hold en inglés) que simulan el muestreo en la toma de datos de entrada-salida cada T segundos. Dicho periodo se refiere al intervalo de tiempo tras el cual se toma una muestra de la salida, y por tanto, no debe confundirse con el paso temporal utilizado en la integración numérica de las ecuaciones diferenciales que rigen la dinámica del sistema.

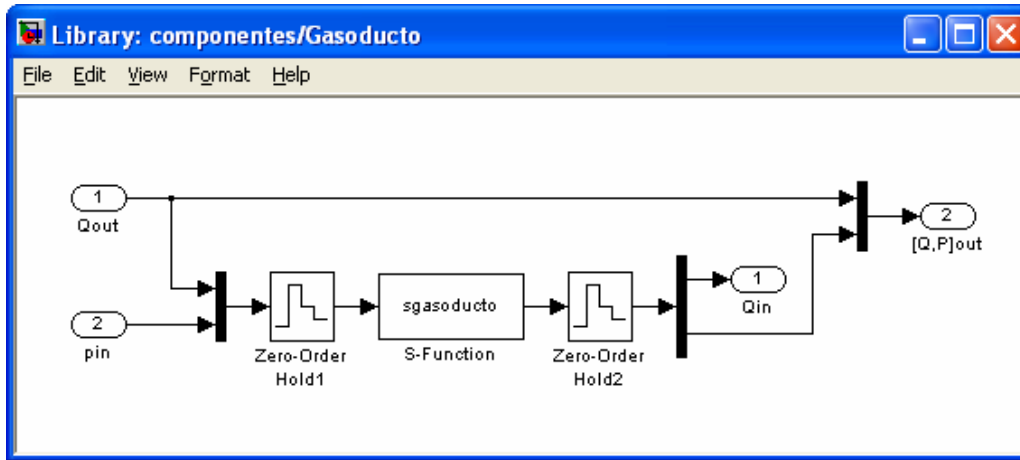


Figura 6.4: Implementación de un gasoducto.

La figura 6.5 muestra un bloque gasoducto arrastrado dentro de un modelo Simulink (esquemático). Pulsando dos veces sobre el mismo aparece la ventana desde la que configurar cada una de las instancias del bloque gasoducto incluidas en un modelo. Además, se incluye una casilla que permite especificar el periodo de muestreo T en segundos.

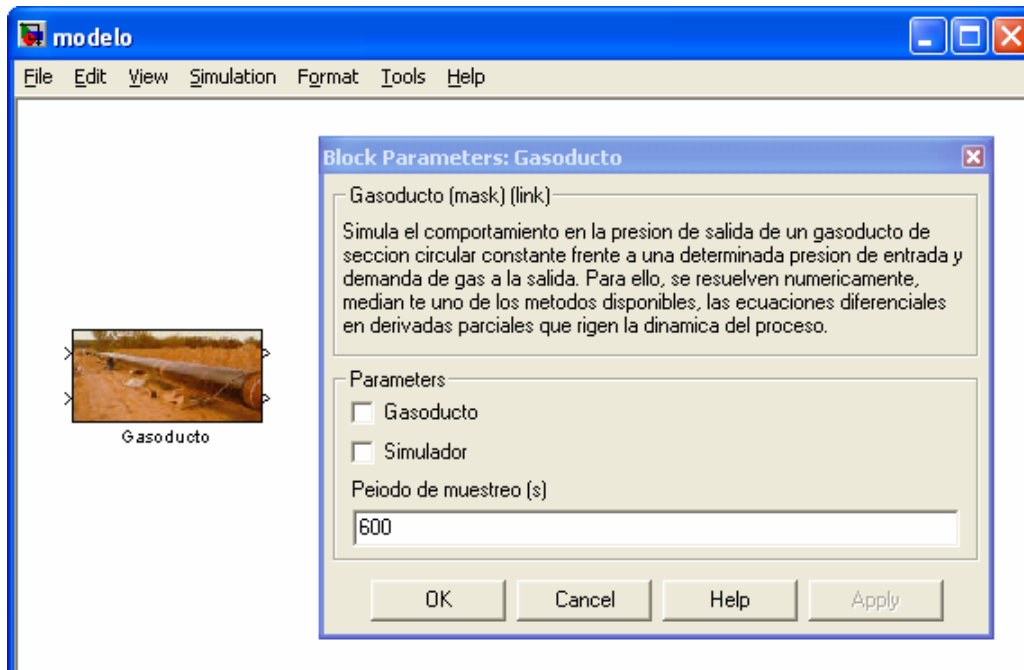


Figura 6.5: Parámetros de un gasoducto incluido en un modelo.

Como puede verse, se distinguen dos pestañas desde las que modificar tanto los parámetros del gasoducto (pestaña gasoducto) como los del método numérico utilizado para integrar las ecuaciones diferenciales mediante los esquemas desarrollados en el *Capítulo* anterior (pestaña simulador). La figura 6.6 muestra como se despliega la ventana de configuración al pulsar sobre cualquiera de estas dos pestañas. En la parte izquierda se muestran los parámetros que pueden especificarse al pulsar la pestaña gasoducto. Entre ellos se encuentran tanto las características del gasoducto (longitud, diámetro, inclinación, etc...), como las del gas que circula por su interior (densidad, temperatura, etc...). Además se deben especificar los valores iniciales de presión a la entrada del gasoducto y caudal de gas desde los que comenzar la simulación (condiciones iniciales). En la parte derecha se muestran los parámetros configurables al pinchar la pestaña simulador. En primer lugar se selecciona el esquema numérico utilizado para simular la dinámica del sistema (Crank–Nicolson o Características) y a continuación el número de puntos del mallado espacial. Normalmente el paso temporal queda determinado mediante la ecuación (5.55) una vez seleccionado el número de puntos del mallado espacial. De ser así, el esquema numérico seleccionado integra las ecuaciones diferenciales del sistema a lo largo de sus curvas características. Sin embargo, para el método de Crank–Nicolson es posible seleccionar un paso temporal diferente que no tiene por que estar ligado con el espacial a través de la ecuación (5.55). Para hacer esto, ha de pincharse la pestaña “paso temporal fijo”.

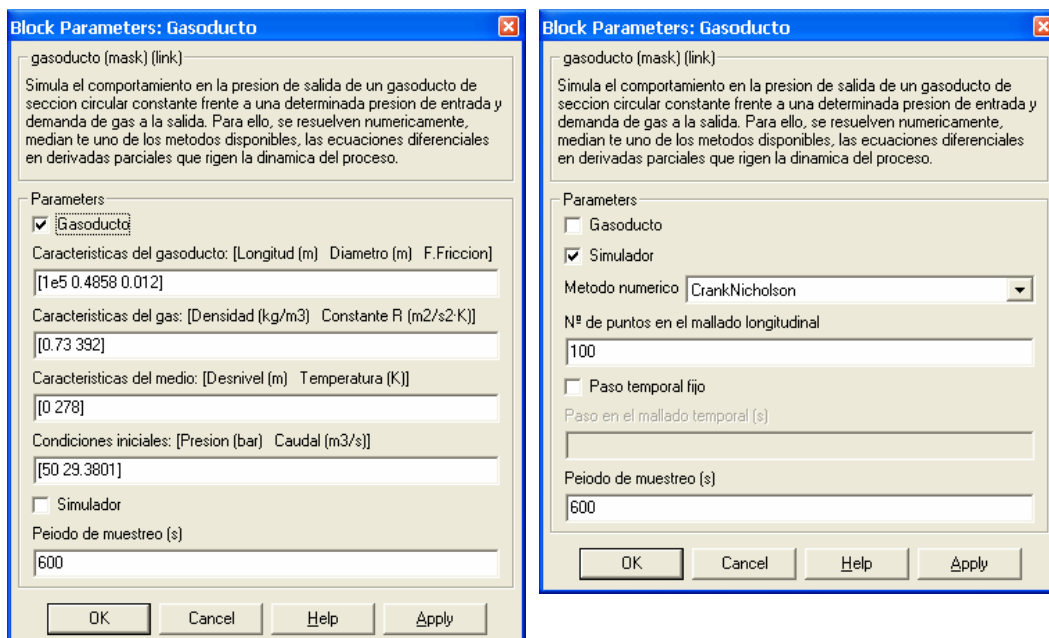


Figura 6.6: Configuración de un gasoducto.

6.1.3 Implementación de una estación de compresión

En cuanto al bloque desarrollado para simular una estación de compresión, se trata de un bloque sin dinámica alguna y cuya única función es comprimir el flujo de gas a su entrada a la presión de descarga especificada. Además, calcula el coste de la operación y número de compresores que se deben poner en funcionamiento para que dicho coste sea mínimo. La figura 6.7 muestra la implementación interna del bloque desarrollado para simular la funcionalidad de una estación de compresión. Como puede verse, a través del primer puerto de entrada se proporciona el flujo de gas a la entrada de la estación junto con la presión a la que se encuentra (presión de succión), mientras que a través del segundo se indica la presión a la que la estación debe comprimir el gas (presión de descarga). Esta última es redirigida automáticamente al primer puerto de salida proporcionando el gas a la salida de la estación a la presión de descarga, a la vez que es utilizada junto con las otras dos entradas para determinar mediante una función MATLAB el coste de la operación y el número de compresores a poner en marcha. En la sección 6.3.2 se verá con mayor detalle la implementación interna de dicha función.

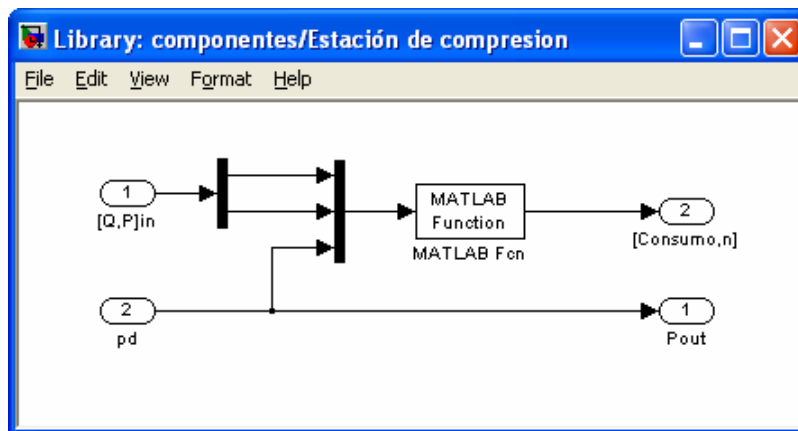


Figura 6.7: Implementación de una estación de compresión.

La figura 6.8 muestra una estación de compresión dentro de un modelo Simulink. Pulsando dos veces sobre la misma aparece una ventana desde la que configurar cada una de las instancias de dicho bloque incluidas en un modelo. La figura 6.8 muestra la ventana desde la que modificar los parámetros de cada una de las instancias del bloque compresor incluido en un modelo. Como puede verse, los parámetros que caracterizan una estación de compresión son el número de compresores de los que ésta consta, los coeficientes de las expresiones mostradas en las ecuaciones (5.147) y (5.148) del Capítulo anterior para la altura adiabática (H) y la eficiencia (η), los

valores máximo y mínimo para la velocidad (S), el flujo de gas (Q) y la presión de succión (p_s). Además, se indican ciertos parámetros característicos del gas.

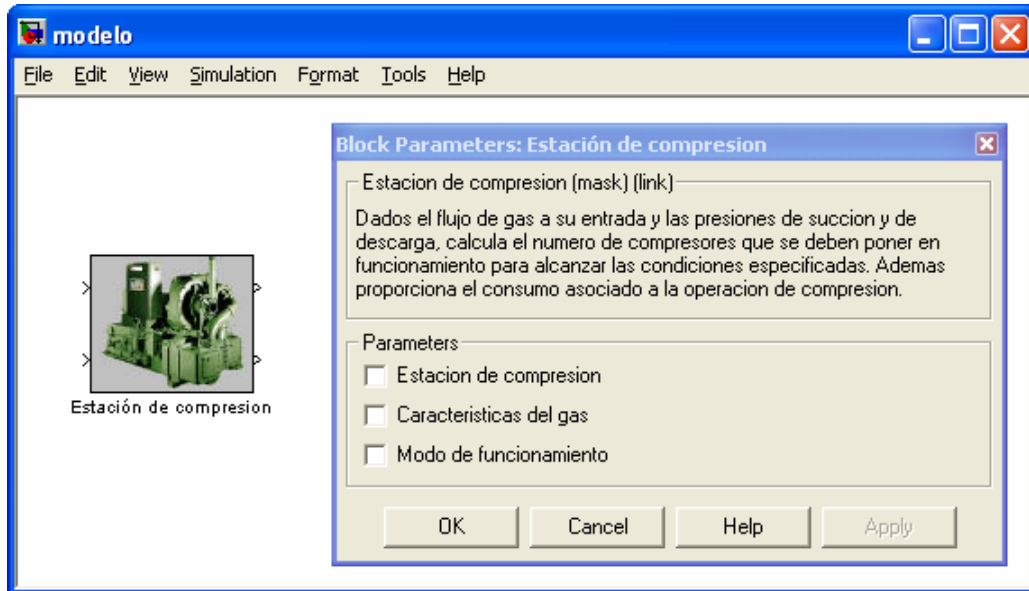


Figura 6.8: Parámetros de una estación de compresión incluida en un modelo.

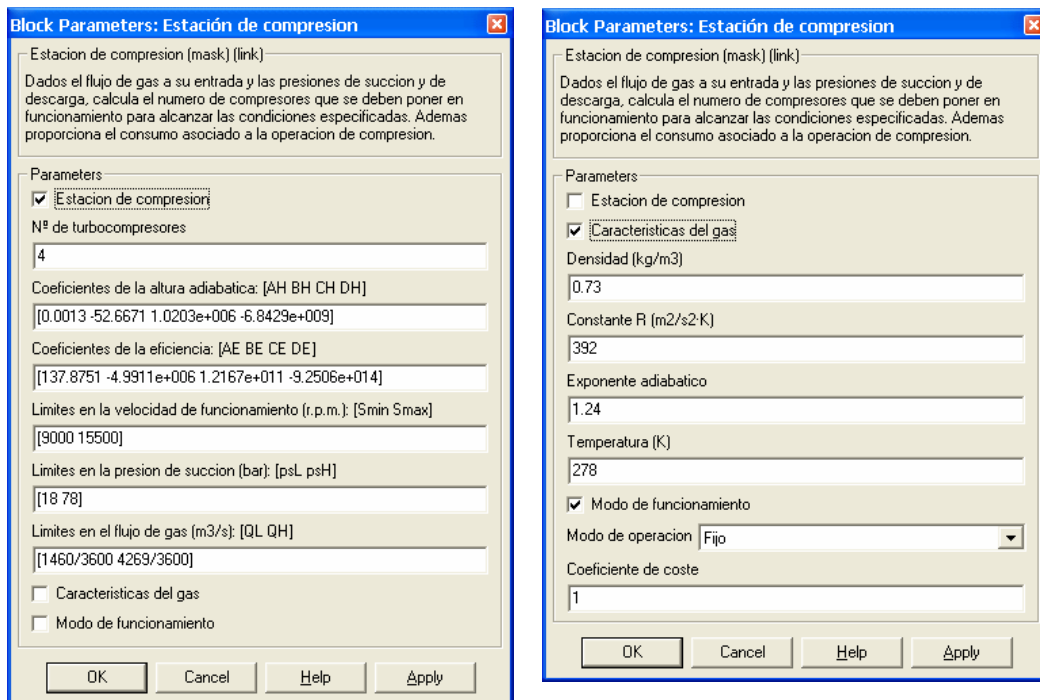


Figura 6.9: Configuración de una estación de compresión.

6.1.4 Otros bloques implementados

Otros elementos implementados en la librería desarrollada son las *fuentes*, *cargas*, *bifurcadores*, *reguladores de presión* y *válvulas*. Las *fuentes* proporcionan el gas requerido a una presión constante y conocida a través de un fichero de datos. Análogamente, en las *cargas* se especifica la variación temporal de la demanda. La figura 6.10 muestra un bifurcador, un regulador y una válvula incluidas en un modelo Simulink. Además, muestra las ventanas desde las que configurar sus parámetros.

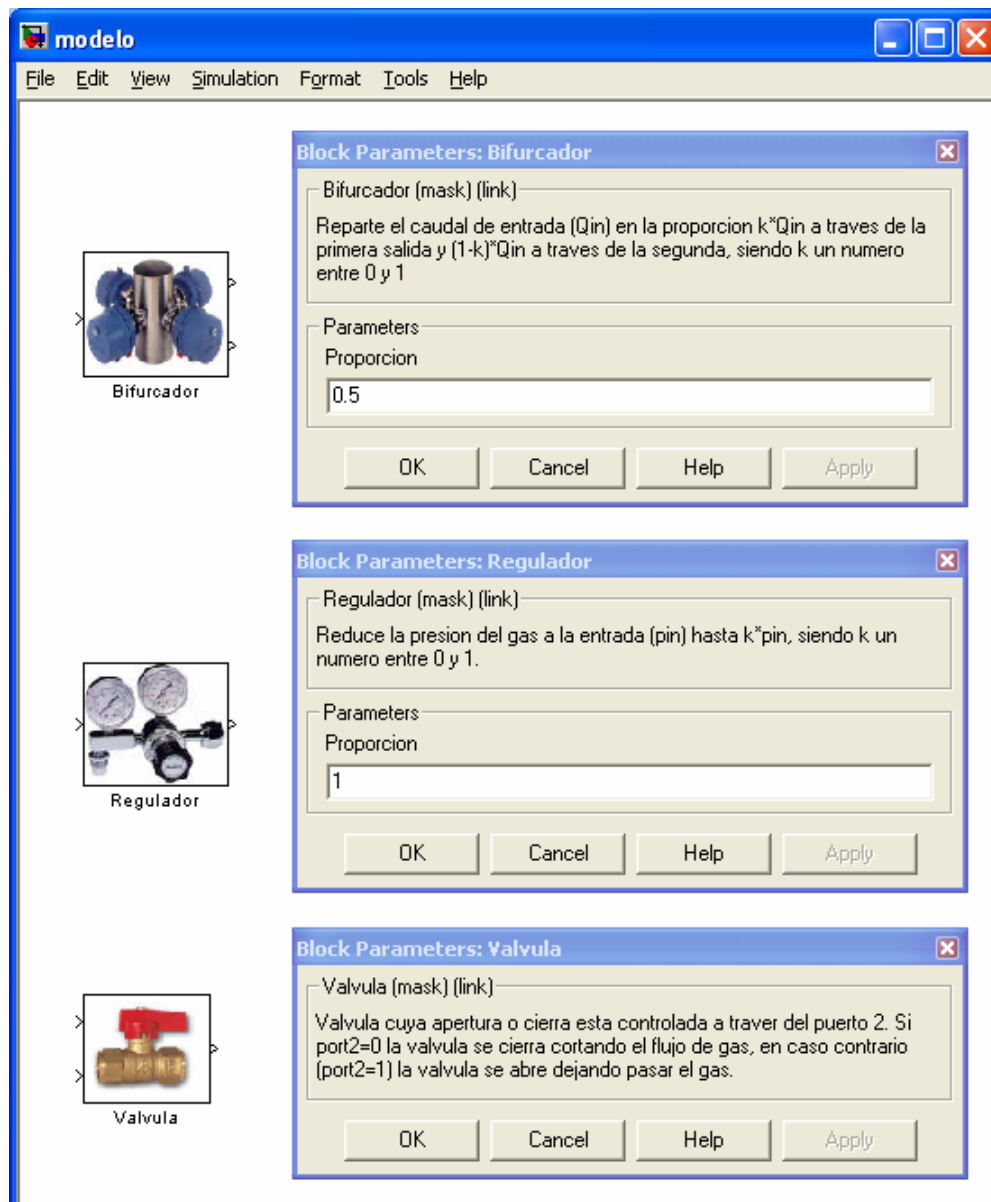


Figura 6.10: Parámetros de los bifurcadores, reguladores y válvulas.

6.2 Gasoductos

Antes de pasar a resolver varios ejemplos de aplicación mediante la utilización de la librería desarrollada, se comparan aquí los resultados que se obtienen al simular la dinámica de presión y caudal de un único gasoducto utilizando los dos esquemas numéricos desarrollados en el *Capítulo* anterior. En concreto, la librería integra el modelo A cuando se selecciona el método de las Características, y el modelo B cuando se selecciona el método de Crank–Nicolson. Además, se muestra el efecto que tiene sobre los resultados obtenidos la variación de los diferentes parámetros característicos del método numérico seleccionado (pasos de los mallados espacial y temporal).

6.2.1 Condiciones iniciales y de contorno

En esta sección se muestran los datos necesarios a la hora de simular la variación temporal de la presión y el caudal en puntos discretos de un gasoducto recto de sección circular constante. Además, se muestran los cálculos llevados a cabo para la determinación del estado inicial a partir del cual comenzar la simulación, así como las condiciones de contorno necesarias.

Las condiciones iniciales pueden determinarse a partir del estado del gasoducto en el momento anterior al comienzo de la simulación del proceso transitorio. Supóngase que el estado inicial se encuentra en $t=0$. Así, $Q_n(x,0)=f_Q(x)$ será el caudal inicial y $p(x,0)=f_p(x)$ el perfil inicial de presiones a lo largo del gasoducto. Supóngase además un estado estacionario para el estado inicial. En estas condiciones, los perfiles de presión y caudal a lo largo del gasoducto se pueden calcular imponiendo las condiciones mostradas en la ecuación (6.2) sobre el sistema de EDPs que rige la dinámica del proceso. Utilizando las ecuaciones (5.26), correspondientes al modelo A descrito en el *Capítulo* anterior, el estado estacionario queda determinado por el sistema mostrado en la ecuación (6.3).

$$\frac{\partial p}{\partial t} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial Q_n}{\partial t} = 0 \quad (6.2)$$

$$0 = -\frac{c^2 \rho_n}{S} \frac{dQ_n}{dx} \quad (6.3)$$

$$0 = -\frac{S}{\rho_n} \frac{dp}{dx} - \frac{2fc^2 \rho_n}{DS} \frac{Q_n^2}{p} - \frac{Sg \sin \theta}{\rho_n c^2} p$$

De la primera ecuación del sistema (6.3) se ve que $Q_n(x,0)=Q_{n0}=cte$, mientras que la segunda se puede escribir de la forma mostrada en la ecuación (6.4), ó (6.5) con la ayuda de los coeficientes σ y ξ . Resolviendo dicha ecuación, se obtiene el perfil de

presión mostrado en la ecuación (6.6) para el caso de un gasoducto inclinado, o la ecuación (6.7) para el caso de un gasoducto recto.

$$\frac{dp^2}{dx} + \frac{2g \sin \theta}{c^2} p^2 + \frac{f}{D} \left(\frac{2\rho_n c Q_{n0}}{S} \right)^2 = 0 \quad (6.4)$$

$$\frac{dp^2}{dx} + \sigma p^2 + \xi = 0 \quad (6.5)$$

$$p(x) = \sqrt{\left(p(0)^2 - \frac{\xi}{\sigma} (e^{\xi x} - 1) \right) e^{-\xi x}} \quad (6.6)$$

$$p(x) = \sqrt{p(0)^2 - \xi x} \quad (6.7)$$

Teniendo en cuenta que $c^2=ZRT$, los coeficientes σ y ξ contienen una serie de términos tales como T , Z , R y f que resultan difíciles de conocer con precisión y pueden hacer que en determinadas ocasiones los valores de la caída de presión a lo largo del gasoducto se alejen bastante de los que se obtendrían con un buen conocimiento de los mismos. De estos factores, pueden suponerse valores medios aproximados para T , f y R . El valor de Z se puede aproximar de forma recursiva a partir de un valor inicial y con ayuda de las expresiones mostradas en la ecuación (6.8). La figura 6.11 muestra un diagrama de flujo que implementa dicho cálculo.

$$Z = 1 - \frac{p_{ave}}{390} \quad \text{donde} \quad p_{ave} = \frac{1}{2}(p(0) + p(L)) \quad (6.8)$$

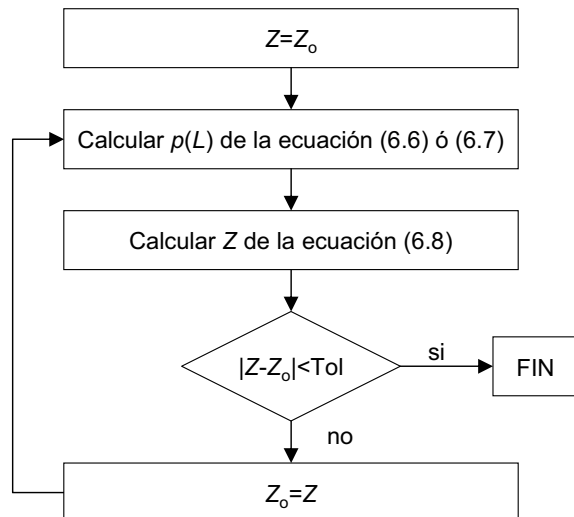


Figura 6.11: Algoritmo para el cálculo de Z .

Mediante dicho algoritmo se obtienen los valores de Z y $p(L)$ en el estacionario, a partir de los cuales la presión a lo largo del gasoducto en condiciones de estado estacionario se puede calcular mediante las ecuaciones (6.6) ó (6.7) en función de si el gasoducto está inclinado o no respectivamente. Dicha ecuación determina el estado inicial para la presión a lo largo de todo el gasoducto. Recuérdese, que el valor del caudal en unas condiciones de presión específicas viene determinado a partir del caudal en condiciones normales mediante las ecuaciones (5.151) y (5.152).

Las condiciones de contorno dependen de la forma en la que el gasoducto es abastecido. Se supone que el gasoducto bajo consideración toma el gas desde una estación de compresión en $x=0$ y abastece a un consumidor situado en $x=L$ según una curva de demanda variable con el tiempo $Q_n(L,t)$. Dicha función suele ser una función periódica en el tiempo con periodo de un día. La figura 6.12 muestra una curva de demanda típica durante un periodo de dos días. Se supone además que introduciendo apropiados cambios en la capacidad de la estación de compresión la presión a la entrada del gasoducto se puede mantener constante. Otros valores que definen el problema a resolver son:

$$\begin{array}{llll}
 L = 10^5 \text{ m} & \rho_n = 0.73 \text{ kg/m}^3 & p(0,t) = 50 \text{ bar} & f = 0.003 \\
 D = 0.6 \text{ m} & R = 392 \text{ m}^2/(\text{s}^2\text{K}) & Q_n(x,0) = 50 \text{ m}^3/\text{s} & \\
 H = 100 \text{ m} & T = 278 \text{ K} & t_{\max} = 2 \text{ dias} &
 \end{array}$$

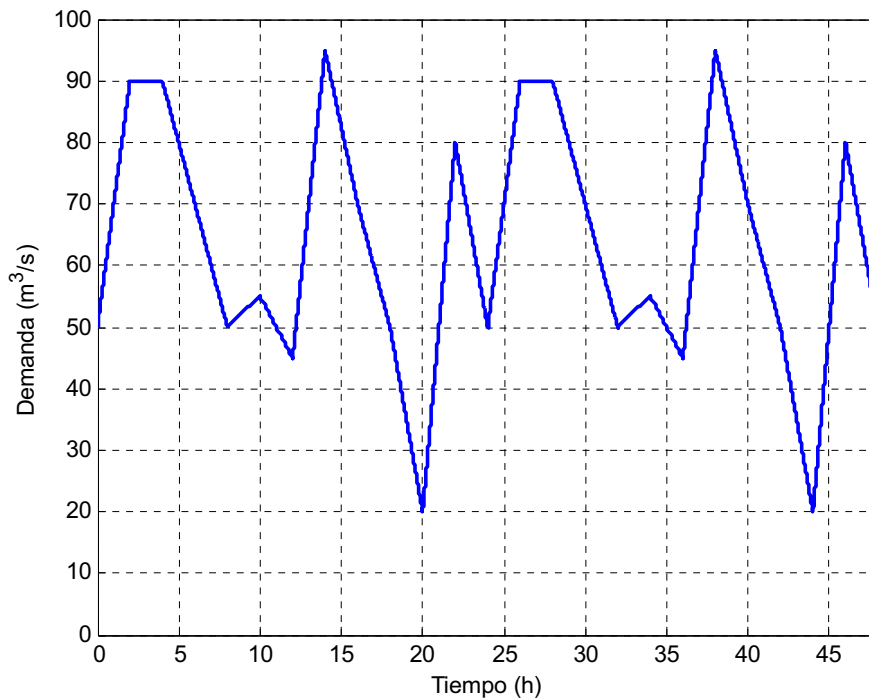


Figura 6.12: Curva típica de demanda (2 días).

Dados estos valores junto con la curva de demanda mostrada en la figura 6.12, se puede calcular la variación temporal de la presión a la salida del gasoducto resolviendo numéricamente los modelos A y B mediante cualquiera de los esquemas numéricos desarrollados. En las secciones siguientes se resuelven dichos modelos para varios valores de los mallados espacial y temporal, viendo así su efecto sobre los resultados obtenidos.

6.2.2 Integración numérica del modelo A

Tal y como se vio en el *Capítulo 5*, el modelo A se puede integrar numéricamente mediante el método de las características. Integrando a lo largo de las curvas características sobre una malla de $I=20$ puntos, se obtiene el perfil de presión a lo largo del gasoducto durante 2 días mostrado en la figura 6.13. En ella, puede verse como la presión a la entrada se mantiene constante como corresponde a la condición de contorno impuesta. También se aprecia como la respuesta de la presión al comportamiento cíclico del caudal demandado en la salida decrece monótonamente desde la salida hasta la entrada del gasoducto, lo que indica que en este caso el transitorio se propaga desde la salida hasta la entrada del gasoducto.

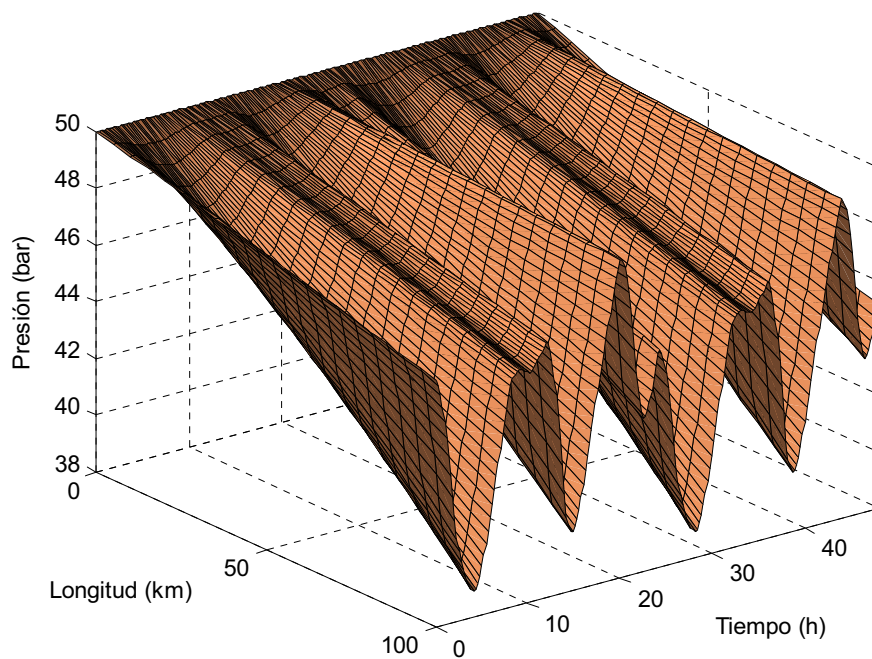


Figura 6.13: Perfil de presión obtenido mediante el método de las características.

En la descripción del esquema numérico utilizado mostrada en el *Capítulo 5* se vio como la ecuación (5.55) determinaba la relación que se ha de cumplir entre los pasos espacial y temporal para que la integración se haga adecuadamente sobre las curvas características del sistema. Por tanto, fijada una malla espacial sobre la que integrar, es decir, un Δx o número de puntos a lo largo del gasoducto, I , el paso temporal, Δt , queda determinado por esta ligadura. Por supuesto, para un mayor valor de I se aumenta la precisión de los resultados obtenidos, ya que disminuyen los valores de Δx y Δt , pero en contrapartida se aumenta el número de cálculos necesarios para obtenerla, y en consecuencia, el tiempo de cómputo. La figura 6.14 muestra el efecto que tiene sobre el perfil de presión a la salida del gasoducto la utilización de diferentes valores del mallado espacial (I).

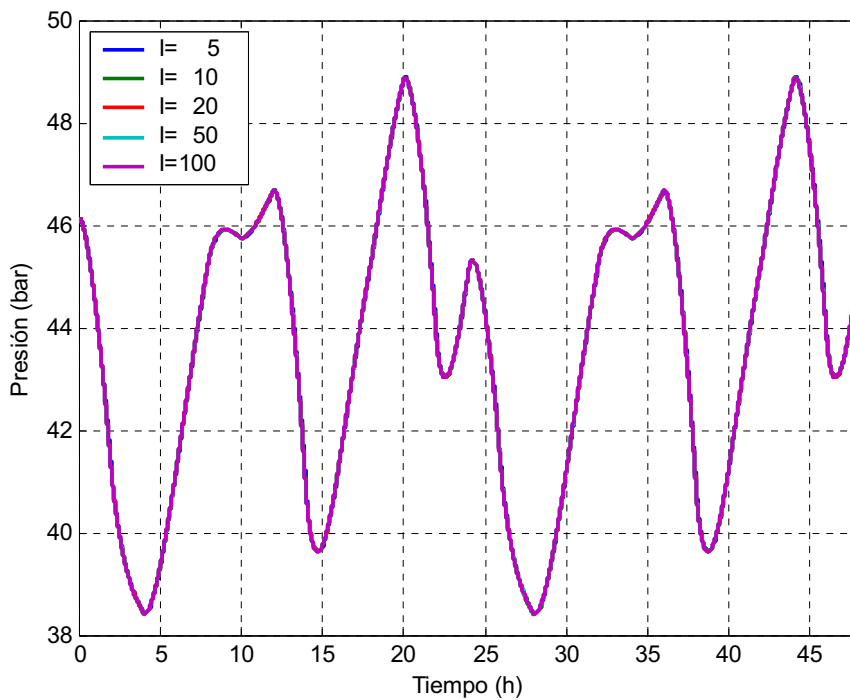


Figura 6.14: Presión de salida para varios valores de I .

Tal y como puede verse, en este caso no es necesario aumentar en exceso en número de puntos del mallado espacial, ya que con $I=5$ se obtienen prácticamente los mismos resultados que los obtenidos para $I=100$. Esto es debido a que la dinámica del sistema es lo suficientemente lenta como para que con 5 puntos los pasos Δx y Δt sean lo suficientemente pequeños como para reproducir toda la dinámica del sistema. Finalmente, la tabla 6.1 muestra los tiempos de cómputo empleados para obtener cada una de estas soluciones.

Tabla 6.1: Tiempos de ejecución para el método de las características

Solución	I	T _{CPU} (s)
1	5	1.6320
2	10	2.8940
3	20	7.5710
4	50	19.4680
5	100	55.5600

Antes de pasar a resolver el modelo B mediante el método de Crank–Nicolson, se puede tratar de ver qué ocurre cuando se utiliza el método de las características sobre una malla que no satisface la condición (5.55). En concreto, dados los datos del problema y una malla espacial con $I=20$, se puede ver que el paso temporal debe valer $\Delta t = \Delta x/c = 16.18$ segundos para que se satisfaga la condición (5.55). La figura 6.15 muestra los resultados obtenidos al utilizar diferentes valores de Δt , alguno de los cuales no satisfacen tal condición. En concreto, se utiliza $\Delta T = [0.1, 1, 10, 100] \cdot \Delta t$. Como puede verse, al tomar un valor por encima del impuesto en la ecuación (5.55) el cálculo es directamente erróneo ya que el perfil de presión no responde al comportamiento del caudal impuesto como condición de contorno a la salida del gasoducto.

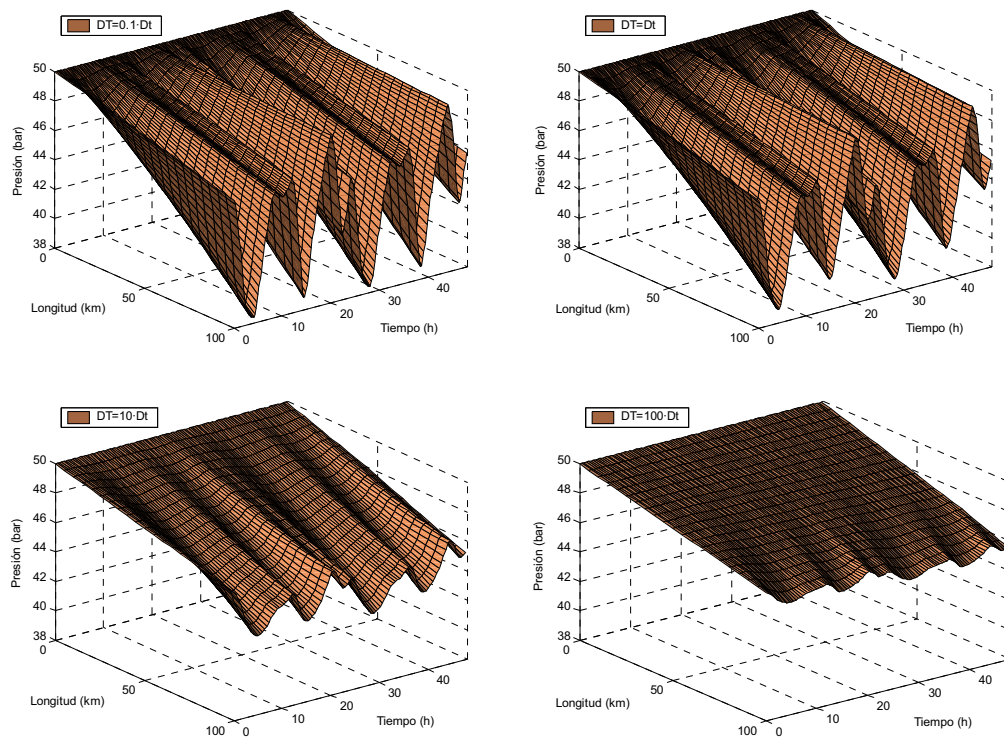


Figura 6.15: Perfil de presión obtenido sin utilizar la ligadura (5.55).

6.2.3 Integración numérica del modelo B

Tal y como se vio en el *Capítulo 5*, el modelo B se puede integrar numéricamente mediante el método de Crank–Nicolson. En este caso, es necesario conocer en cada instante el valor de la presión a la salida del gasoducto en el instante siguiente para establecer la condición de contorno ($g_{I,j+1}=p^2_{I,j+1}$) mostrada en la ecuación (5.79). Para obtener dicho valor, se puede asumir que el flujo es estacionario a lo largo del último elemento discreto del gasoducto, es decir, entre x_{L-1} y x_L . Así, evaluando la ecuación (6.6) para dicho tramo en el instante t_{j+1} , se obtiene la ecuación (6.9), donde se ha puesto $p_{L-1,j}$ en lugar de $p_{L-1,j+1}$ para aproximar dicho valor dado su desconocimiento hasta el instante siguiente, y $Q_{n0}=Q_{nL,j+1}$ impuesto por la condición de contorno.

$$p_{I,j+1} = \sqrt{\left(p_{I-1,j}^2 - \frac{\xi}{\sigma} (e^{\xi x} - 1) \right) e^{-\xi x}} \quad (6.9)$$

Tras ejecutar el esquema numérico desarrollado para simular dicho modelo (Crank–Nicolson) sobre un mallado $I=20$ y Δt fijado mediante la ecuación (5.55), se obtiene el perfil de presión mostrado en la figura 6.16. Como puede verse, la respuesta obtenida es similar a la mostrada en la figura 6.13 para el método de las características ejecutado sobre el modelo A.

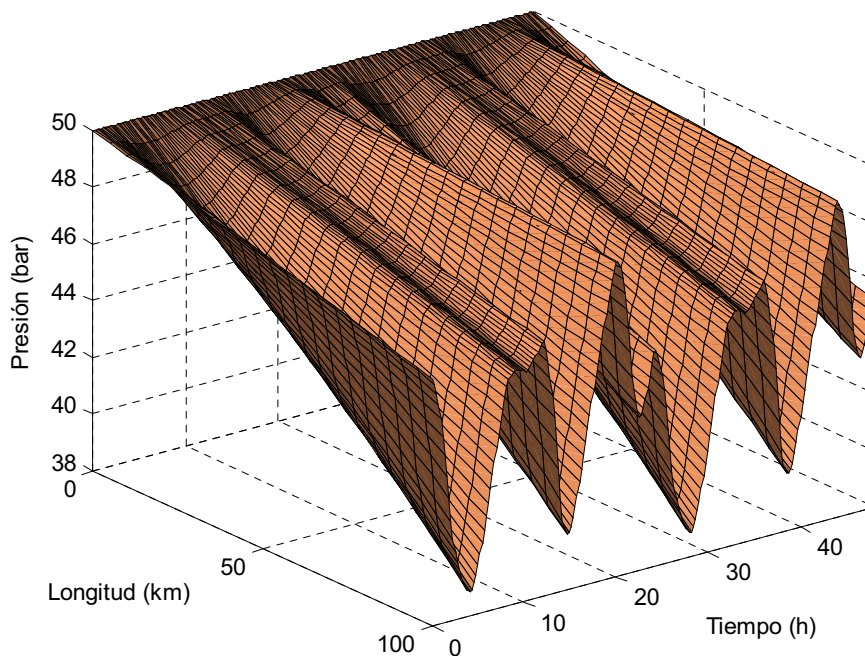


Figura 6.16: Perfil de presión obtenido mediante el método de Crank–Nicolson.

En este caso, al contrario de lo que ocurría con el método de las características aplicado sobre el modelo A, el perfil de presión obtenido no depende de ninguna relación entre los pasos Δx y Δt utilizados. Esto es debido a que el método de Crank–Nicolson es incondicionalmente estable y consistente por lo que la convergencia del esquema numérico asociado no depende de los valores de Δx y Δt . Para ver esto, puede repetirse el experimento llevado a cabo para obtener los perfiles de presión mostrados en la figura 6.15 mediante el método de las características. Los resultados al utilizar el método de Crank–Nicolson se muestran en la figura 6.17.

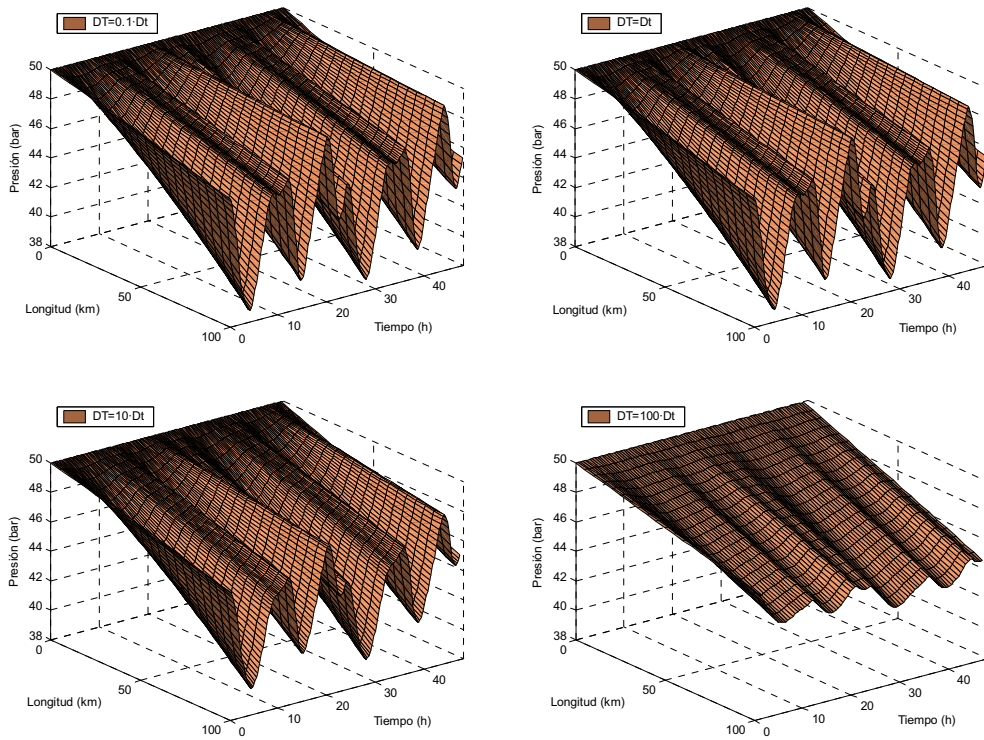


Figura 6.17: Perfil de presión obtenido sin utilizar la ligadura (5.55).

Tal y como puede verse, al contrario de lo que ocurría con el método de las características, en todos los casos el perfil de presiones responde a la curva de caudal impuesta como condición de contorno a la salida del gasoducto. Así todos los perfiles de presión son similares y la única diferencia se encuentra en los valores de la presión sobre el mismo. Por tanto, la elección entre uno u otro perfil dependerá en este caso del grado de precisión que se desee obtener en los resultados. En contra, se encuentra un aumento en el tiempo de cómputo para valores pequeños de Δx y Δt , por lo que lo usual es llegar a un compromiso entre tiempo de cómputo y precisión de los

resultados. A continuación, se muestra el procedimiento a seguir para la correcta elección de los valores de Δx y Δt .

En primer lugar, vamos a seleccionar el valor de Δt . Para ello, debemos tener en cuenta que la condición de contorno en $x=L$ impuesta mediante la ecuación (6.9) aproxima el valor de $p_{L-1,j+1}$ mediante $p_{L-1,j}$. Por tanto, Δt deberá ser lo suficientemente pequeño como para que dicha aproximación sea buena. Para encontrar dicho valor, podemos ir reduciendo Δt hasta conseguir que los resultados apenas varíen. Los resultados obtenidos para simulaciones que van desde $\Delta t=1$ s hasta $\Delta t=600$ s con una malla de $I=20$ puntos se muestran en la figura 6.18. En ella, puede verse como para $\Delta t \leq 50$ los resultados apenas varían. Sin embargo, para valores $\Delta t > 50$ la aproximación llevada a cabo por la ecuación (6.9) deja de ser válida y los resultados obtenidos en la simulación del mismo proceso comienzan a diferir por el hecho de cambiar el paso temporal utilizado en la resolución numérica de las ecuaciones.

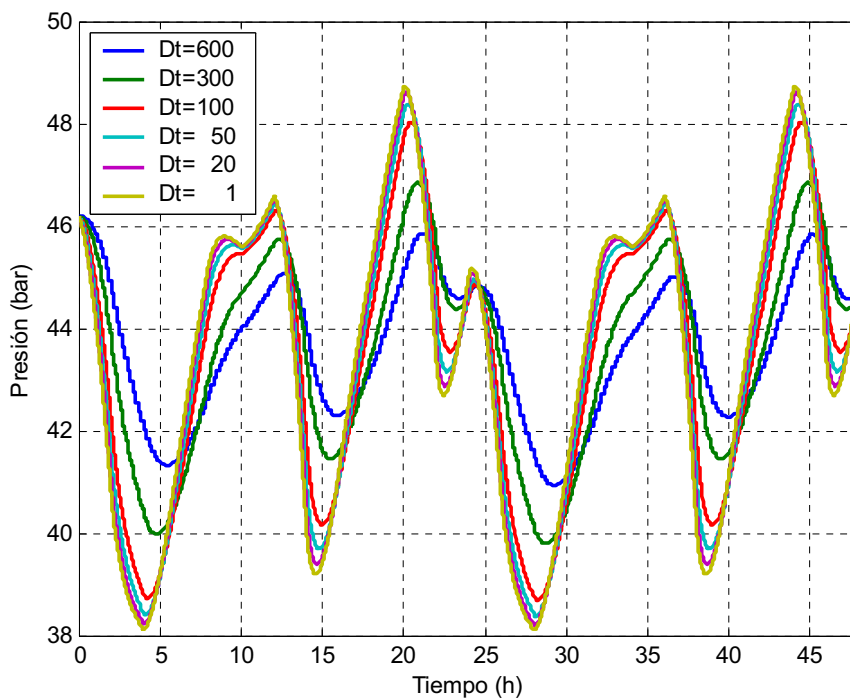


Figura 6.18: Presión de salida para varios valores de Δt e $I=20$.

Para dejar más clara la dependencia de los resultados con la adecuada elección del paso temporal, se puede tratar de ver el efecto que tiene sobre los mismos la variación del paso espacial ($I=20$ e $I=100$) para una buena o mala elección de Δt . La figura 6.19 muestra la comparativa entre ambas simulaciones en dos casos diferentes, a la izquierda de dicha figura se muestran los resultados obtenidos en el caso de una

buena elección del paso temporal ($\Delta t=20s$), mientras que en la figura de la derecha se muestran los resultados obtenidos tras una mala elección del paso temporal ($\Delta t=300s$).

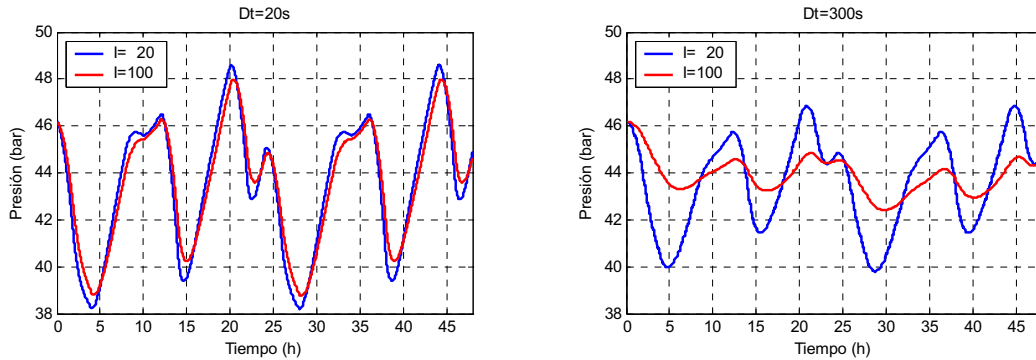


Figura 6.19: Diferencia entre una buena o una mala elección de Δt .

La grafica de la izquierda en la figura 6.19 muestra como una buena elección del paso temporal hace que los resultados obtenidos no dependan en exceso de la elección del paso espacial, al contrario de lo que ocurre en la figura de la derecha. Por tanto, se puede concluir que con dicho método numérico, a pesar de ser incondicionalmente estable y consistente, es necesario ajustar el valor de Δt a un valor para el que la aproximación mostrada en la ecuación (6.9) sea valida si se desea obtener unos resultados suficientemente precisos.

En general, la ligadura impuesta por la ecuación (5.55) proporciona una buena elección de Δt una vez fijado el paso temporal. Por tanto, a pesar de que para que el método de Crank–Nicolson sea consistente no es estrictamente necesario integrar a lo largo de las curvas características, se utilizará tal ligadura por cuestiones de precisión en los resultados. La figura 6.20, al igual que la figura 6.14 para el método de las características, muestra el efecto que tiene sobre el perfil de presión a la salida del gasoducto la utilización de diferentes valores del mallado espacial, I , quedando el temporal fijado por la ecuación (5.55). Además, la tabla 6.2 muestra los tiempos de ejecución para cada uno de los casos ejecutados. Tal y como puede verse en dicha tabla el tiempo de cómputo necesario para llevar a cabo la simulación aumenta con el número de puntos utilizados en el mallado espacial a lo largo del gasoducto. Sin embargo, a partir de $I=20$ puntos, el perfil de presión mostrado en la figura 6.18 es prácticamente idéntico. Por tanto, para este sistema, es suficiente tomar $I=20$ para obtener unos resultados suficientemente precisos.

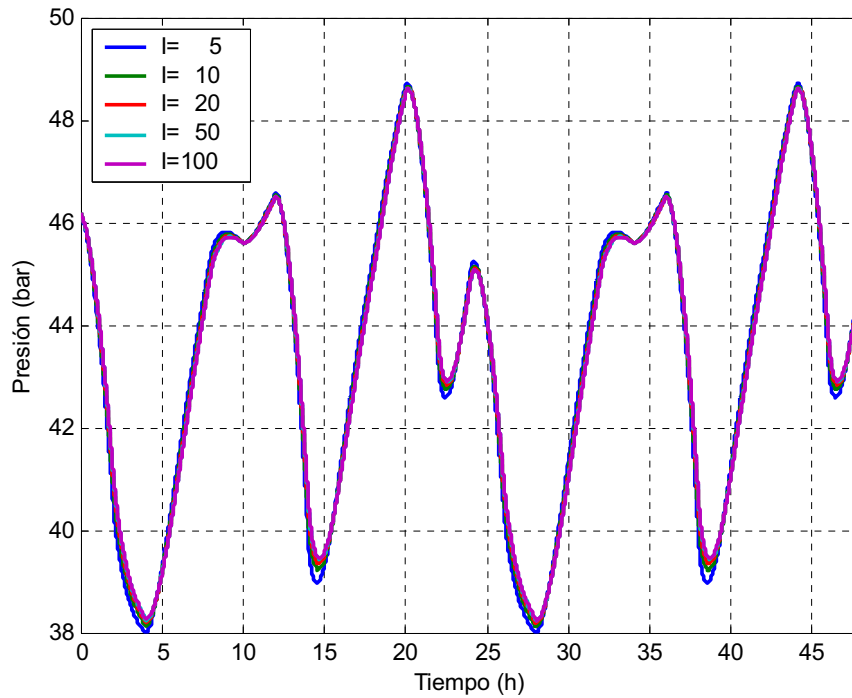


Figura 6.20: Presión de salida para varios valores de I .

Tabla 6.2: Tiempos de ejecución para el método de Crank–Nicolson con la ecuación (5.55).

Solución	I	$T_{CPU}(s)$
1	5	1.7630
2	10	3.1750
3	20	6.5500
4	50	40.3980
5	100	130.0270

6.2.4 Comparación de ambos modelos

Una vez integrados numéricamente los modelos A y B mediante los esquemas numéricos desarrollados para cada uno de ellos, pueden compararse en una misma gráfica los perfiles de presión a la salida del gasoducto obtenidos en cada caso. La figura 6.21 muestra el resultado de tal comparación para $I=20$ y Δt determinado por la relación (5.55). Tal y como puede verse en dicha gráfica, los resultados obtenidos mediante la utilización de ambos modelos son similares.

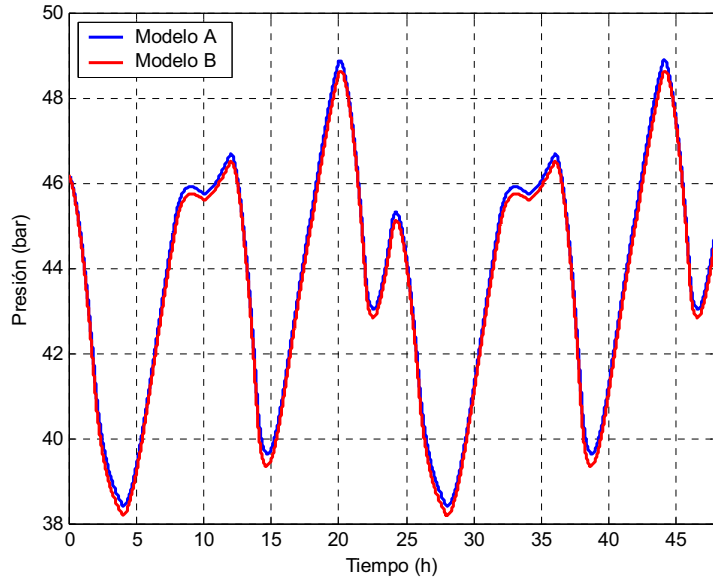


Figura 6.21: Comparación de los resultados obtenidos con los modelos A y B.

6.2.5 Efecto de la inclinación del gasoducto

Para concluir esta sección, se muestra a continuación el efecto de la inclinación del gasoducto sobre el perfil de presión a la salida del mismo. Para ello, se simula la presión a la salida del gasoducto cuando la diferencia de cotas entre sus extremos es de $H=[1000, 500, 100, 0, -100, -500, -1000] m$. Los resultados obtenidos utilizando el modelo A con $I=20$ se muestran en la figura 6.22.

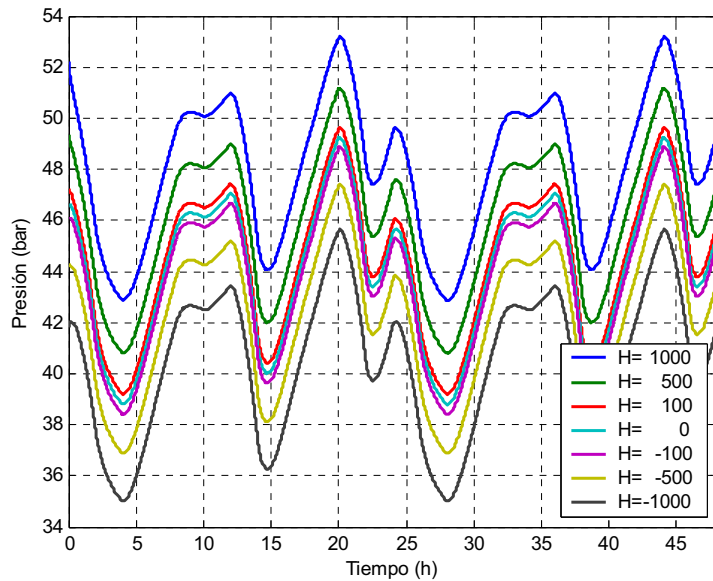


Figura 6.22: Efecto de la inclinación del gasoducto sobre el perfil de presión.

Tal y como puede verse, el efecto de la inclinación no se puede considerar despreciable, al contrario que otros efectos que se despreciaron en la etapa de modelado. Además, se ve como para gasoductos ascendentes ($H>0$) tiene lugar un aumento en la presión de salida como consecuencia del aumento de energía potencial. Lo contrario ocurre para el caso de gasoductos descendentes ($H<0$), observándose una pérdida de presión asociada a la pérdida de energía potencial.

6.3 Estaciones de compresión

Como se mostró brevemente en la sección 6.1.3, el bloque que implementa las estaciones de compresión es un bloque sin dinámica alguna y cuya única función es determinar el modo de funcionamiento de la estación (número de compresores a poner en marcha) para llevar a cabo la operación de compresión requerida, calculando además el consumo energético asociado a dicha operación. Para ello, dicho bloque debe calcular el dominio de operación para las variables (Q_n, p_s, p_d) a partir de los datos que se conocen sobre la envoltura que define su comportamiento. A partir de dicho dominio el bloque calcula el número de compresores que la estación debe poner en marcha para que las variables (Q_n, p_s, p_d) estén en su interior. Si existen varias posibilidades, la estación pone en marcha el número de compresores para el que el consumo total de la estación asociado a su funcionamiento sea mínimo.

6.3.1 Descripción física de los compresores

En la descripción física de los compresores se proporcionan las velocidades máxima y mínima de funcionamiento ($9000rpm$ y $15500rpm$), así como los datos que relacionan el flujo de gas (Q) con la altura adiabática específica (h) que se imprime al gas, y el rendimiento del compresor (η) para cada valor del flujo de gas a su entrada cuando funciona a una determinada velocidad (S). Con estos datos, se han obtenido los coeficientes de las ecuaciones (5.146) y (5.147) del *Capítulo* anterior (tabla 6.3) que permiten caracterizar al compresor mediante su envoltura, mostrada en la figura 6.23, y la variación de su eficiencia con el flujo de gas a comprimir y la velocidad de funcionamiento (Q/S), mostrada en la figura 6.24.

Tabla 6.3: Coeficientes obtenidos para el compresor modelado.

Coeficientes	A	B	C	D
Altura adiabática (h)	0.0013	-52.6671	1.0203×10^6	-6.8429×10^9
Eficiencia (η)	137.8751	-4.9911×10^6	1.2167×10^{11}	-9.2506×10^{14}

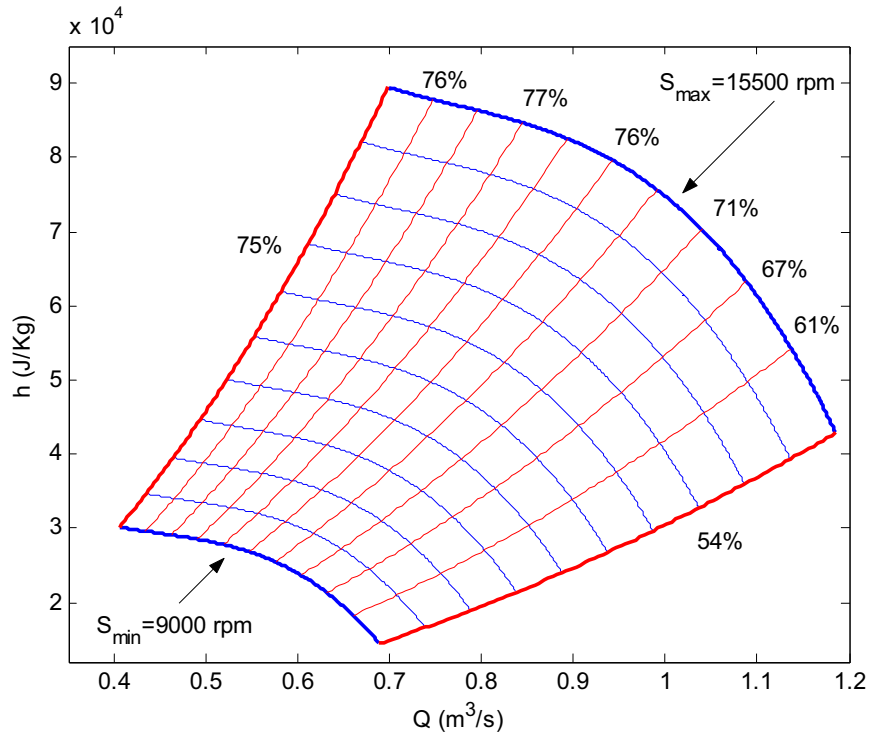


Figura 6.23: Envolvura del compresor a modelar.

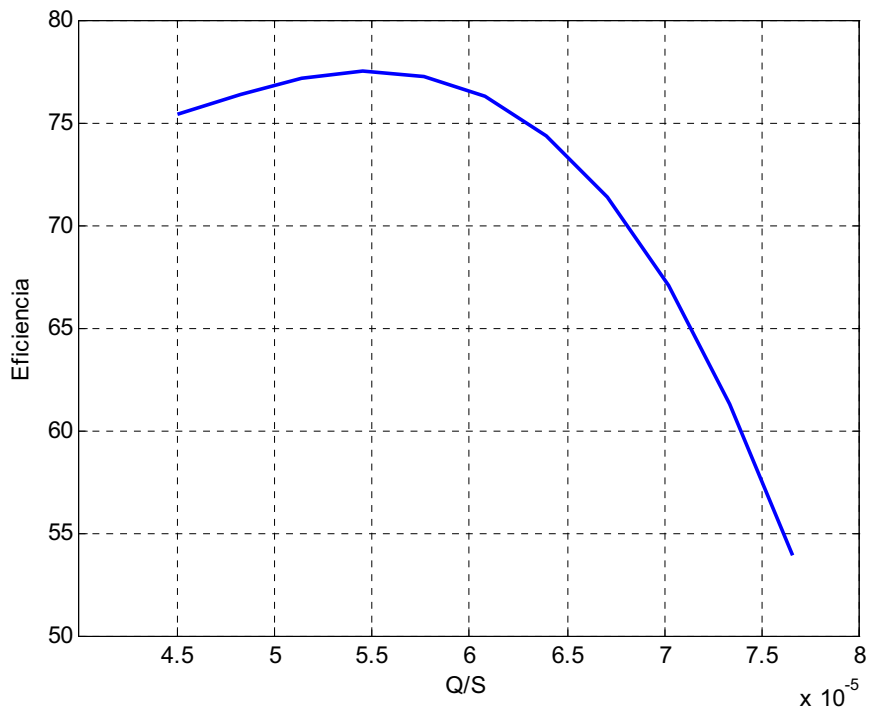


Figura 6.24: Eficiencia del compresor.

La gráfica de la figura 6.23 fija los límites en el flujo de gas la entrada [Q^L, Q^U] a un turbo compresor en m^3/s (en este caso $Q^L=0.4046 m^3/s$ y $Q^U=1.1858 m^3/s$). El flujo a la entrada (Q) se refiere al flujo de gas en las condiciones de presión y temperatura a la entrada del compresor. Sin embargo, en el modelo de los gasoductos visto en la sección anterior se maneja como variable para el flujo de gas el flujo en condiciones normales (Q_n). La ecuación (6.10) muestra la relación entre estos dos flujos, en donde p_s es la presión de succión y Z_s es el factor de compresibilidad a dicha presión, que puede determinarse de forma aproximada con ayuda de la ecuación (6.11).

$$Q_n = \frac{Q \cdot p_s}{Z_s} \quad (6.10)$$

$$Z_s = 1 - \frac{p_s}{390} \quad (6.11)$$

Por tanto, dados un flujo en condiciones normales y una presión de succión, la ecuación (6.10) fija un flujo de gas a partir del cual pueden determinarse la máxima y mínima altura adiabática proporcionada al gas (trabajo realizado por el compresor), [H^L, H^U]. Entre estos valores el compresor puede funcionar con mayor o menor rendimiento. De acuerdo con la ecuación (5.150) del *Capítulo* anterior, estos valores fijan unos valores máximos y mínimos del factor de compresión p_d/p_s , limitando por tanto la presión de descarga. Además, debe tenerse en cuenta que el valor de la presión de succión a la entrada del compresor también está limitado mediante la ecuación (6.12), en este caso [38, 78] *bar*. Por tanto, dados unos valores (Q_n, p_s, p_d), estos son válidos para que actúe el compresor si estando p_s y Q_n dentro de sus límites, se satisface la ecuación (6.13), donde F^L y F^U vienen dados por la ecuación (1.155). Finalmente, los límites en la presión de succión y en el flujo de gas fijan límites para el flujo de gas en condiciones normales, que en este caso son [17.0748, 104.7113] m^3/s .

$$p_s^L \leq p_s \leq p_s^U \quad (6.12)$$

$$F^L \left(\frac{Q_n}{p_s} \right) \cdot p_s \leq p_d \leq p_s \cdot F^U \left(\frac{Q_n}{p_s} \right) \quad (6.13)$$

A partir de estas expresiones puede verse como los límites en la presión de descarga varían no sólo con el flujo de gas sino también con la presión de succión. Es decir, la región de funcionamiento o valores válidos de la presión de descarga para cada valor del flujo de gas a la entrada del compresor se desplaza sobre el plano p_d-Q_n al variar la presión de succión. La figura 6.25 muestra dicha región para varios valores de la presión de succión en una estación con un único compresor. En el caso de

que la estación esté compuesta por varios compresores, dicha región de funcionamiento varía además con el número de compresores puestos en marcha aún en el caso de mantener la presión de succión fija. La figura 6.26 muestra la variación en la región de funcionamiento de una estación formada por cuatro compresores para una presión de succión fija de 38bar.

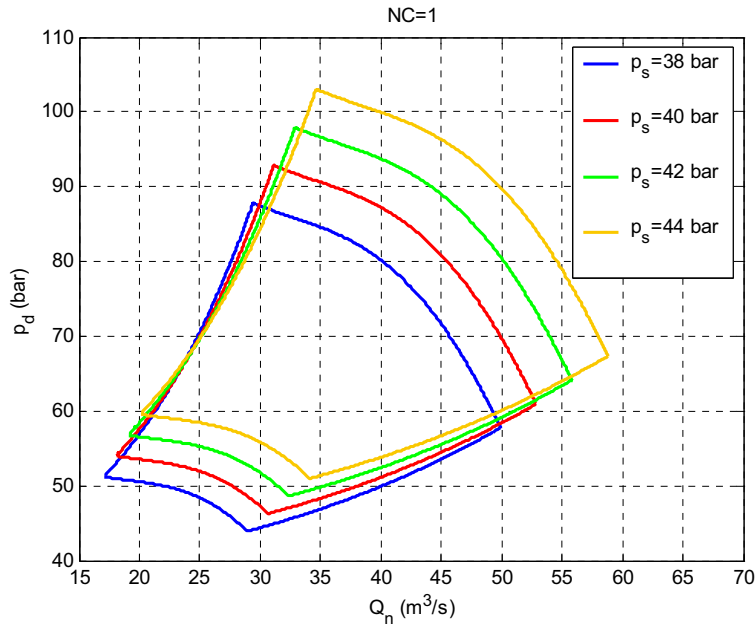


Figura 6.25: Modificación de la región de funcionamiento con p_s .

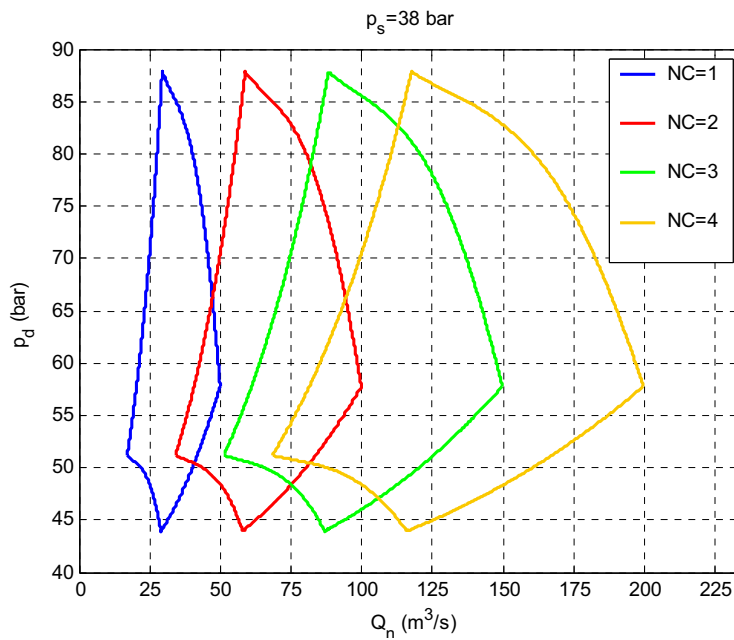


Figura 6.26: Modificación de la región de funcionamiento con NC .

Puesto que en este caso se satisface la ecuación (5.158) del *Capítulo* anterior, la región de operación de la estación es conexas, existiendo por tanto zonas comunes entre las diferentes regiones de operación cuando se utilizan 1, 2, 3 ó 4 compresores. La decisión del número de compresores a poner en marcha en dichas regiones consiste en la determinación del modo de operación de la estación de compresión.

6.3.2 Modos de operación de una estación de compresión

A partir de la descripción física de cada compresor puede determinarse el modo en el que debe operar una estación de compresión formada por NC compresores centrífugos conectados en paralelo. Un gasoducto conectado a una estación de compresión deja el gas a la entrada de la misma a en unas condiciones (Q_n, p_{out}) . La presión de succión del compresor es por tanto la presión a la salida del gasoducto. Si p_s está fuera del rango determinado por la ecuación (6.12) el compresor no funcionará. Si p_s es válido, entonces el flujo de gas a la entrada de la estación de compresión (Q) se calcula teniendo en cuenta la ecuación (6.10). Si este valor de Q está fuera de $[Q^L, Q^U]$ entonces no se puede utilizar un solo compresor. Si $Q/2$ tampoco pertenece a tal intervalo tampoco pueden utilizarse dos compresores, pero si se puede en caso contrario. Y así sucesivamente hasta el máximo número de compresores en la estación de compresión. En el caso en que Q/nc pertenezca al intervalo para varios valores de nc , existen varios modos de operación posibles. En este caso, la estación de compresión debe operar con el número de compresores que genere el mínimo consumo de potencia. La determinación de dicho número, como se verá el *Capítulo* siguiente, no es una tarea sencilla debido a que la eficiencia con la que opera cada uno de los compresores de la estación depende del valor del flujo de gas a la entrada de los mismos. La tabla 6.4 muestra una descripción de cada uno de los modos de operación disponibles.

Tabla 6.4: Modos de operación de la estación de compresión.

Modo de operación	Descripción
Modo 0	Presión de succión fuera de rango
Modo 1	Flujo de gas fuera de rango
Modo 2	Presión de descarga fuera de rango
Modo 3	Condiciones de operación válidas

El algoritmo (6.1) muestra el pseudocódigo con el que implementar la función que determina los posibles modos en los que puede operar una estación de compresión en unas determinadas condiciones de funcionamiento caracterizadas por (Q_n, p_s, p_d) . Además, calcula el coste asociado a cada uno de los modos de operación posibles.

Algoritmo 6.1: Cálculo del modo de operación de una estación de compresión.

```

modo=MODO_OPERACION(Qn,ps,pd)
(1) modo=zeros(N,2)
(2) if ps $\notin$ [psL,psU]
(3)     modo(1,1)=0
(4) else
(5)     Q=f(Qn,ps) mediante las ecuaciones (6.10) y (6.11)
(6)     for nc=1 to NC
(7)         q=Q/nc
(8)         if Q $\notin$ [QL,QU]
(9)             modo(nc,1)=0
(10)        else
(11)            [HL,HU]=ENVOLTURA(q)
(12)            [pdL,pdU]=ECUACION_6_13(HL,HU)
(13)            if pd $\notin$ [pdL,pdU]
(14)                modo(nc,1)=2
(15)            else pd $\notin$ [pdL,pdU]
(16)                modo(nc,1)=3
(17)                H=ECUACION_5_150(HL,HU)
(18)                S=ECUACION_5_146(q,H)
(19)                E=ECUACION_5_147(q,S)
(20)                modo(nc,2)=ECUACION_5_156(E,q,ps,pd)
(21)            end
(22)        end
(23)    end
(24) end
(25) return modo

```

Dicha función devuelve modo de operación en una matriz $NC \times 2$ llamada *modo*. En la primera columna se especifica el modo de operación de la estación al utilizar 1, 2, ..., N compresores en cada fila de dicha columna. La segunda columna proporciona el coste asociado al funcionamiento de la estación en el caso de que el modo de operación sea 3. Para entender mejor el funcionamiento de esta función se ha llevado a cabo un experimento para determinar el modo de operación de la estación de compresión en las condiciones especificadas por los parámetros $Q_n=75m^3/s$, $p_s=38bar$ y $p_d=65bar$. Tal

y como se ve en la figura 6.26 dicho punto de operación está dentro de la envoltura de la estación para $N=2$ y 3. Los resultados obtenidos se muestran en la tabla 6.5.

Tabla 6.5: Modos de operación de la estación para $Q_n=75m^3/s$, $p_s=38bar$ y $p_d=65bar$.

Nº de compresores en funcionamiento	Modo de operación	Coste
1	1	0
2	3	258.7718
3	3	246.5942
4	2	0

6.4 Ejemplos de aplicación

Con la librería desarrollada pueden llevarse a cabo de forma sencilla simulaciones en la dinámica de diferentes redes de distribución de gas sin más que montar la red en un modelo Simulink arrastrando y conectando sobre el mismo cada uno de los elementos que la componen. Una vez hecho esto, tan solo queda fijar los parámetros con características físicas de cada uno de los elementos de la red y los parámetros propios de la simulación que se pretende realizar. En concreto, se va a mostrar aquí la utilidad de la librería desarrollada a través de los ejemplos de aplicación siguientes:

- *Ejemplo 1:* Gasoducto simple.
- *Ejemplo 2:* Gasoducto en diferentes rangos de presión.
- *Ejemplo 3:* Red de distribución básica.
- *Ejemplo 4:* Red de distribución compleja.

Estos ejemplos de aplicación han sido escogidos por encontrarse ya resueltos en la literatura existente, proporcionando por tanto unos datos de referencia con los que comparar los resultados obtenidos con la librería aquí desarrollada.

6.4.1 Ejemplo 1: Gasoducto simple

Considérese un gasoducto horizontal de sección circular constante con diámetro $0.6m$ y longitud $100km$. La presión de entrada se mantiene a $50bar$ y la demanda de gas varía según la curva mostrada en la figura 6.27. La temperatura es $278K$, la densidad del fluido es $0.73kg/m^3$ y la constante del gas R es $392m^2/(s^2K)$. Se ha supuesto además un factor de fricción es 0.003 .

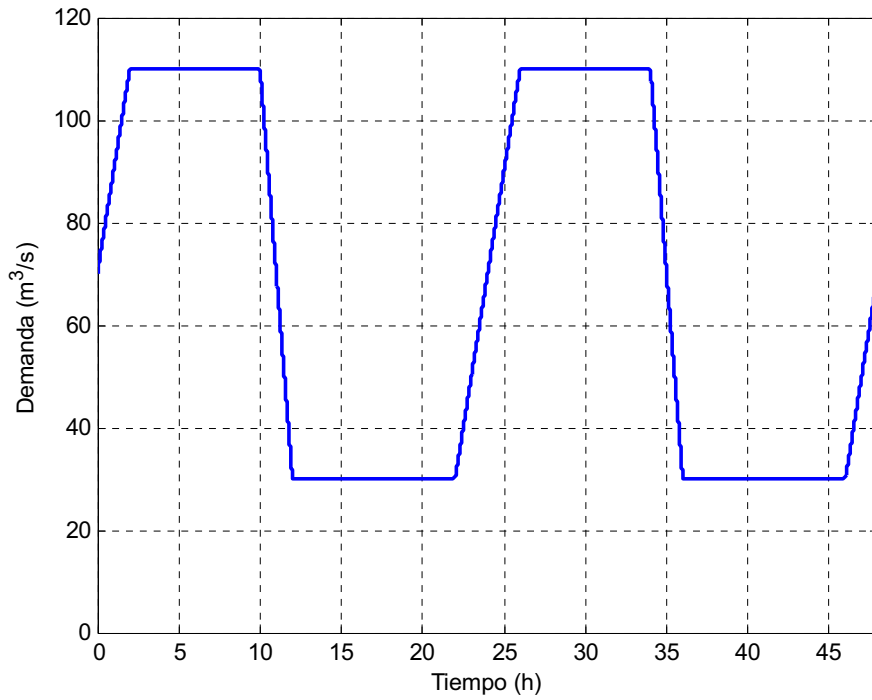


Figura 6.27: Demanda para el ejemplo 1.

Este ejemplo se encuentra resuelto en las referencias bibliográficas [Osia87] y [KT00]. Se trata aquí de comparar los resultados que en ellas se recogen con los obtenidos mediante la librería Simulink aquí desarrollada. Para ello, el primer paso es montar el modelo Simulink del sistema a simular. Dicho modelo se muestra en la figura 6.28. En este caso tan solo hay un único gasoducto abastecido por una fuente que proporciona el gas a 50bar, y una carga desde que especificar la demanda mostrada en la figura 6.27.

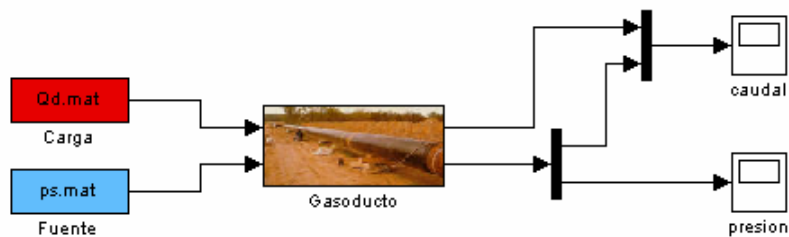


Figura 6.28: Modelo Simulink del gasoducto de ejemplo.

Los resultados obtenidos para una malla con $I=20$ y Δt determinado por la relación (5.55) se muestran en la figura 6.29 junto con los proporcionados por [Osia87] y

[KT00]. Como puede verse en dicha figura, los resultados obtenidos son bastante próximos a la solución proporcionada en [Osi87]. Otros valores de los parámetros I y Δt hacen que el tiempo de cómputo varíe sin modificar en exceso los resultados obtenidos.

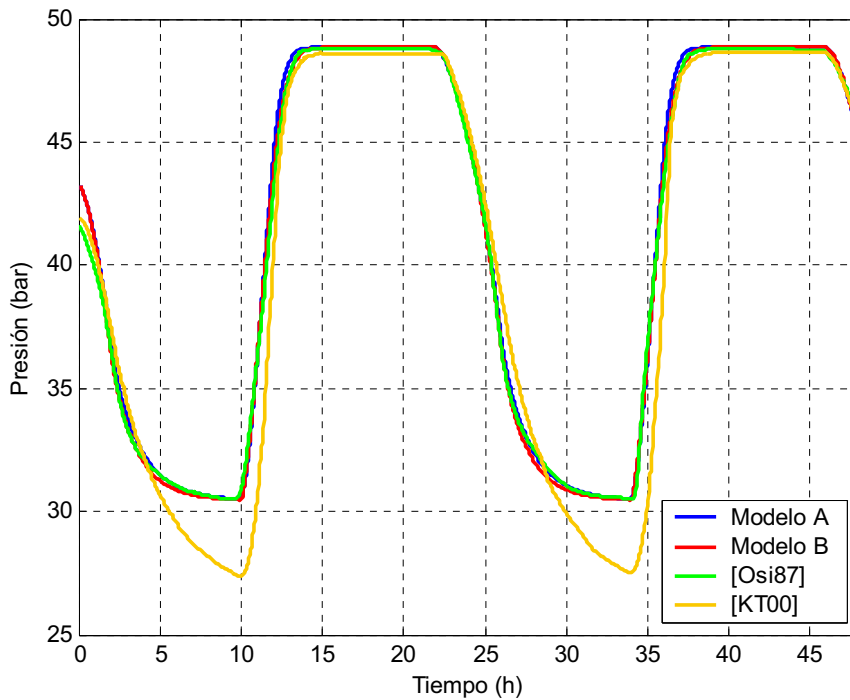


Figura 6.29: Presión de salida obtenida por diferentes métodos.

6.4.2 Ejemplo 2: Gasoducto en diferentes rangos de presión

El segundo ejemplo consiste en una red formada por un único gasoducto operando en diferentes rangos de presiones. Dicha red fue utilizada por la Royal Society de Londres (LRS) para demostrar la versatilidad de su programa PAN. Inicialmente, el gasoducto se encuentra en un estado estacionario, a continuación se incrementa la demanda en un 50 % mediante un salto escalón y el valor resultante se mantiene durante el resto de la simulación. Todo el análisis se lleva a cabo para 4 valores de la presión de entrada al gasoducto que cubren los tres rangos de presión típicos en redes de distribución de gas (presión baja, media y alta). Las condiciones de operación para cada uno de dichos rangos, denotados por LRS 1, LRS 2, LRS 3 y LRS 4, se muestran en la tabla 6.6. Dicha tabla muestra los valores de la longitud del gasoducto, su

diámetro, el caudal de gas y su presión a la entrada del gasoducto en las unidades utilizadas en el trabajo [KT00] del que se ha extraído este ejemplo.

Tabla 6.6: Datos utilizados en las simulación del ejemplo 2.

Solución	Long. (millas)	Diámetro (in.)	Q (MSCFH)	P (psig)
LRS 1	80	18	1500	350
LRS 2	20	12	800	180
LRS 3	6	14	300	25
LRS 4	3	14	80	2

Los resultados obtenidos se muestran en la figura 6.30. En ella, se puede ver como se obtiene una respuesta similar al la obtenida en [KT00] para todos los rangos de presión propuestos. Por tanto, se puede concluir que los esquemas numéricos desarrollados pueden ser utilizados satisfactoriamente para la simulación de la dinámica del gas en redes de distribución de gas en cualquier rango de presión.

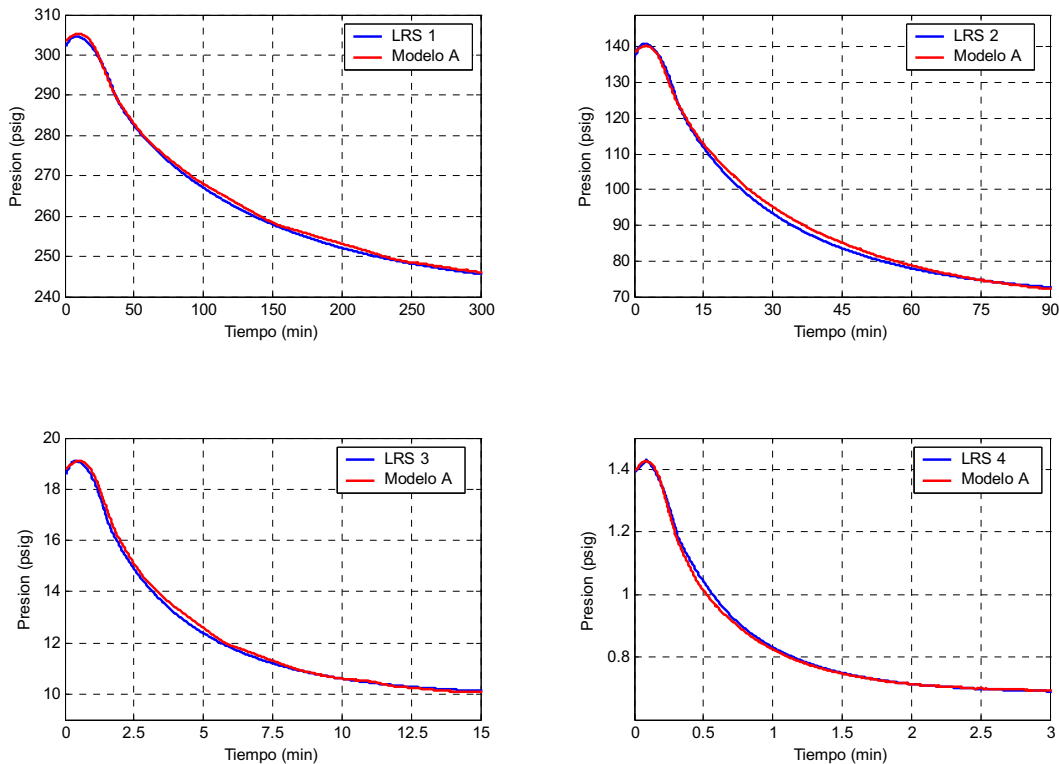


Figura 6.30: Presión de salida para todos los casos de simulaciones LRS.

6.4.3 Ejemplo 3: Red de distribución básica

El tercer ejemplo de aplicación consiste en una red compuesta por dos gasoductos conectados en serie como se muestra en la figura 6.31. Tal y como puede verse, el primer gasoducto es abastecido desde el nodo 1 mediante una fuente que suministra el gas a una presión constante de 40bar. A medida que el gas fluye a través del gasoducto 1, tiene lugar una pérdida de presión. Dicha pérdida es restablecida hasta mediante la estación de compresión que conecta los dos gasoductos que forman la red. Así, el gas es comprimido en la estación desde la presión de succión hasta los 50bar de presión con los que el gas es inyectado en el segundo gasoducto para abastecer una demanda variable especificada en el nodo 2. La figura 6.32 muestra la curva de demanda utilizada en este ejemplo.

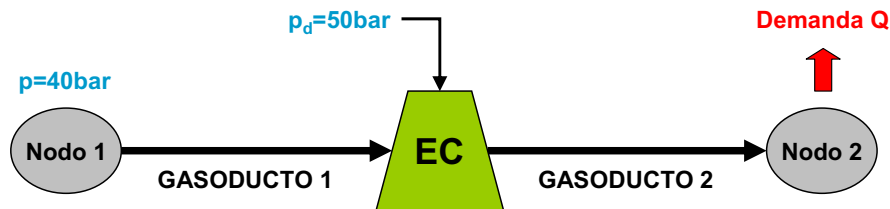


Figura 6.31: Red de distribución básica.

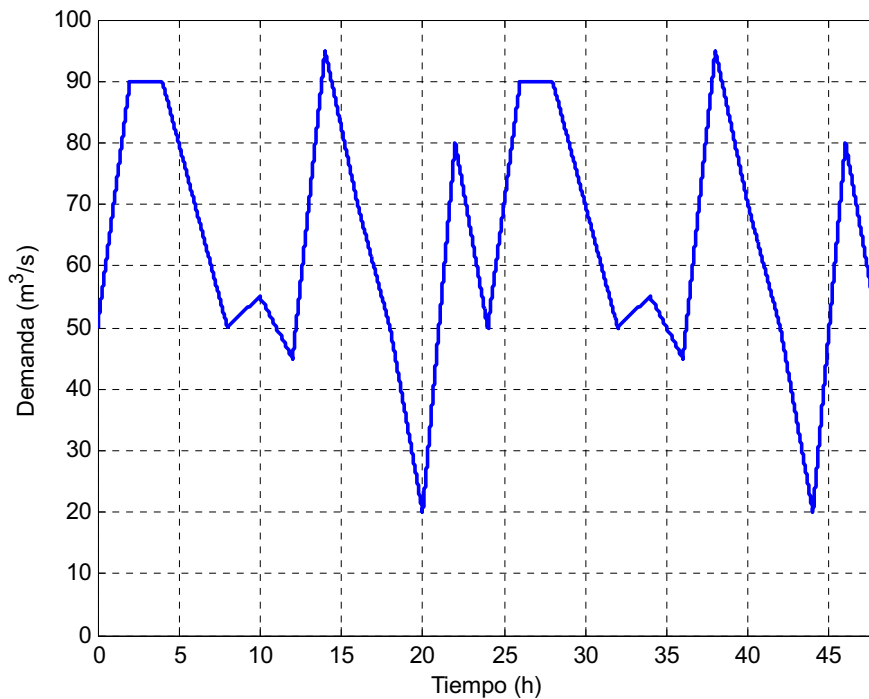


Figura 6.32: Demanda para el ejemplo 3.

El primer paso para simular el funcionamiento del sistema es montar el modelo Simulink correspondiente. La figura 6.33 muestra el modelo Simulink utilizado para simular el funcionamiento de la red de la figura 6.31. Como puede verse, además de los bloques para simular la dinámica del gas en los gasoductos, la estación de compresión, la fuente y la carga, se han incluido otros dos bloques con los que representar gráficamente la evolución temporal de la dinámica del gas (presión a la salida de los gasoductos) así como del modo de funcionamiento de la estación de compresión (número de compresores puestos en marcha en cada instante y coste asociado a la operación). Los gasoductos tienen las mismas características físicas del utilizado en el ejemplo anterior. Las características del compresor son las correspondientes al compresor modelado en la 6.3.1.

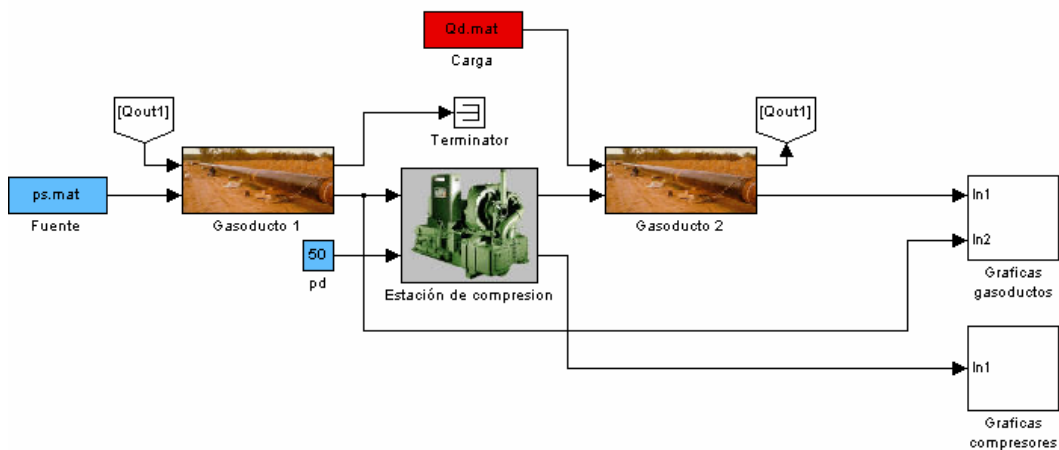


Figura 6.33: Modelo Simulink de la red de distribución básica.

Tras simular el comportamiento del sistema se obtienen los resultados mostrados en las figuras 6.34 y 6.35. La figura 6.34 muestra la variación temporal de la presión a la salida de cada uno de los dos gasoductos que forman la red. Tal y como se ve, en ambos casos tiene lugar una pérdida de presión desde los 40bar con los que se inyecta el gas en la boca del primer gasoducto y desde los 50bar con los que se inyecta en la boca del segundo. Esta pérdida de presión depende a su vez del flujo de gas demandado a la salida del segundo gasoducto, mostrando por tanto el mismo comportamiento periódico de la curva que especifica la demanda mostrada en la figura 6.32. La figura 6.35 muestra en primer lugar el número de compresores que la estación pone en marcha para conseguir comprimir el gas en las condiciones fijadas por la de presión de succión y caudal a la entrada de la estación en cada instante. Finalmente, se muestra también el consumo de la estación en cada instante. Se aprecian un par de saltos (21h y 46h) asociados al cambio en el modo de operación.

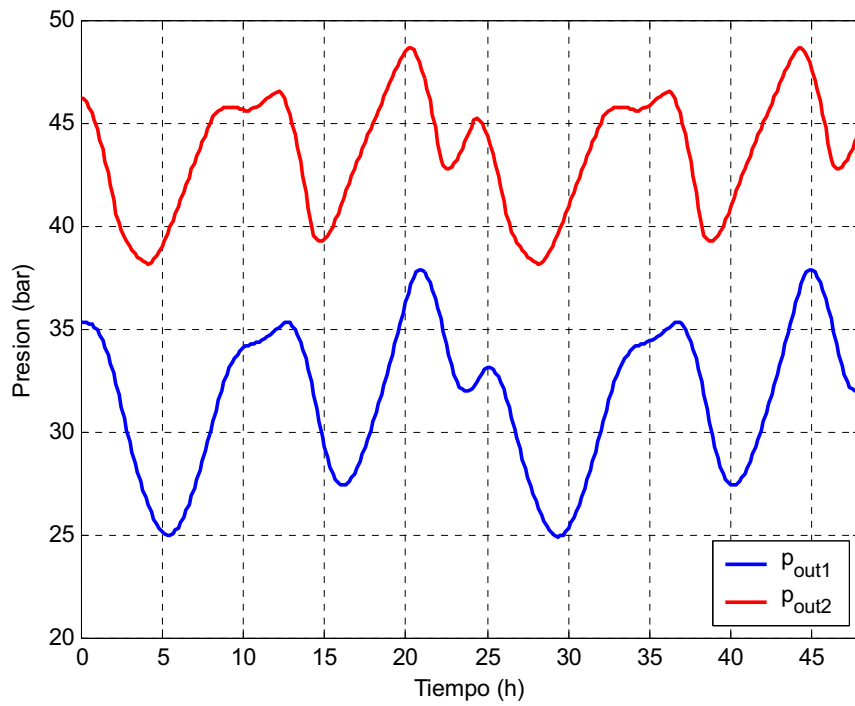


Figura 6.34: Presión a la salida de los dos gasoductos para el ejemplo 3.

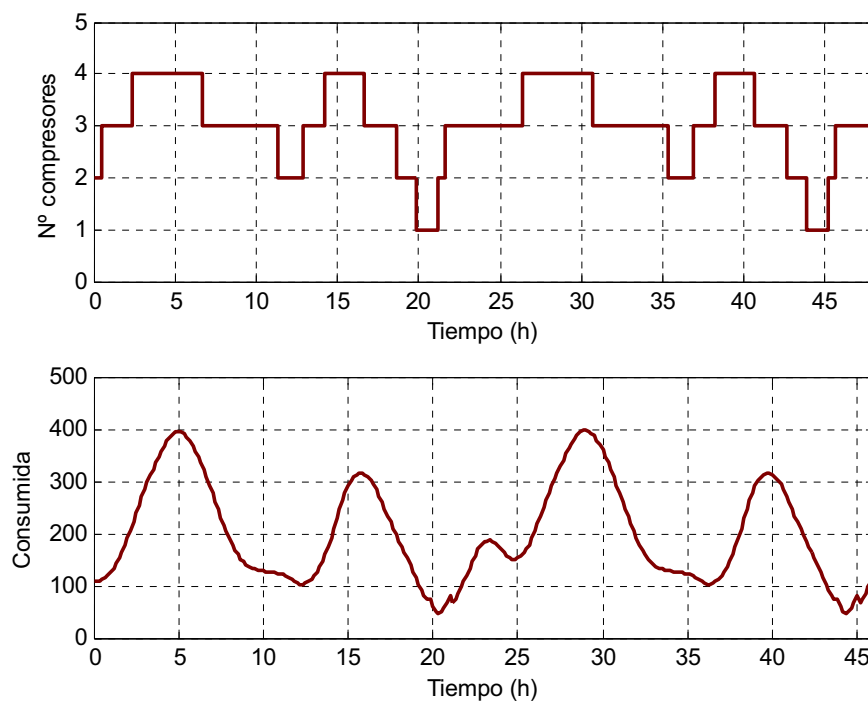


Figura 6.35: Modo de operación del compresor del ejemplo 3.

6.4.4 Ejemplo 4: Red de distribución compleja

El cuarto ejemplo de aplicación consiste en una red con tres gasoductos conectados según el esquema de la figura 6.37. El diámetro de los gasoductos es $0.6m$ y las longitudes son $80, 90$ y $100km$ para los gasoductos 1, 2 y 3 respectivamente. La presión de entrada se mantiene constante a $50bar$ en el nodo 1 y la demanda de caudal varía según la curva mostrada en la figura 6.37 para los nodos 2 y 3. La temperatura de operación es de $278K$, la densidad del fluido es $0.7165kg/m^3$ y la constante del gas es $392m^2/(s^2K)$. Se ha supuesto un factor de fricción de 0.003 .

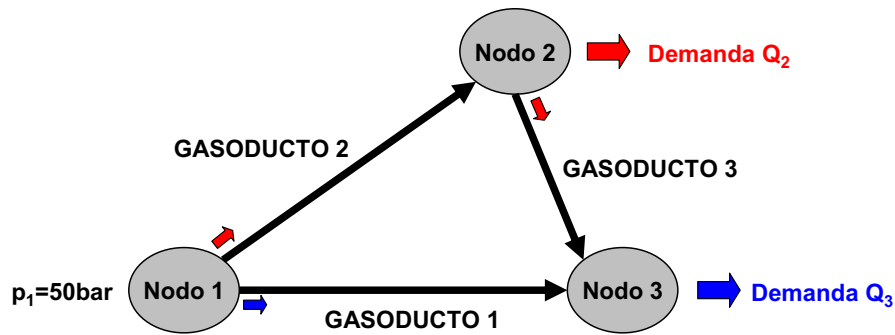


Figura 6.36: Red de distribución compleja.

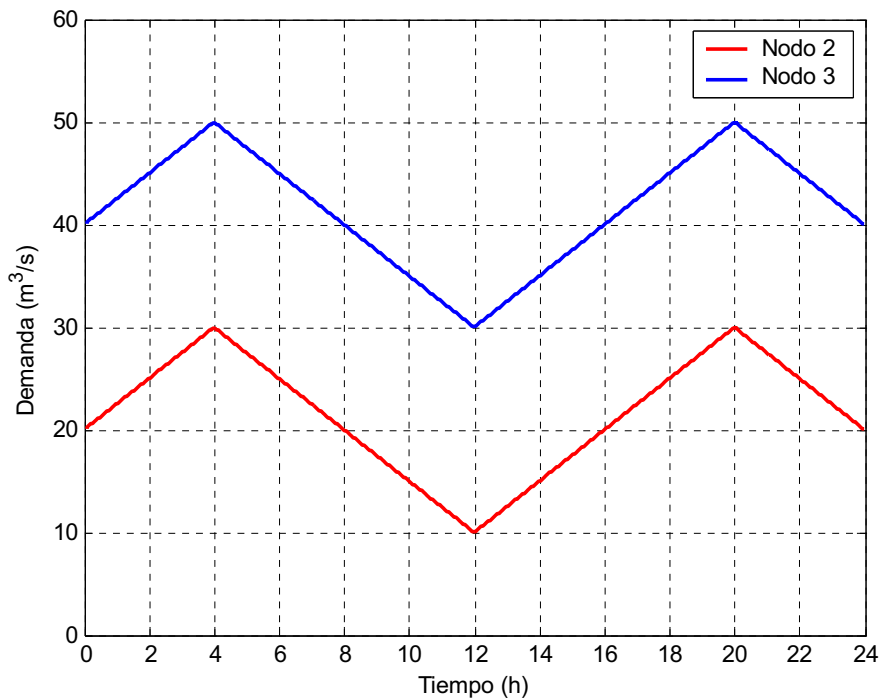


Figura 6.37: Red de gasoductos y demanda para el ejemplo 2.

El objetivo del problema es obtener la variación temporal de la presión en los nodos 2 y 3. Por tanto es necesario simular la dinámica del sistema a partir de las condiciones iniciales especificadas. Como en el ejemplo anterior, el primer paso para simular la dinámica del sistema es construir el modelo Simulink con la red a simular. La figura 6.38 muestra el modelo Simulink para la red de la figura 6.37.

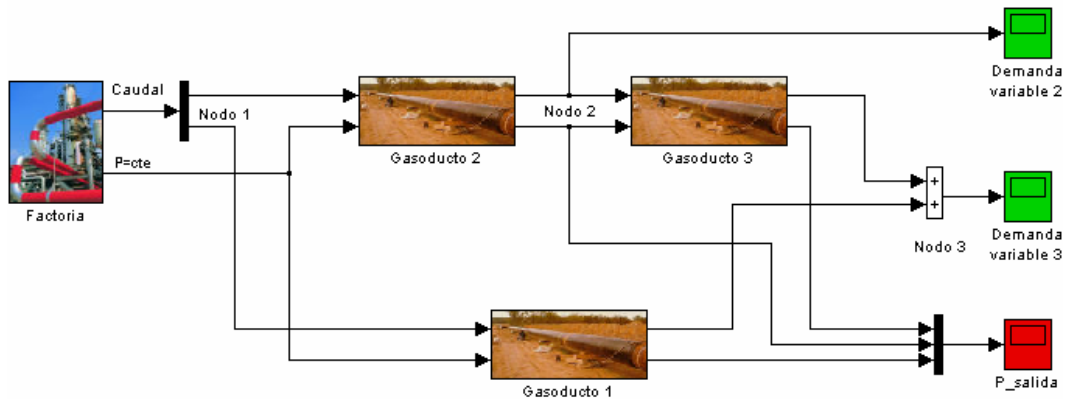


Figura 6.38: Modelo Simulink de la red de ejemplo.

Ejecutando el esquema numérico correspondiente al modelo A, se obtiene la variación temporal para la presión de salida en los nodos 2 y 3 mostrada en la figura 6.39. Como puede verse, la respuesta es similar a la obtenida en la literatura, [KT00]. La principal diferencia se encuentra en los valores obtenidos, sin embargo, esto carece de importancia ya que depende de los pasos utilizados en la simulación y estos siempre se pueden ajustar para obtener la precisión deseada.

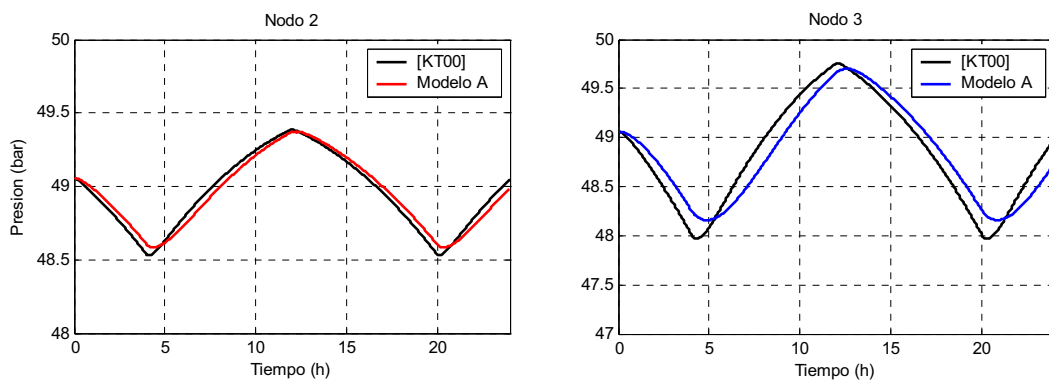


Figura 6.39: Presión en los nodos 2 y 3.

6.5 Identificación del sistema

En el tercer ejemplo de aplicación mostrado en la sección 6.4.3 se ha mostrado como a medida que el gas fluye por la red, tiene lugar una pérdida de energía y de presión como consecuencia de la fricción del gas con la pared interior de los gasoductos, la transferencia de calor entre el gas y sus alrededores y la posible inclinación de cada uno de los gasoductos de la red. Si se pretende que el gas llegue con la presión adecuada a los correspondientes puntos de entrega, dichas caídas de presión deben ser reestablecidas periódicamente mediante las estaciones de compresión instalados en la propia red y que suelen consumir en su operación en torno al 3 y el 5% del total del gas transportado. En el ejemplo mostrado en la sección 6.4.3 la pérdida de presión en el primer gasoducto fue reestablecida hasta una presión de descarga en el compresor de 50bar. Dicha presión de descarga fue fijada a priori, si embargo, lo natural sería determinarla en base a algún criterio relacionado con el comportamiento deseado para dicho sistema. Así, la idea del control óptimo en la distribución de gas es obtener un sistema de control automático sea capaz de proporcionar la presión de descarga en cada una de las estaciones de compresión de la red de tal forma que el gas llegue a su destino en las condiciones contratadas a la vez que se minimice el gasto, es decir, que se minimice el número de veces que las estaciones de compresión deban ponerse en marcha consumiendo, por tanto, parte del gas transportado.

Como se verá en el *Capítulo* siguiente, los controladores diseñados se basan en el Control Predictivo Basado en Modelos. Este tipo de controladores generan la señal de control en base a la optimización de un determinado criterio relacionado con el comportamiento futuro del sistema a controlar, siendo por tanto necesario disponer de un modelo del sistema con el que predecir dicho comportamiento futuro. Dado que el problema de optimización se resuelve mediante un computador, se hace más natural utilizar un modelo discreto en lugar de un modelo continuo. Por otro lado, dado que los modelos en variables de estado son más generales que los modelos entrada-salida, son los primeros los más adecuados para ser utilizados para predecir el comportamiento del sistema. Además, tal y como se verá en el *Capítulo* siguiente un modelo discreto en variables de estado permite integrar en el controlador la dinámica del sistema de forma muy sencilla a través de las restricciones de igualdad del problema de optimización asociado.

6.5.1 Modelo en variables de estado

El objetivo de los controladores a diseñar en el *Capítulo* siguiente será obtener la presión de descarga en cada una de las estaciones de compresión de la red en cada

instante de tiempo de tal forma que se satisfaga un determinado criterio. Dicho criterio se suele escribir como una función de la presión del gas a la salida de cada gasoducto de la red. Así, se pueden establecer criterios tales como que la presión del gas a la salida de cada gasoducto siga una determinada referencia o que el consumo de las estaciones de compresión instaladas en la red sea mínimo. Por tanto, los controladores diseñados deben incluir un modelo con el que predecir el valor de la presión del gas a la salida de cada gasoducto en cada instante. Dicha presión es función además de la presión de entrada y el caudal de gas en el gasoducto. Así, la ecuación (6.14) muestra un posible modelo discreto en variables de estado para obtener la presión del gas a la salida de un gasoducto en cada instante, $p_s(k)$, a partir de una determinada presión a la entrada del mismo, $p_e(k)$, y un flujo de gas, $Q(k)$. En dicho modelo A y B son dos matrices de coeficientes constantes. A pesar de ser muy simple, como se verá en el *Capítulo* siguiente dicho modelo es suficiente como para predecir la dinámica del sistema durante el horizonte de control.

$$p_s(k+1) = A \cdot p_s(k) + B \cdot \begin{pmatrix} p_e(k) \\ Q(k) \end{pmatrix} \quad (6.14)$$

En concreto aquí, se va a obtener un modelo de la forma mostrada en la ecuación (6.14) para el gasoducto del ejemplo 1. Para ello, se comienza por simular la dinámica de dicho gasoducto frente a unas determinadas señales de entrada, $p_e(k)$ y $Q(k)$, y registrar la salida. Ahora, las señales de entrada y salida obtenidas tras este experimento pueden utilizarse en el proceso de identificación a partir del cual obtener los coeficientes de las matrices del modelo con los que éste genera los mismos resultados que la simulación del sistema.

Ocurre que los parámetros del modelo no pueden determinarse si las señales de entrada utilizadas en el proceso de identificación no cumplen algunos requisitos. En concreto, éstas deben ser persistentes de orden n , siendo n el número de parámetros del modelo a identificar [SS89]. Una señal de cuadrado sumable $u(t)$ se denomina de excitación persistente (*ep*) de orden n si existe el límite mostrado en la ecuación (6.15) y la matriz de covarianza $R_u(n)$ mostrada en la ecuación (6.16) es definida positiva.

$$r_u(\tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N u(t+\tau)u^T(t) \quad (6.15)$$

$$R_u(n) = \begin{pmatrix} r_u(0) & r_u(1) & \cdots & r_u(n-1) \\ r_u(-1) & r_u(0) & \cdots & r_u(n-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_u(1-n) & r_u(2-n) & \cdots & r_u(0) \end{pmatrix} \quad (6.16)$$

En general para un sistema dinámico con ruido no correlacionado la estima es consistente si la señal de entrada tiene grado $2n$ de ep (número de parámetros). Si la señal escalar $u(t)$ tiene grado n de ep entonces su densidad espectral de potencia es distinta de cero en al menos n puntos. Se puede ver que un escalón tiene grado 1 de ep , pudiéndose tan solo obtener un único parámetro en un proceso de identificación utilizando esta señal, la ganancia del sistema, correspondiente al comportamiento del sistema a frecuencia cero. Una senoide posee grado 2 de ep , y se sabe que con ella se puede fijar la respuesta del sistema a una única frecuencia, lo que necesita dos parámetros, la amplitud con la que se modifica la señal al pasar por el sistema y el desfase que se introduce. La señal de ruido blanco tiene cualquier grado de ep ya que dispone de todas las frecuencias. En el caso de no utilizar ruido blanco, ¿qué tipo de frecuencias debería contener la señal? La respuesta es aquellas en las que interese tener una buena fiabilidad del modelo. Si el rango de frecuencias de actuación del modelo se conoce se puede elegir como señal de entrada una suma de sinusoides distribuidas de forma regular sobre dicho rango. Si no se conoce el rango, lo mejor es utilizar una señal lo más parecida al ruido blanco. Una de estas señales es la señal pseudo aleatoria binaria (PRBS) [SS89].

En el caso aquí considerado si se conoce el rango de frecuencias que pueden tener las señales de entrada, por lo que se pueden utilizar sumas de sinusoides como señales de entrada a utilizar en el proceso de identificación. Así, la suma de sinusoides mostrada en la ecuación (6.17) posee grado $2n$ de ep pudiéndose por tanto identificar $2n$ parámetros con ella.

$$u(t) = \sum_{i=1}^n a_i \sin(\omega_i t + \varphi_i) \quad \text{con} \quad 0 < \omega_1 < \dots < \omega_n < \pi \quad (6.17)$$

Suponiendo que la máxima frecuencia en las señales de entrada es $10^{-4}Hz$ pueden utilizarse como señales de entrada para $p_e(k)$ y $Q(k)$ sumas de 5 sinusoides con frecuencias uniformemente distribuidas en el intervalo $[0, 10^{-4}Hz]$. Con señales formadas a partir de 5 sinusoides se pueden identificar 10 parámetros, siendo por tanto suficiente para el modelo aquí considerado. En concreto se han utilizado las señales mostradas en la figura 6.40. Tras utilizar dichas señales para simular el comportamiento del sistema y registrar la salida, se han obtenido los parámetros del modelo para los que la diferencia entre la salida del sistema y la del modelo es mínima, obteniéndose el modelo mostrado en la ecuación (6.18). La figura 6.41 muestra la salida del sistema y el modelo obtenido para la misma entrada.

$$p_s(k+1) = 0.7770 \cdot p_s(k) + (0.2398 \quad -0.0380) \cdot \begin{pmatrix} p_e(k) \\ Q_s(k) \end{pmatrix} \quad (6.18)$$

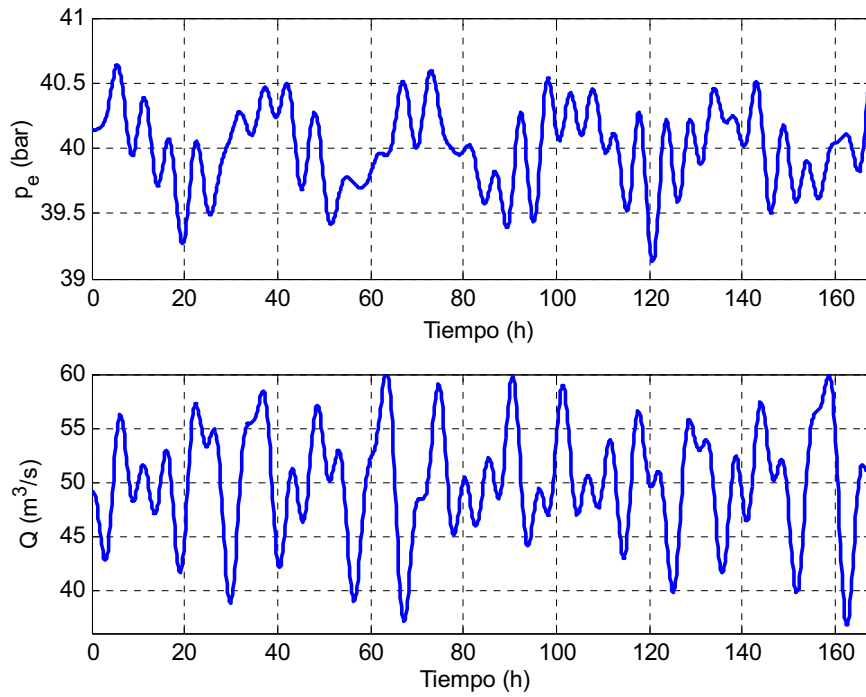


Figura 6.40: Señales de entrada utilizadas en el proceso de identificación.

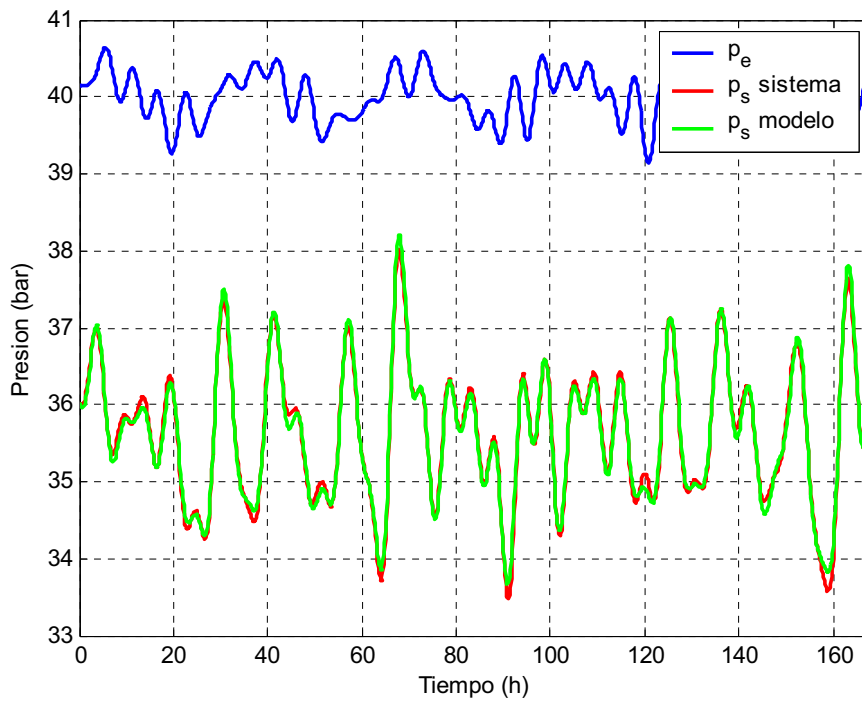


Figura 6.41: Presiones de entrada y de salida para el sistema y el modelo.

6.5.2 Generación de un modelo de red

Uno de los controladores diseñados en el *Capítulo* siguiente tendrá como objetivo determinar la presión de descarga en cada uno de los compresores de una red como la mostrada en el ejemplo 3. Tales redes están formadas por una serie de gasoductos conectados mediante estaciones de compresión, que van reestableciendo las periódicas caídas que sufre el gas debido a la fricción con las paredes interiores de cada gasoducto. Por tanto, dicho controlador deberá incorporar un modelo de la red construido a partir de los modelos de cada uno de los gasoductos que la forman. Supóngase una red formada por n gasoductos conectados en serie mediante $n-1$ estaciones de compresión. Teniendo en cuenta la definición de los vectores de estado, x , y de control, u , mostrados en la ecuación (6.19), el modelo en variables de estado en tiempo discreto para cada uno de los gasoductos de la red se puede escribir tal y como se muestra en la ecuación (6.20).

$$x_i(k) = (ps_i(k)) \quad y \quad u_i = \begin{pmatrix} pe_i(k) \\ Qi(k) \end{pmatrix} ; \quad i = 1, \dots, n \quad (6.19)$$

$$x_i(k+1) = A_i \cdot x_i(k) + B_i \cdot u_i(k) \quad ; \quad i = 1, \dots, n \quad (6.20)$$

Con esta definición para el modelo de cada uno de los gasoductos de la red, el modelo correspondiente a la red completa mostrado en la ecuación (6.21) se genera sin más que extender las matrices A y B así como los vectores de estado y control x y u tal y como se muestra en la ecuaciones (6.22) y (6.23) respectivamente.

$$\bar{x}(k+1) = A \cdot \bar{x}(k) + B \cdot \bar{u}(k) \quad (6.21)$$

$$\bar{x}(k) = \begin{pmatrix} x_1(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{pmatrix} ; \quad \bar{u}(k) = \begin{pmatrix} u_1(k) \\ \vdots \\ u_n(k) \end{pmatrix} \quad (6.22)$$

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & A_n \end{pmatrix} ; \quad B = \begin{pmatrix} B_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & B_n \end{pmatrix} \quad (6.23)$$

Como se verá en el *Capítulo* siguiente, existe la posibilidad de implementar un control robusto del sistema. Para ello, las señales de control deben calcularse de tal forma que sean capaces de controlar de forma simultánea un determinado número de sistemas generados de forma uniforme en torno al nominal con una desviación típica especificada por el usuario. Considérese el siguiente conjunto J de sistemas lineales como el mostrado en la ecuación (6.21) con $j=1, \dots, J$.

$$\bar{x}_j(k+1) = A_j \cdot \bar{x}_j(k) + B_j \cdot \bar{u}(k) \quad (6.24)$$

Entonces, las matrices del sistema extendido con el que implementar el control robusto, se generan a partir de las correspondientes a cada uno de los J sistemas tal y como se muestra en la ecuación (6.25).

$$A(k) = \begin{pmatrix} A_1(k) & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & A_J(k) \end{pmatrix}; \quad B(k) = \begin{pmatrix} B_1(k) \\ \vdots \\ B_J(k) \end{pmatrix}; \quad x(k) = \begin{pmatrix} x_1(k) \\ \vdots \\ x_J(k) \end{pmatrix} \quad (6.25)$$

Capítulo VII

Control óptimo del sistema

Es sabido que uno de los puntos de mayor interés en una instalación de transporte y distribución de gas es la búsqueda de la presión que se debe aplicar al gas desde las estaciones de compresión para que llegue en las condiciones requeridas por el cliente al punto de consumo. En ocasiones, dichos sistemas están controlados de forma no automática. Es decir, unos operadores de red, basándose en la experiencia adquirida, modifican los parámetros de actuación de los compresores desde la central de control para proporcionar al gas la presión apropiada. De esta forma los operadores de red logran su objetivo pero mediante una estrategia de actuación que *no será la óptima*. Así, en este *Capítulo* se desarrolla la formulación matemática necesaria para controlar este tipo de sistemas de forma automática. Las estrategias de control desarrolladas se enmarcan dentro del Control Predictivo basado en Modelos. Dichos controladores permiten calcular la secuencia de control respondiendo a la optimización de un determinado criterio, en este caso relacionado con el consumo asociado a las estaciones de compresión, a la vez que se satisfacen todas las restricciones impuestas sobre las variables del proceso.

Los objetivos de este capítulo son:

- Presentar las principales características del Control Predictivo basado en Modelos, por ser esta la técnica utilizada para implementar el control del sistema.
- Establecer la formulación del problema de optimización equivalente al problema de control sobre dicho sistema, con el que calcular la secuencia de control óptima.
- Implementar los algoritmos de optimización basados en la técnica de Punto Interior dentro de un esquema de horizonte deslizante para llevar a cabo el control en lazo cerrado del sistema.
- Proponer una solución al problema más complejo posible, consistente en la consideración de de las regiones de funcionamiento no lineales asociadas a las estaciones de compresión, así como la utilización de un número diferente de compresores en cada estación en cada instante.

7.1 Control Predictivo

7.1.1 Introducción al Control Predictivo Basado en Modelos

El Control Predictivo basado en Modelos (MPC, de Model Predictive Control en inglés) se enmarca dentro de los controladores óptimos, es decir, aquellos en los que la secuencia de control responde a la optimización de un determinado criterio [CB99]. El MPC es quizás la forma más general de formular un problema de control en el dominio del tiempo. Las características comunes a la mayoría de controladores predictivo son:

- El criterio según el cual se calcula la *secuencia de control* suele consistir en la *minimización de una función relacionada con el comportamiento futuro del sistema*, tendiendo a mantener al proceso lo más cercano posible a una trayectoria de referencia, o cerca de los puntos de operación en los que el coste asociado al funcionamiento del sistema sea mínimo.
- El comportamiento futuro del sistema, necesario para escribir la función a minimizar, se predice gracias a un modelo dinámico del mismo denominado *modelo de predicción* (de ahí el termino predictivo basado en modelo). El intervalo de tiempo futuro que se considera en la optimización se denomina *horizonte de predicción*, a veces también denominado, *horizonte de control*.
- Para dotar de cierta robustez al sistema, eliminando la posible discrepancia entre el comportamiento predicho y el comportamiento real del sistema, bien sea por errores en el modelo de predicción o perturbaciones externas, se utiliza la denominada *técnica del horizonte deslizante*, consistente en aplicar la secuencia de control obtenida durante un periodo de tiempo, tras el cual se muestrea el estado del sistema y se resuelve un nuevo problema de optimización. De esta manera, el horizonte de predicción se va deslizando a lo largo del tiempo.
- El horizonte de control es un parámetro característico del MPC que debe ser cuidadosamente seleccionado para obtener resultados óptimos. Así, un horizonte demasiado pequeño suele dar lugar a una señal de control un tanto errática, incapaz de controlar el sistema. Esto es lógico ya que reducir el horizonte de control equivale a reducir la información de la que el controlador dispone para calcular la secuencia de control. Por otro lado, en ocasiones, un horizonte demasiado grande tampoco supone una mejora significativa en el comportamiento del sistema.

7.1.2 Elementos del MPC

El control predictivo está formado por los siguientes elementos: Modelo de predicción, función de coste y restricciones, [CB99].

Modelo de predicción

El modelo de predicción es el modelo matemático que describe el comportamiento esperado del sistema, [Lim02]. Este modelo puede ser de varios tipos, sin embargo, el hecho de que el problema de optimización implicado se resuelva mediante un computador, hace que sea más natural considerar modelos discretos que continuos. Asimismo, los modelos en el espacio de estados son más generales que los modelos entrada-salida. Así, el modelo de predicción aquí considerado tiene la forma mostrada en la ecuación (7.1), siendo $x_k \in \mathbb{R}^n$ el vector de estado y $u_k \in \mathbb{R}^m$ el vector de control sobre el sistema en el instante k . Denotando por $x(k+j|k)$ al estado del sistema predicho en el instante $k+j$ a partir del estado conocido en el instante k , la ecuación (7.1) puede reescribirse de la forma mostrada en (7.2), siendo $x(k|k)=x_k$.

$$x_{k+1} = f(x_k, u_k) \quad (7.1)$$

$$x(k+j+1|k) = f(x(k+j|k), u(k+j|k)) \quad (7.2)$$

Como se puede ver, la predicción depende además de la secuencia de control aplicada desde el instante k hasta el instante $k+j$, y por lo tanto futuras. En el contexto de control predictivo, se denomina estado terminal al estado predicho al final del horizonte de predicción, es decir $x(k+N|k)$.

Función de coste

La función de coste es la función que indica el criterio a optimizar, [Lim02]. Es una función definida positiva que expresa el coste asociado a una determinada evolución del sistema a lo largo del horizonte de predicción N . Esta función suele tener la forma mostrada en la ecuación (7.3) siendo $L(x, u)$ la función de coste de etapa y $V(x)$ la función de coste terminal, ambas definidas positivas. Dado que el coste considera el comportamiento del sistema hasta un horizonte N , éste depende del estado actual del sistema x_k y de la secuencia de N actuaciones que se aplican durante el horizonte de predicción $u_F(k)$ definido por la ecuación (7.4).

$$J_N(x_k, u_F(k)) = \sum_{i=0}^{N-1} L(x(k+i|k), u(k+i|k)) + V(x(k+N|k)) \quad (7.3)$$

$$u_F(k) = \{u(k|k), u(k+1|k), \dots, u(k+N-1|k)\} \quad (7.4)$$

Restricciones

Las restricciones indican los límites dentro de los cuales se debe mantener la evolución del sistema, [Lim02]. Los valores de las señales de un sistema no deben exceder determinadas restricciones impuestas sobre el sistema, ya sea por límites físicos o bien por motivos de seguridad. Por ejemplo, los límites impuestos por los actuadores forman parte de estas restricciones. Por otro lado, la necesidad, generalmente por motivos económicos, de trabajar en puntos de operación cercanos a los límites físicos admisibles del sistema ha provocado la necesidad de incorporar dichas restricciones en la síntesis de los controladores. Estas restricciones se suelen expresar como conjuntos X y U , generalmente cerrados y acotados, en los cuales deben estar contenidos tanto los estados del sistema como la secuencia de en cada instante, de forma que se satisfagan las ecuaciones (7.5). Además, es habitual imponer una restricción sobre el estado terminal del sistema llamada restricción terminal. Ésta viene dada por un conjunto $\Omega \subseteq X$ denominado conjunto o región terminal, por lo que dicha restricción tiene la forma mostrada en la ecuación (7.6).

$$\begin{aligned} x_k &\in X && ; \quad \forall k \\ u_k &\in U && ; \quad \forall k \end{aligned} \quad (7.5)$$

$$x(k+N|k) \in \Omega \quad (7.6)$$

7.1.3 Estrategia del MPC

Teniendo en cuenta todos estos elementos, el problema de optimización asociado al controlador predictivo que se debe resolver en cada instante es el mostrado en la ecuación (7.7), [Lim02]. Este problema de optimización tiene como variables de decisión la secuencia de control a lo largo del horizonte de predicción y depende de forma paramétrica del estado del sistema.

$$\begin{aligned} \min_{u_F(k)} & J_N(x_k, u_F(k)) \\ \text{s.t.} & \quad u(k+j|k) \in U \quad ; \quad j=0, \dots, N-1 \\ & \quad x(k+j|k) \in X \quad ; \quad j=0, \dots, N-1 \\ & \quad x(k+N|k) \in \Omega \end{aligned} \quad (7.7)$$

Una vez obtenida la solución, según la estrategia del horizonte deslizante, se aplica el elemento de la secuencia de control obtenida para el instante siguiente $u^*(k|k)$ y se

vuelve a resolver en el siguiente periodo de muestreo. Así la ley de control del MPC viene dada por la ecuación (7.8).

$$u_k = u^*(k | k) \quad (7.8)$$

7.1.4 Ventajas e inconvenientes del MPC

Los controladores predictivos han tenido un notable éxito en el campo de la industria así como en la comunidad investigadora. Esto se debe a las buenas propiedades que tienen estas técnicas de control, no exentas, por otro lado, de desventajas [CB99], [MRRS00]. Entre las ventajas del MPC se pueden destacar:

- Formulación en el dominio del tiempo flexible, abierta e intuitiva, permitiendo la incorporación de distintos tipos de modelos de predicción, sean lineales o no lineales, monovariantes o multivariantes.
- Es una de las pocas técnicas que permiten controlar sistemas con restricciones incorporando éstas en el propio diseño del controlador, [Lim02]. Esto hace que sea una estrategia utilizada en muy diversas áreas del control.
- La ley de control responde a criterios óptimos.

Estas características han hecho del control predictivo una de las escasas estrategias de control avanzado con un impacto importante en problemas de ámbito industrial, [QB97]. Aún así, el MPC presenta también algunas desventajas, entre las que cabe mencionar las siguientes:

- Requiere el conocimiento de un modelo dinámico capaz de reproducir con suficiente precisión la dinámica del sistema que se pretende controlar.
- Dado que la secuencia de control se calcula de acuerdo a la resolución de un problema de optimización, requiere de un algoritmo numérico, por lo que sólo puede implementarse por computador.
- Como consecuencia del elevado coste computacional que podría requerir la resolución del problema de optimización asociado, dicha estrategia de control no es adecuada para sistemas con dinámica rápida.

Merece la pena destacar que el control predictivo es una técnica muy potente que permite formular controladores para sistemas complejos y con restricciones. Esta potencia tiene un precio asociado, el coste computacional y la sintonización del

controlador. Recientes avances en el campo del MPC proveen un conocimiento más profundo de estos controladores, obteniéndose resultados que permiten relajar estos requerimientos. Así por ejemplo, se han establecido condiciones generales para garantizar la estabilidad [May01], condiciones bajo las cuales se puede relajar la optimalidad del controlador garantizando su estabilidad [SM98] y se han desarrollado algoritmos eficientes para la resolución del problema [Bie98].

7.2 Algoritmos de optimización aplicados al control

7.2.1 Planteamiento de un problema de control óptimo

Esta sección muestra la formulación matemática del problema aquí considerado. Dicho problema puede escribirse como de un programa cuadrático robusto (RQP, de Robust Quadratic Program en inglés) en el que las restricciones de igualdad contienen el modelo dinámico del sistema a controlar, las restricciones de desigualdad imponen los límites físicos tanto en los estados del sistema como en las señales de control, y la función objetivo responde al criterio según el cual se debe calcular la señal de control.

Considérese el conjunto J de sistemas lineales variables en el tiempo con $j=1, \dots, J$, mostrados en la ecuación (7.9) durante un horizonte temporal de longitud N , donde $x_j(k) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ es el estado, $u(k) \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ es la señal de control, y donde $A_j(k) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_j(k) \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C_j(k) \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $D_j(k) \in \mathbb{R}^{p \times m}$, y $d_j \in \mathbb{R}^{p \times 1}$. Además, se conoce el estado inicial, $x_j(0)$, que puede ser diferente para cada uno de los modelos considerados. Nótese que este modelo es suficientemente rico como para describir la mayoría de los objetivos encontrados en MPC, [ML99]. Posteriormente se verá como se pueden incorporar al mismo las restricciones en los estados del sistema, las señales de control y en la variación temporal de éstas últimas. Puesto que el modelo es variable con el tiempo, quedan incluidos los sistemas no lineales, [Wri93].

$$\begin{aligned} x_j(k+1) &= A_j(k) \cdot x_j(k) + B_j(k) \cdot u(k) \quad ; \quad k = 0, \dots, N-1 \\ d_j(k) &\geq C_j(k) \cdot x_j(k) + D_j(k) \cdot u(k) \quad ; \quad k = 0, \dots, N \end{aligned} \tag{7.9}$$

Considérense ahora las funciones mostradas en la ecuación (7.10) en donde $Q_j(k) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $S_j(k) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ y $R_j(k) \in \mathbb{R}^{m \times m}$. Dichas funciones están compuestas por términos cuadráticos formados a partir de las señales de los sistemas considerados en el modelo (7.9). Esta función se puede extender fácilmente mediante la inclusión de términos lineales, aunque no se ha hecho aquí por motivos de claridad.

$$\phi_j = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^N x_j(k)^T Q_j(k) x_j(k) + 2x_j(k)^T S_j(k) u(k) + u(k)^T R_j(k) u(k) \quad ; \quad j=1, \dots, J \quad (7.10)$$

La solución a un problema de control sujeto al criterio establecido por la ecuación (7.10) sobre el sistema descrito mediante las ecuaciones dinámicas (7.9) puede obtenerse solucionando el problema de optimización mostrado en la ecuación (7.11), que a su vez puede escribirse como el programa cuadrático robusto mostrado en la ecuación (7.12) mediante la adecuada definición de las matrices y variables que aparecen en el mismo, [Han00].

$$\begin{aligned} \min_x \quad & \gamma \\ \text{s.t.} \quad & \phi_j \leq \gamma \quad ; \quad j=1, \dots, J \end{aligned} \quad (7.11)$$

$$\begin{aligned} \min_x \quad & \gamma \\ \text{s.t.} \quad & \frac{1}{2} x^T Q_j x \leq \gamma \quad ; \quad j=1, \dots, J \\ & Fx = g \\ & Cx \leq d \end{aligned} \quad (7.12)$$

Para ver esto, se puede comenzar escribiendo tanto el estado extendido como las matrices extendidas del sistema de la forma mostrada en la ecuación (7.13). Con la ayuda de dichas matrices, la dinámica del sistema extendido queda determinada por las ecuaciones de estado (7.14).

$$\begin{aligned} A(k) &= \begin{pmatrix} A_1(k) & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & A_J(k) \end{pmatrix} ; \quad B(k) = \begin{pmatrix} B_1(k) \\ \vdots \\ B_J(k) \end{pmatrix} ; \quad x(k) = \begin{pmatrix} x_1(k) \\ \vdots \\ x_J(k) \end{pmatrix} \\ C(k) &= \begin{pmatrix} C_1(k) & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & C_J(k) \end{pmatrix} ; \quad D(k) = \begin{pmatrix} D_1(k) \\ \vdots \\ D_J(k) \end{pmatrix} ; \quad d(k) = \begin{pmatrix} d_1(k) \\ \vdots \\ d_J(k) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (7.13)$$

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A(k) \cdot x(k) + B(k) \cdot u(k) \quad ; \quad k=0, \dots, N-1 \\ d(k) &\geq C(k) \cdot x(k) + D(k) \cdot u(k) \quad ; \quad k=0, \dots, N \end{aligned} \quad (7.14)$$

Definiendo el vector $x \in \mathfrak{R}^{(Jn+m)(N+1) \times 1}$ a partir del vector de estado y la señal de control en todos los instantes de tiempo del horizonte considerado tal y como se muestra en la ecuación (7.15), y las matrices $\bar{Q}_j(k) \in \mathfrak{R}^{(n+m) \times (n+m)}$ y $E_j \in \mathfrak{R}^{(n+m) \times (Jn+m)}$ como se muestra en la ecuación (7.16), cada una de las funciones ϕ_j pueden escribirse de la forma indicada en la ecuación (7.17), donde $Q_j \in \mathfrak{R}^{(Jn+m)(N+1) \times (Jn+m)(N+1)}$. Nótese, que en la ecuación (7.16) la matriz I_n de E_j se encuentra en el j -ésimo bloque de columnas mientras que la matriz I_m se encuentra siempre en el último bloque de columnas.

$$x = \begin{pmatrix} x(0) \\ u(0) \\ \vdots \\ x(N) \\ u(N) \end{pmatrix} \quad (7.15)$$

$$\bar{Q}_j(k) = \begin{pmatrix} Q_j(k) & S_j(k) \\ S_j^T(k) & R_j(k) \end{pmatrix}; \quad E_j = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & I_n & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & I_m \end{pmatrix} \quad (7.16)$$

$$\phi_j = \frac{1}{2} x^T Q_j x \quad \text{donde} \quad Q_j = \begin{pmatrix} E_j^T \bar{Q}_j(0) E_j & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & E_j^T \bar{Q}_j(N) E_j \end{pmatrix} \quad (7.17)$$

Finalmente, para que el programa cuadrático mostrado en la ecuación (7.12) esté sujeto al sistema que se pretende controlar, se deben incluir las ecuaciones dinámicas del sistema a través de las restricciones de dicho programa cuadrático. Esto puede hacerse definiendo de la forma mostrada en las ecuaciones (7.18) y (7.19) las matrices $F \in \mathfrak{R}^{J_n(N+1) \times (J_n+m)(N+1)}$ y $C \in \mathfrak{R}^{J_p(N+1) \times (J_n+m)(N+1)}$, y de la forma mostrada en la ecuación (7.20) los vectores $g \in \mathfrak{R}^{J_n(N+1) \times 1}$ y $d \in \mathfrak{R}^{J_p(N+1) \times 1}$ del problema cuadrático mostrado en la ecuación (7.12). Nótese que en la ecuación (7.20) x_0 es el estado inicial del sistema.

$$F = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -A(0) & -B(0) & I & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -A(1) & -B(1) & I & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -A(N-1) & -B(N-1) & I & 0 \end{pmatrix} \quad (7.18)$$

$$C = \begin{pmatrix} C(0) & D(0) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C(1) & D(1) & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & C(N) & D(N) \end{pmatrix} \quad (7.19)$$

$$g = \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad d = \begin{pmatrix} d(0) \\ d(1) \\ d(2) \\ \vdots \\ d(N) \end{pmatrix} \quad (7.20)$$

Por tanto, queda demostrado como se puede describir el problema de control óptimo robusto mostrado en la ecuación (7.11) como un programa cuadrático robusto como el mostrado en la ecuación (7.12).

7.2.2 Método de punto interior

Supóngase el programa cuadrático robusto mostrado en la ecuación (7.21). La solución a dicho problema será óptima si existen unos vectores $(\mu, \lambda, s, t) \geq 0$ tales que se satisfacen las condiciones de Karush–Kuhn–Tucker (KKT) mostradas en la ecuación (7.22), [Wri97]. En dichas ecuaciones, $\gamma \in \mathfrak{R}^{1 \times 1}$ y $x \in \mathfrak{R}^{(Jn+m)(N+1) \times 1}$ son las variables primales, $\pi \in \mathfrak{R}^{Jn(N+1) \times 1}$, es la variable dual asociada a la restricción de igualdad, $\mu \in \mathfrak{R}^{J \times 1}$ y $\lambda \in \mathfrak{R}^{Jp(N+1) \times 1}$ son las variables duales asociadas a las restricciones de desigualdad, y donde $s \in \mathfrak{R}^{J \times 1}$ y $t \in \mathfrak{R}^{Jp(N+1) \times 1}$ son las variables de holgura.

$$\begin{aligned} \min_x \quad & \gamma \\ \text{s.t.} \quad & \frac{1}{2} x^T Q_j x + f_j^T x + c \leq \gamma \quad ; \quad j=1, \dots, J \\ & Fx = g \\ & Cx \leq d \end{aligned} \tag{7.21}$$

$$\begin{aligned} -\gamma + s_j + \left(\frac{1}{2} x^T Q_j^T + f_j^T \right) x + c &= 0 \quad ; \quad j=1, \dots, J \\ Fx - g &= 0 \\ Cx + t - d &= 0 \\ \sum_{j=1}^J \mu_j - 1 &= 0 \end{aligned} \tag{7.22}$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^J Q_j \mu_j x_j + F^T \pi + C^T \lambda + \sum_{j=1}^J f_j \mu_j &= 0 \\ \mu_j s_j &= 0 \quad ; \quad j=1, \dots, J \\ \lambda_i t_i &= 0 \quad ; \quad i=1, \dots, Jp(N+1) \end{aligned}$$

Dichas condiciones pueden reescribirse matricialmente tal y como se muestra en la ecuación (7.23) con la ayuda de las funciones \mathcal{F}_P , \mathcal{F}_D y \mathcal{F}_C definidas en la ecuación (7.24), y de las matrices Q , Q_μ , f , f_μ , X , S , M y L definidas en la ecuación (7.25).

$$\mathcal{F}(z) = \begin{pmatrix} \mathcal{F}_P(z) \\ \mathcal{F}_D(z) \\ \mathcal{F}_C(z) \end{pmatrix} = 0 \quad \text{con} \quad (\mu, \lambda, s, t) \geq 0 \quad \text{donde} \quad z = (\gamma, \mu, s, x, \pi, \lambda, t) \tag{7.23}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_P &= \begin{pmatrix} \mathcal{F}_{P1} \\ \mathcal{F}_{P2} \\ \mathcal{F}_{P3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & I & \frac{1}{2} X^T Q^T + f^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & F & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C & 0 & 0 & I \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} c \\ -g \\ -d \end{pmatrix} \\ \mathcal{F}_D &= \begin{pmatrix} \mathcal{F}_{D1} \\ \mathcal{F}_{D2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_\mu & F^T & C^T & 0 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} 1 \\ f_\mu \end{pmatrix} \\ \mathcal{F}_C &= \begin{pmatrix} \mathcal{F}_{C1} \\ \mathcal{F}_{C2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & M & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L \end{pmatrix} z \end{aligned} \tag{7.24}$$

$$\begin{aligned}
 Q &= (Q_1 \cdots Q_J) \\
 Q_\mu &= \sum_{j=1}^J Q_j \mu_j \\
 f &= (f_1 \cdots f_J) \\
 f_\mu &= \sum_{j=1}^J f_j^T \mu_j \\
 X &= \begin{pmatrix} x & \mathbf{0} \\ & \ddots \\ \mathbf{0} & x \end{pmatrix} \in \mathfrak{R}^{(Jn+m)(N+1)J \times J} \\
 M &= \begin{pmatrix} \mu_1 & \mathbf{0} \\ & \ddots \\ \mathbf{0} & \mu_J \end{pmatrix} ; \quad L = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \mathbf{0} \\ & \ddots \\ \mathbf{0} & \lambda_{Jp(N+1)} \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{7.25}$$

Como se muestra en el Apéndice B, los métodos de punto interior primales–duales se basan en la generación iterativa de puntos $z^n, i=1,2,\dots$ con $(\mu^n, \lambda^n, s^n, t^n) \geq 0$ que se aproximen a la solución de las ecuaciones KKT cuando $n \rightarrow \infty$. Las direcciones de búsqueda son semejantes a las direcciones de Newton para las restricciones de igualdad. Omitiendo el índice de iteración n y denotando por tanto la iteración actual por z , el sistema lineal general a resolver para obtener la dirección de búsqueda es el mostrado en la ecuación (7.26). Dependiendo del vector r usado en la parte derecha de dicho sistema de ecuaciones se pueden obtener diferentes métodos primales–duales. Nótese que la matriz de dicho sistema de ecuaciones es el Jacobiano de las ecuaciones no lineales que generan las condiciones de KKT.

$$\frac{\partial \mathcal{F}(z)}{\partial z} \times \Delta z = r \tag{7.26}$$

En concreto, aquí se utiliza el denominado método predictor–corrector. La idea de un método predictor–corrector es satisfacer en todo momento la restricción $(\mu, \lambda, s, t) \geq 0$ haciendo que los puntos obtenidos en cada iteración se mantengan cercanos a los del *camino central*. Éste, está formado por el conjunto de soluciones obtenidas reemplazando $\mathcal{F}_C(z)=0$ por $\mathcal{F}_C(z)=\tau \mathbf{1}$ para $\tau \geq 0$. Una forma de hacer que los puntos obtenidos en cada iteración se aproximen al camino central a la vez que converjan a la solución de las condiciones de KKT es utilizar el vector r mostrado en la ecuación (7.27), donde ν es el gap dual del problema definido en la ecuación (7.28) siendo $q=Jp(N+1)+J$ el número total de restricciones de desigualdad.

$$r = -\mathcal{F}(z) + \sigma \nu \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathcal{F}_P(z) \\ -\mathcal{F}_D(z) \\ -\mathcal{F}_C(z) + \sigma \nu \mathbf{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_P \\ r_D \\ r_C \end{pmatrix} \tag{7.27}$$

$$v = \frac{\lambda^T t + \mu^T s}{q} \quad (7.28)$$

El gap dual mide la optimalidad del punto z actual. Nótese que el punto z se encuentra en el camino central si y sólo si $\lambda_i t_i = v$, $\mu_j s_j = v$ y $F_P(z) = 0$ y $F_D(z) = 0$. Si $\sigma = 0$, entonces el paso tomado por el algoritmo tenderá a reducir v , es decir, hacer que z esté próximo a satisfacer las condiciones de KKT. Si $\sigma = 1$, entonces el paso tomado por el algoritmo tenderá a hacer que los productos $\lambda_i t_i$ y $\mu_j s_j$ sean cercanos a v . El primer caso se toma en el paso predictor (que corresponde al *affine scaling step* comentado en el apartado B3.1 del Apéndice B) y el segundo en el corrector (que corresponde al *centering step* comentado en el apartado B3.2 del Apéndice B). La razón para no tomar únicamente pasos predictores es que la longitud del paso así calculada podría tender a valores muy pequeños obteniendo un ritmo de convergencia bajo. A su vez, se puede tomar un valor $\sigma \in (0, 1)$ en el paso corrector que sea mayor o menor en función de la necesidad de corrección en dicho paso.

La mayoría de los métodos de punto interior primales-duales aseguran que la norma de la función F esté limitada por una constante múltiplo de v . Para ser más precisos, los puntos obtenidos en cada iteración deberían estar dentro de la región Ω definida por las condiciones mostradas en la ecuación (7.29), donde $\eta \in (0, 1)$, $\beta > 0$, $j = 1, \dots, J$ e $i = 1, \dots, Jp(N+1)$. Si $\beta = 0$ entonces el método se llama factible, en otro caso se denomina no factible. En este último caso los puntos obtenidos se van aproximando más y más a la factibilidad a medida que v disminuye. Las desigualdades que incluyen η aseguran que los puntos obtenidos no estén demasiado lejos del camino central.

$$\Omega = \left\{ (\mu, \lambda, s, t) \geq 0, \quad \|F_P(z)\|_2 \leq \beta v, \quad \|F_D(z)\|_2 \leq \beta v, \quad \mu_j s_j \geq \eta v, \quad \lambda_i t_i \geq \eta v \right\} \quad (7.29)$$

La parte del algoritmo que consume mayores recursos computacionales es el cálculo de la dirección de búsqueda en cada iteración. Dicha dirección se obtiene resolviendo el sistema de ecuaciones (7.26). Dicho sistema se puede escribir de la forma mostrada en la ecuación (7.30), siendo las matrices S y T las mostradas en la ecuación (7.31).

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & I & X^T Q^T + f^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & F & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C & 0 & 0 & I \\ 0 & -1^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & QX + f & 0 & Q_\mu & F^T & C^T & 0 \\ 0 & S & M & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & T & L \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta\gamma \\ \Delta\mu \\ \Delta s \\ \Delta x \\ \Delta\pi \\ \Delta\lambda \\ \Delta t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{P1} \\ r_{P2} \\ r_{P3} \\ r_{D1} \\ r_{D2} \\ r_{C1} \\ r_{C2} \end{pmatrix} \quad (7.30)$$

$$S = \begin{pmatrix} s_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & s_J \end{pmatrix} ; \quad T = \begin{pmatrix} t_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & t_{Jp(N+1)} \end{pmatrix} \quad (7.31)$$

Para reducir este coste, las ecuaciones de dicho sistema se pueden reorganizar de la forma mostrada en la ecuación (7.32). A partir de estas ecuaciones, se puede ver que Δt , $\Delta \lambda$ y Δs se pueden calcular de forma explícita mediante las ecuaciones (7.33), por lo que para obtener la dirección de búsqueda será suficiente con resolver el sistema mostrado en la ecuación (7.34).

$$\begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{1}^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\mathbf{1} & 0 & I & X^T Q^T + f^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S & M & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & QX + f & 0 & Q_\mu & F^T & C^T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & F & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & T & L \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta \gamma \\ \Delta \mu \\ \Delta s \\ \Delta x \\ \Delta \pi \\ \Delta \lambda \\ \Delta t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_\gamma \\ r_\mu \\ r_s \\ r_x \\ r_\pi \\ r_\lambda \\ r_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{D1} \\ r_{P1} \\ r_{C1} \\ r_{D2} \\ r_{P2} \\ r_{P3} \\ r_{C2} \end{pmatrix} \quad (7.32)$$

$$\begin{aligned} \Delta t &= r_t - C \Delta x \\ \Delta \lambda &= T^{-1} (r_t - L \Delta t) \\ \Delta s &= M^{-1} (r_s - S \Delta \mu) \end{aligned} \quad (7.33)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{1}^T & 0 & 0 \\ -\mathbf{1} & M^{-1} S & X^T Q^T + f^T & 0 \\ 0 & QX + f & Q_\mu + C^T T^{-1} L C & F^T \\ 0 & 0 & F & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta \gamma \\ \Delta \mu \\ \Delta x \\ \Delta \pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_\gamma \\ r_\mu - M^{-1} r_s \\ r_x - C^T T^{-1} (r_t - L r_\lambda) \\ r_\pi \end{pmatrix} \quad (7.34)$$

El bloque de matrices 2×2 de la esquina inferior derecha de la matriz del sistema (7.34) es mucho más grande que el resto, por lo que tiene sentido hacer las particiones mostradas en la ecuación (7.35) donde la definición de las matrices y los vectores es obvia identificando los términos de ambos sistemas. Despejando Δ_2 de la segunda ecuación de dicho sistema se obtiene la ecuación (7.36), y sustituyendo Δ_2 en la primera se obtiene el sistema de ecuaciones (7.37) con el que calcular Δ_1 .

$$\begin{pmatrix} \Phi_1 & \Phi_{12} \\ \Phi_{12}^T & \Phi_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} \quad (7.35)$$

$$\Delta_2 = \Phi_2^{-1} U_2 - \Phi_2^{-1} \Phi_{12}^T \Delta_1 \quad (7.36)$$

$$(\Phi_1 - \Phi_{12} \Phi_2^{-1} \Phi_{12}^T) \cdot \Delta_1 = U_1 - \Phi_{12} \Phi_2^{-1} U_2 \quad (7.37)$$

Nótese que los términos $\Phi_2^{-1}U_2$ y $\Phi_2^{-1}\Phi_{12}^T$ aparecen en ambas ecuaciones. Renombrando dichos términos tal y como se muestra en la ecuación (7.38), las ecuaciones (7.36) y (7.37) quedan tal y como se muestra en las ecuaciones (7.39) y (7.40) respectivamente. Finalmente, teniendo en cuenta la estructura de las matrices Φ_{12} y Φ_2 , estas ecuaciones se pueden reescribir tal y como se muestra en las ecuaciones (7.41) y (7.42).

$$\Phi_2^{-1}\Phi_{12}^T = \begin{pmatrix} \xi_{11} \\ \xi_{21} \end{pmatrix} ; \quad \Phi_2^{-1}U_2 = \begin{pmatrix} \xi_{12} \\ \xi_{22} \end{pmatrix} \quad (7.38)$$

$$\Delta_2 = \begin{pmatrix} \xi_{12} \\ \xi_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \xi_{11} \\ \xi_{21} \end{pmatrix} \Delta_1 \quad (7.39)$$

$$\left(\Phi_1 - \Phi_{12} \begin{pmatrix} \xi_{11} \\ \xi_{21} \end{pmatrix} \right) \cdot \Delta_1 = U_1 - \Phi_{12} \begin{pmatrix} \xi_{12} \\ \xi_{22} \end{pmatrix} \quad (7.40)$$

$$\Delta_2 = \begin{pmatrix} \xi_{12} \\ \xi_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \xi_{11} \\ \xi_{21} \end{pmatrix} \Delta\mu \quad (7.41)$$

$$\left(\Phi_1 - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (X^T Q^T + f^T) \xi_{11} \end{pmatrix} \right) \cdot \Delta_1 = U_1 - \begin{pmatrix} 0 \\ (X^T Q^T + f^T) \xi_{12} \end{pmatrix} \quad (7.42)$$

Por tanto, si se conocen los términos ξ_{11} , ξ_{12} , ξ_{21} y ξ_{22} , Δ_1 puede calcularse resolviendo el sistema (7.40), de tan solo $J+1$ ecuaciones, mediante un resolutor estándar, para a continuación obtener Δ_2 de forma explícita mediante la ecuación (7.39). De la ecuación (7.38) se deduce que ξ_{11} , ξ_{12} , ξ_{21} y ξ_{22} pueden calcularse resolviendo el sistema mostrado en la ecuación (7.43). La dicho sistema tiene $(2Jn+m)(N+1)$ ecuaciones por lo que debe utilizarse algún método especial si se quiere resolver de forma eficiente.

$$\Phi_2 \begin{pmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} \\ \xi_{21} & \xi_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi_{12}^T & U_2 \end{pmatrix} \quad (7.43)$$

7.2.3 Recursión de Riccati

El sistema mostrado en la ecuación (7.43) se puede resolver de forma eficiente usando la recursión de Riccati, de forma análoga a en [RWR97]. Para ello, dicho sistema se debe reescribir de la forma mostrada en la ecuación (7.44), donde los vectores \bar{x} , $\bar{\pi}$, V_x y V_π vienen dados mediante la ecuación (7.45).

$$\begin{pmatrix} Q_\mu + C^T T^{-1} L C & F^T \\ F & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{\pi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_x \\ V_\pi \end{pmatrix} \quad (7.44)$$

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} \bar{x}(0) \\ \bar{u}(0) \\ \vdots \\ \bar{x}(N) \\ \bar{u}(N) \end{pmatrix}; \quad V_x = \begin{pmatrix} \bar{r}_x(0) \\ \bar{r}_u(0) \\ \vdots \\ \bar{r}_x(N) \\ \bar{r}_u(N) \end{pmatrix}; \quad \bar{\pi} = \begin{pmatrix} \bar{\pi}(0) \\ \vdots \\ \bar{\pi}(N) \end{pmatrix}; \quad V_\pi = \begin{pmatrix} \bar{r}_\pi(0) \\ \vdots \\ \bar{r}_\pi(N) \end{pmatrix} \quad (7.45)$$

Teniendo en cuenta como se construyen las matrices Q_μ , C , T y L , puede verse que el primer bloque de la matriz Φ_2 tan solo contiene algunos términos en torno a su diagonal tal y como se muestra en la ecuación (7.46), donde las matrices P_1 , P_{12} , P_{21} y P_2 se obtienen según la ecuación (7.47) y la matriz $\Sigma(k)$ está definida mediante la ecuación (7.48).

$$Q_\mu + C^T T^{-1} L C = \begin{pmatrix} P_1(k) & P_{12}(k) & & & 0 \\ P_{12}^T(k) & P_2(k) & & & \\ & & \ddots & & \\ 0 & & & P_1(N) & P_{12}(N) \\ & & & P_{12}^T(N) & P_2(N) \end{pmatrix} \quad (7.46)$$

$$\begin{pmatrix} P_1(k) & P_{12}(k) \\ P_{12}^T(k) & P_2(k) \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^J E_j^T \bar{Q}_j(k) E_j \mu_j + (C(k) \ D(k))^T \Sigma(k) (C(k) \ D(k)) \quad (7.47)$$

$$\begin{pmatrix} \Sigma(0) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \Sigma(N) \end{pmatrix} = L T^{-1} \quad (7.48)$$

Ahora, teniendo en cuenta la estructura de la matriz F mostrada en la ecuación (7.18) y la del primer bloque de la matriz Φ_2 mostrada en la (7.46), las ecuaciones del sistema (7.44) se pueden reorganizar de la forma mostrada en la ecuación (7.49). Se puede demostrar usando inducción que existe una secuencia de matrices $\Pi(k) \in \mathcal{R}^{Jn \times Jn}$, y $\Psi(k) \in \mathcal{R}^{Jn \times (J+1)}$ que se satisfacen la ecuación (7.50), a partir de la cual calcular los vectores \bar{x} y $\bar{\pi}$ mediante la recursión de Riccati.

$$\begin{pmatrix} 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ I & P_1(0) & P_{12}(0) & -A^T(0) & 0 \\ 0 & P_{12}^T(0) & P_2(0) & -B^T(0) & 0 \\ 0 & -A(0) & -B(0) & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 & I & P_1(1) \\ & & & \ddots & \\ & & 0 & I & 0 \\ & 0 & & I & P_1(N) & P_{12}(N) \\ & & 0 & P_{12}^T(N) & P_2(N) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{\pi}(0) \\ \bar{x}(0) \\ \bar{u}(0) \\ \bar{\pi}(1) \\ \bar{x}(1) \\ \vdots \\ \bar{\pi}(N) \\ \bar{x}(N) \\ \bar{u}(N) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{r}_\pi(0) \\ \bar{r}_x(0) \\ \bar{r}_u(0) \\ \bar{r}_\pi(1) \\ \bar{r}_x(1) \\ \vdots \\ \bar{r}_\pi(N) \\ \bar{r}_x(N) \\ \bar{r}_u(N) \end{pmatrix} \quad (7.49)$$

$$\bar{\pi}(k) + \Pi(k)\bar{x}(k) = \Psi(k) \quad (7.50)$$

El algoritmo 7.1 muestra el pseudocódigo para la implementación de la recursión de Riccati con la que resolver eficientemente las direcciones de búsqueda en el algoritmo 7.2.

Algoritmo 7.1: Recursión de Riccati.

x=RICCATI(Q, f, C, d, F, g, x0, N, TOL)

(1) **Inicialización**

$$\Pi(N) = P_1(N) - P_{12}(N)P_2^{-1}(N)P_{12}^T(N)$$

$$\Psi(N) = \bar{r}_x(N) - P_{12}(N)P_2^{-1}(N)\bar{r}_u(N)$$

(2) **for** k=N-1, ..., 0

(3) **Recursión hacia atrás 1**

$$G(k) = P_2(k) + B^T(k)\Pi(k+1)B(k)$$

$$\Xi(k) = P_{12}(k) + A^T(k)\Pi(k+1)B(k)$$

$$L_u(k) = G^{-1}(k)\Xi^T(k)$$

$$\Pi(k) = P_1(k) + A^T(k)\Pi(k+1)A(k) - \Xi(k)L_u(k)$$

(4) **Recursión hacia atrás 2**

$$\psi(k) = \Pi(k+1)\bar{r}_x(k+1) - \Psi(k+1)$$

$$\phi(k) = \bar{r}_u(k) - B^T(k)\psi(k)$$

$$u_o(k) = G^{-1}(k)\phi(k)$$

$$\Psi(k) = \bar{r}_x(k) - \Xi(k)u_o(k) - A^T(k)\psi(k)$$

(5) **end**

(6) $\bar{x}(0) = \bar{r}_x(0)$

(7) **for** k=0, ..., N-1

(8) **Recursión hacia delante**

$$\bar{u}(k) = u_o(k) - L_u(k)\bar{x}(k)$$

$$\bar{x}(k+1) = A(k)\bar{x}(k) + B(k)\bar{u}(k) + \bar{r}_x(k+1)$$

$$\bar{\pi}(k) = -\Pi(k)\bar{x}(k) + \Psi(k)$$

(9) **end**

(10) $\bar{\pi}(k) + \Pi(k)\bar{x}(k) = \Psi(k)$

7.2.4 Implementación del algoritmo

Hay varios aspectos prácticos a considerar a la hora de implementar el algoritmo de Punto Interior planteado. En concreto, se muestran aquí ciertos aspectos

relacionados con la inicialización y terminación del algoritmo. Finalmente, se muestra el pseudocódigo para la implementación del algoritmo en un computador.

Inicialización del algoritmo

La experiencia computacional demuestra que la velocidad de convergencia de los métodos de punto interior depende de la elección del punto de partida, [Wri93]. Por ello, éste debe tomarse teniendo en cuenta ciertos criterios. En primer lugar z^o debería estar cerca del camino central, es decir, los productos $\lambda_i t_i$ y $\mu_i s_i$ deberían ser del mismo orden de magnitud. En segundo lugar, z^o no debería estar demasiado lejos de la región factible, por lo que $\|F_P(z^o)\|_{2/v^o}$ y $\|F_D(z^o)\|_{2/v^o}$ no deberían ser demasiado grandes.

Además, para el caso de un problema de control, es posible satisfacer la condición $Fx=g$ a partir de las ecuaciones dinámicas vistas en (7.9) con un punto inicial $x(0)$ y una secuencia de control $\{u(k)\}$. Entonces, el segundo bloque de filas de F_P será cero. La libertad para la elección de la secuencia $\{u(k)\}$ puede ser utilizada para tratar de satisfacer la condición $Cx \leq d$. En aplicaciones de MPC, $u^o(k)$ podría ser la solución óptima obtenida en el horizonte anterior, [Wri96]. En caso contrario (control en lazo abierto o el primer horizonte de control en MPC) se puede tomar como cero.

El multiplicador de Lagrange μ se puede inicializar a $\mu^o = 1/J$ lo que hace cero la primera fila de F_D . Entonces, γ^o y s^o pueden tomarse como se muestra en la ecuación (7.51) para hacer cero el primer bloque de filas de F_P .

$$\gamma^o = \max\left(\frac{1}{2}(X^o)^T Q x^o + \mu^o\right) ; \quad s^o = \gamma^o \mathbf{1} - \frac{1}{2}(X^o)^T Q x^o \quad (7.51)$$

Los productos $\mu_i^o s_j^o$ suelen tener un valor similar ya que los diferentes modelos suelen ser parecidos en la mayoría de las aplicaciones prácticas. Así, tomando \bar{v} como se muestra en la ecuación (7.52) es posible conseguir que todos los productos $\lambda_i^o t_i^o$ sean iguales a \bar{v} mediante la resolución de la ecuación (7.53). Esto hace a su vez que el tercer bloque de columnas en F_P tenga elementos pequeños para aquellas restricciones de desigualdad, $Cx \leq d$, que son satisfechas mediante $x=x^o$. Nótese como aquí sería de ayuda una elección inteligente para la secuencia $\{u^o(k)\}$.

$$\bar{v} = \frac{(\mu^o)^T s}{L} \quad (7.52)$$

$$t_i^o = \max\left(d - Cx^o, \sqrt{\bar{v}} \mathbf{1}\right) ; \quad \lambda_i^o = \frac{\bar{v}}{t_i^o} \quad (7.53)$$

Tan solo queda por determinar el valor inicial que adoptar para la variable π . Puesto que sus posibles valores no están restringidos, ésta puede tomarse como el resultado de minimizar el problema de mínimos cuadrados mostrado en la ecuación (7.54). Para algunas aplicaciones esto podría ser poco eficiente desde el punto de vista computacional por lo que puede tomarse $\pi^0=0$.

$$\|Q_\mu x^0 + F^T \pi + C^T \lambda^0\|_2 \tag{7.54}$$

Finalmente, los parámetros de control utilizados en el algoritmo de punto interior también deben ser inicializados. Para que z^0 esté en Ω se debe mantener la condición $\beta \geq \beta_{\min}$, donde β_{\min} viene dado por la ecuación (7.55). En concreto, podemos tomar $\beta=2\beta_{\min}$. Para η tenemos el valor 0.001.

$$\beta_{\min} = \frac{\max(\|F_P(0)\|_2, \|F_D(0)\|_2)}{\nu^0} \tag{7.55}$$

Finalización del algoritmo

Puesto que nunca se puede encontrar la solución exacta al problema mediante un método de punto interior, se debe establecer algún criterio de terminación para parar la ejecución del algoritmo. Parece razonable utilizar una determinada tolerancia sobre los residuos y el gap dual utilizando medidas relativas. En concreto, se suelen tomar los criterios mostrados en la ecuación (7.56) con una tolerancia TOL.

$$\frac{\|F_P(z)\|_2}{1 + \|F_P(0)\|_2} \leq \text{TOL} \quad ; \quad \frac{\|F_D(z)\|_2}{1 + \|F_D(0)\|_2} \leq \text{TOL} \quad ; \quad \frac{\mu^T s + \lambda^T t}{1 + \gamma} \leq \text{TOL} \tag{7.56}$$

Implementación

El algoritmo 7.2 muestra el pseudocódigo para la implementación del método de punto interior aquí desarrollado. Tal y como puede verse, dicho algoritmo incluye algunas características del algoritmo de Mehrotra visto en el apartado B3.3 del *Apéndice B*. Recuérdese que la tercera característica (línea 2) se basa en una elección inteligente del punto de partida, la primera (línea 8) se basa en la estimación inteligente del parámetro de centrado a utilizar en la etapa correctora (línea 13). Finalmente, la cuarta característica (línea 17) incluye una heurística para tomar una fracción de la longitud del paso. Esta implementación da lugar a una convergencia típica del algoritmo donde las ecuaciones (7.56) se satisfacen para TOL=10⁻³ en unos 20 pasos independientemente del tamaño del problema.

Algoritmo 7.2: Algoritmo de Punto Interior.

```

x=PUNTO_INTERIOR(Q, f, C, d, F, g, x0, N, TOL)
(1) Fijar parámetros de control  $(\chi, \gamma)$ 
(2) Tomar un punto inicial  $z^0$  (Mehrotra 3)
(3) for  $n=0, \dots, N$ 
(4)   Calcular el gap dual  $v$ 
(5)   if Eqs.(7.53) $<TOL$ 
(6)     return  $x$ 
(7)   end
(8)   Paso predictor (Affine–Scaling step): Fijar  $\sigma=0$ . (Mehrotra 1)
(9)     Calcular  $\Delta z_p^n$  resolviendo el sistema (7.26)
(10)    Tomar  $\alpha^n$  como el primer elemento de la secuencia  $\{1, \chi, \chi^2, \dots\}$ 
        para el que  $z^n + \alpha^n \Delta z_p^n \in \Omega$ 
(11)    Calcular  $z_p = z^n + \alpha^n \Delta z_p^n$  y con él el gap dual  $v_p$ 
(13)   Paso corrector (Centering step): Fijar  $\sigma = (v_p/v)^3$  (Mehrotra 2)
(14)    Calcular  $\Delta z_c^n$  resolviendo el sistema (7.26) con  $F(z)=0$ 
(15)    Calcular la dirección de búsqueda total  $\Delta z^n = \Delta z_p^n + \Delta z_c^n$ 
(16)    Tomar  $\alpha^n$  como el primer elemento de la secuencia  $\{1, \chi, \chi^2, \dots\}$ 
        para el que  $z^n + \alpha^n \Delta z^n \in \Omega$ 
(17)    Tomar fracción de  $\alpha^n$  como  $\alpha^n = \gamma \alpha^n$ , donde  $\gamma$  se aproxima más a
        1 a medida que se llega a la solución. (Mehrotra 4)
(18)    Calcular el nuevo punto  $z^{n+1} = z^n + \alpha^n \Delta z^n$ 
(19) end

```

7.3 Control de presión en un gasoducto

7.3.1 Planteamiento del problema

El primer problema de control sobre el que probar el algoritmo de optimización desarrollado en la sección anterior es el control de la presión del gas a la salida de una red compuesta por un único gasoducto. El gasoducto aquí considerado tiene las mismas características que el mostrado en la sección 6.2 del *Capítulo* anterior. Así, el problema consiste en encontrar la presión con la que introducir el flujo de gas a la entrada del gasoducto, $p_e(k)$, de tal forma que la presión a la salida del mismo, $p_s(k)$,

siga una determinada referencia, $p_{ref}(k)$. La figura 7.1 muestra la referencia aquí considerada. Además, debe tenerse en cuenta que las variables $p_e(k)$, $p_s(k)$ y $Q(k)$ están ligadas mediante el modelo en variables de estado del sistema. La demanda de gas, $Q(k)$, viene especificada mediante la curva mostrada en la figura 7.2. Dicha demanda es una curva $f(t)$ periódica con periodo 2 días que puede incorporarse al problema mediante la restricción $Q(k)=f(kT)$. Finalmente, deben considerarse otras restricciones tales como las impuestas sobre la máxima variación temporal de la señal de control, $|\Delta p_e(k)| \leq K$, así como en los valores máximo (p_{max}) y mínimo (p_{min}) permitidos para las presiones de entrada y salida. Por tanto, dicho problema de control puede resolverse encontrando la solución al problema de optimización mostrado en la ecuación (7.57).

$$\begin{aligned}
 \min_{p_e} \quad & \sum_{k=0}^N (p_s(k) - p_{ref}(k))^2 \\
 \text{s.t.} \quad & p_s(k+1) = A \cdot p_s(k) + B \cdot \begin{pmatrix} p_e(k) \\ Q(k) \end{pmatrix} \\
 & Q(k) = f(kT) \\
 & \left| \frac{p_e(k+1) - p_e(k)}{T} \right| \leq K \\
 & p_{min} \leq p_s(k) \leq p_{max} \\
 & p_{min} \leq p_e(k) \leq p_{max}
 \end{aligned} \tag{7.57}$$

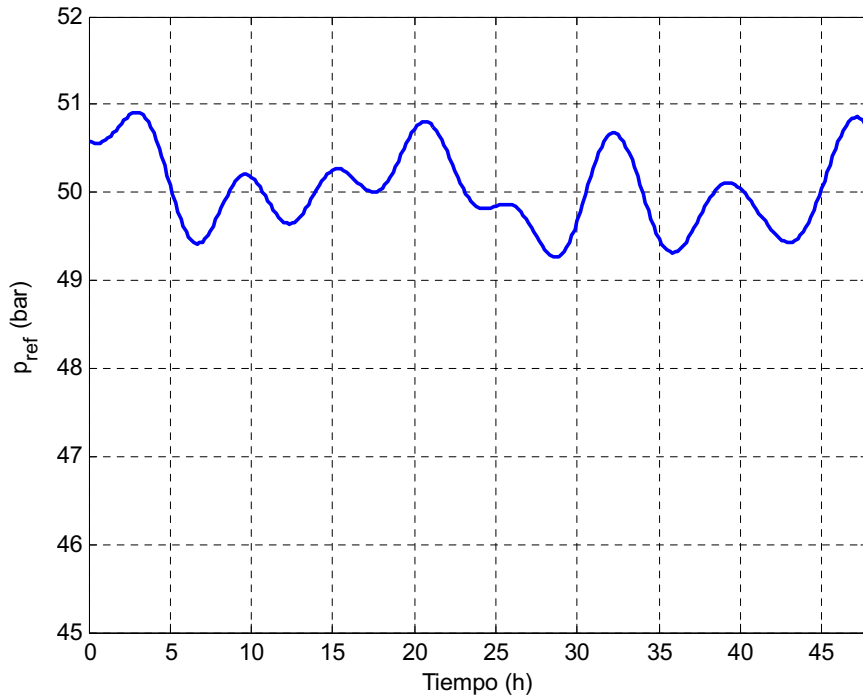


Figura 7.1: Presión de referencia requerida a la salida del gasoducto.

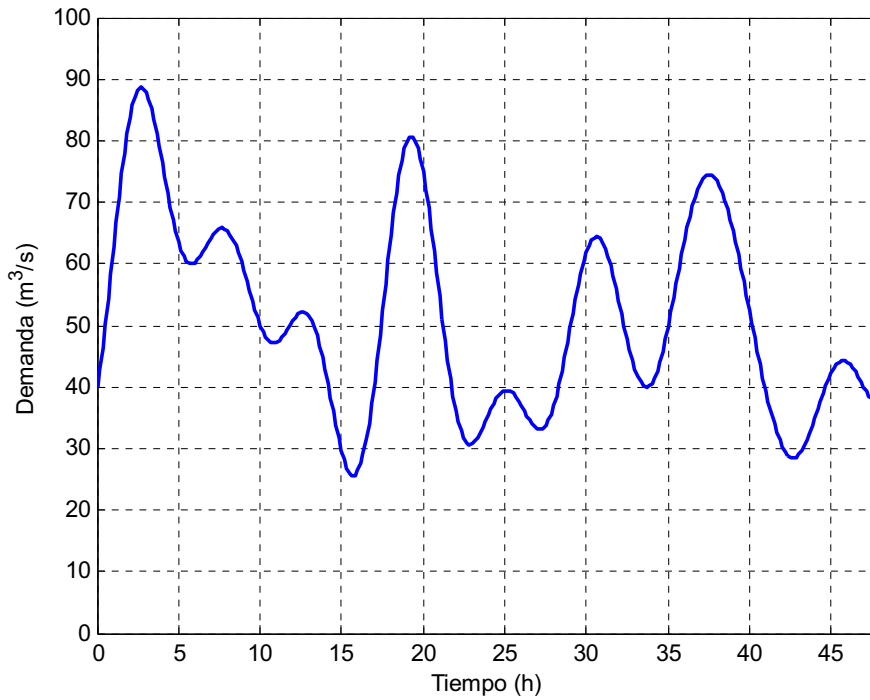


Figura 7.2: Demanda variable.

7.3.2 Construcción de las matrices del problema

Para resolver el problema de control aquí planteado mediante el algoritmo de optimización desarrollado en la sección anterior, es necesario reescribir el problema mostrado en la ecuación (7.57) de la forma mostrada en la ecuación (7.21). Para ello, puede definirse un vector *ref* con el que especificar la referencia en presiones a seguir, a partir del cual reescribir el problema mostrado en la ecuación (7.57) tal y como se muestra en la ecuación (7.58). Haciendo el cambio de variable $y=x-ref$, este problema se puede transformar a su vez en el mostrado en la ecuación (7.59). Dicho problema ya puede resolverse mediante el algoritmo desarrollado en la sección anterior ya que tiene la misma forma que el mostrado en la ecuación (7.21) sin mas que tener en cuenta que $g=g-F\text{ref}$ y $d=d-C\text{ref}$. Ahora, tan solo queda construir los vectores *x*, *ref*, *g* y *d* y las matrices Q_i , *F* y *C* de tal forma que los problemas mostrados en la ecuaciones (7.57) y (7.58) sean equivalentes.

$$\begin{aligned}
 & \min_x \quad \gamma \\
 & \text{s.t.} \quad (x - \text{ref})^T Q_j (x - \text{ref}) \leq \gamma \quad ; \quad j = 1, \dots, J \\
 & \quad \quad Fx = g \\
 & \quad \quad Cx \leq d
 \end{aligned} \tag{7.58}$$

$$\begin{aligned}
 & \min_x \gamma \\
 & \text{s.t.} \quad y^T Q_i y \leq \gamma \quad ; \quad i = 1, \dots, L \\
 & \quad \quad Fy = g - F \cdot \text{ref} \\
 & \quad \quad Cy \leq d - C \cdot \text{ref}
 \end{aligned} \tag{7.59}$$

Para implementar la restricción sobre la máxima variación temporal de la señal de control se define una nueva variable, $\xi_p(k)$, de la forma mostrada en la ecuación (7.60) que puede acomodarse en el modelo en variables de estado del sistema sin más que aumentar el estado del mismo tal y como se muestra en la ecuación (7.61), en donde a , b_1 y b_2 son los coeficientes de las matrices A y B originales. Por tanto, las nuevas matrices A y B son las mostradas en la ecuación (7.62).

$$\xi_p(k) = p_e(k-1) \tag{7.60}$$

$$\begin{pmatrix} p_s(k+1) \\ \xi_p(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_s(k) \\ \xi_p(k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_e(k) \\ Q(k) \end{pmatrix} \tag{7.61}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ; \quad B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{7.62}$$

Comparando las ecuaciones (7.9) y (7.61), y teniendo en cuenta la definición del vector x en la ecuación (7.15), dicho vector para este problema se escribe tal y como se muestra en la ecuación (7.63). Ahora, teniendo en cuenta la definición de la función objetivo del problema (7.57), el vector ref debe ser el mostrado en la ecuación (7.63). La matriz Q_j con la que implementar la función objetivo se calcula mediante la ecuación (7.17), utilizando $n=2$ y $m=2$ para construir E_j . Finalmente, teniendo en cuenta la definición de la función objetivo mostrada en la ecuación (7.10), puede verse que las matrices contenidas en $\bar{Q}_j(k)$ deben ser las mostradas en la ecuación (7.64).

$$x = \begin{pmatrix} p_s(0) \\ \xi_p(0) \\ p_e(0) \\ Q(0) \\ \vdots \\ p_s(N) \\ \xi_p(N) \\ p_e(N) \\ Q(N) \end{pmatrix} ; \quad \text{ref} = \begin{pmatrix} p_{\text{ref}}(0) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ p_{\text{ref}}(N) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{7.63}$$

$$Q_j(k) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ; \quad S_j(k) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ; \quad R_j(k) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{7.64}$$

Las restricciones de igualdad se utilizan para ligar las variables del problema mediante las ecuaciones dinámicas del modelo. Así, la matriz F mostrada en la ecuación (7.18) se construye utilizando las matrices A y B mostradas en la ecuación (7.62). Ahora, teniendo en cuenta la definición del vector g en la ecuación (7.20), dicho vector para este problema se construye tal y como se muestra en la ecuación (7.65).

$$g = \begin{pmatrix} p_s(0) \\ \xi_p(0) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - F \cdot ref \quad (7.65)$$

Finalmente, las restricciones de desigualdad se utilizan para imponer límites sobre las señales del sistema. En este sentido, se tienen los límites sobre el valor de las presiones de entrada y salida, y el límite sobre la máxima variación temporal de la presión de entrada. Además, se ha utilizado este tipo de restricciones para fijar la demanda de gas $Q(k)$ según la curva $f(t)$. Dichas restricciones se muestran en la ecuación (7.66), que escritas de la forma mostrada en la ecuación (7.14), proporcionan el vector $d(k)$, así como las matrices $C(k)$ y $D(k)$ mostradas en la ecuación (7.67). A partir de dichas matrices, la matriz C se construye de acuerdo con la ecuación (7.19). Finalmente, teniendo en cuenta la definición del vector d en la ecuación (7.20), dicho vector para este problema se escribe tal y como se muestra en la ecuación (7.68).

$$\begin{aligned} p_{\min} \leq p_s \leq p_{\max} &\Rightarrow \begin{cases} -p_{\min} \geq -p_s \\ p_{\max} \geq p_s \end{cases} \\ |\xi_p - p_e| \leq KT &\Rightarrow \begin{cases} K \cdot T \geq \xi_p - p_e \\ K \cdot T \geq -\xi_p + p_e \end{cases} \\ p_{\min} \leq p_e \leq p_{\max} &\Rightarrow \begin{cases} -p_{\min} \geq -p_e \\ p_{\max} \geq p_e \end{cases} \\ Q(k) = f(kT) &\Rightarrow \begin{cases} -f(kT) \geq -Q(k) \\ f(kT) \geq Q(k) \end{cases} \end{aligned} \quad (7.66)$$

$$d(k) = \begin{pmatrix} -p_{\min} \\ p_{\max} \\ K \cdot T \\ K \cdot T \\ -p_{\min} \\ p_{\max} \\ -f(kT) \\ f(kT) \end{pmatrix}; \quad C(k) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad D(k) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (7.67)$$

$$d = \begin{pmatrix} d(0) \\ \vdots \\ d(N) \end{pmatrix} = C \cdot \text{ref} \quad (7.68)$$

Una vez formadas todas las matrices del problema óptimo equivalente, se ha utilizado el algoritmo de Punto Interior desarrollado para obtener la secuencia de control durante un horizonte de 2 días necesaria para que para la demanda de gas mostrada en la figura 7.2 llegue a su destino con la presión especificada en la figura 7.1. Otros datos del problema son $f_{\min}=30\text{bar}$, $f_{\max}=80\text{bar}$ y $K=1\text{mbar/s}$. Utilizando un periodo de muestreo de $T=600\text{s}$, la secuencia de control está formada por $N=288$ elementos. Además, el modelo de predicción tan solo consta del nominal, por lo que $J=1$. Teniendo en cuenta estos valores, el problema a resolver consta de 1152 variables, 576 restricciones de igualdad y 2304 restricciones de desigualdad. La figura 7.3 muestra la evolución de la función objetivo así como de los parámetros mostrados en la ecuación (7.56) utilizados para chequear la convergencia del algoritmo. En concreto, se ve como se reduce el valor de la función objetivo disminuye en cada iteración. Además, puede verse como el gap dual comienza aumentando hasta que el algoritmo encuentra un punto primal-dual factible, a partir del cual comienza a disminuir junto con las infactibilidades primal y dual.

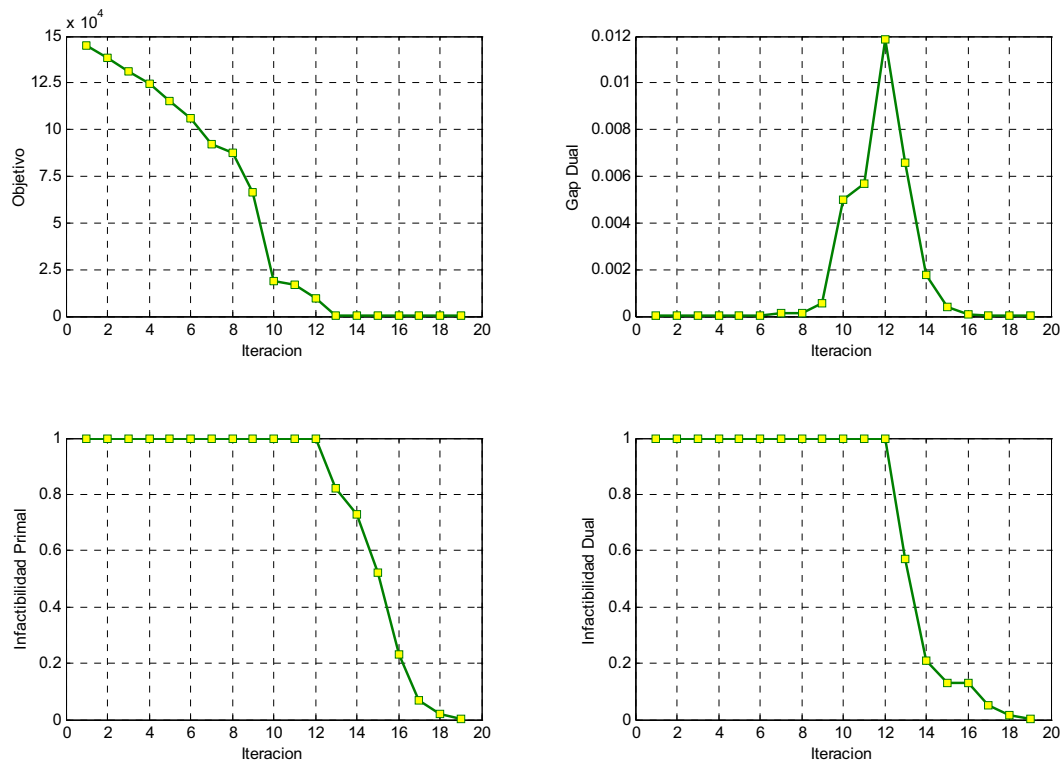


Figura 7.3: Convergencia del algoritmo de Punto Interior.

La parte inferior de la figura 7.4 muestra la secuencia de control obtenida. Utilizando dicha secuencia de control como presión de entrada sobre el modelo de predicción se obtiene la presión de salida mostrada en la parte superior de la figura 7.4. Tal y como puede verse dicha presión sigue en todo momento a la presión de referencia durante todo el horizonte de control considerado.

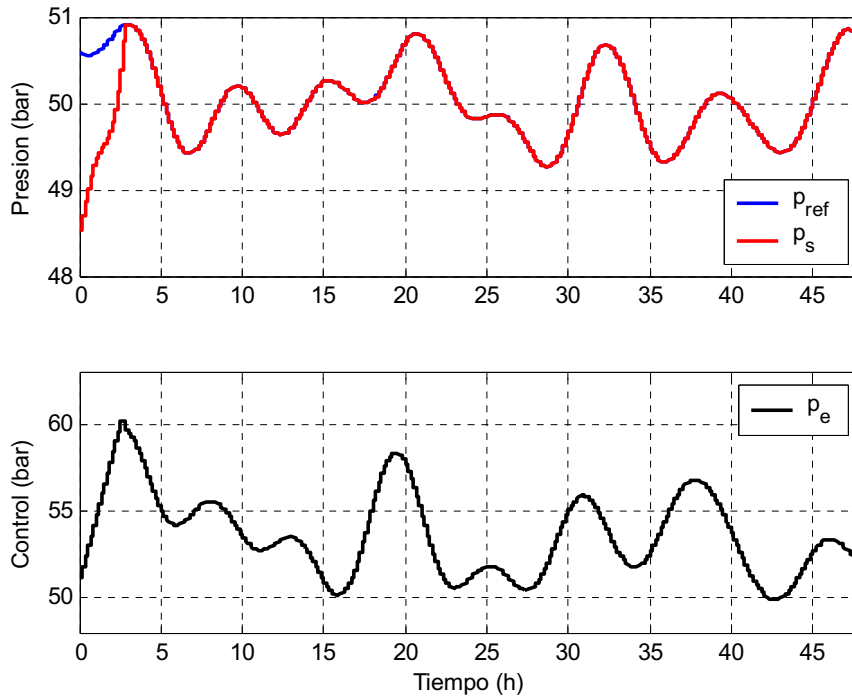


Figura 7.4: Secuencia de control obtenida.

Tal y como se acaba de ver, la secuencia de control se ha calculado de tal forma que la presión de salida obtenida mediante el modelo del sistema siga una determinada referencia, utilizando además la predicción de la demanda de gas durante los dos días del horizonte de control. Así, una vez obtenida, dicha secuencia de control puede utilizarse para tratar de controlar el sistema correspondiente en lazo abierto. Para ello, se ha construido el modelo Simulink mostrado en la figura 7.5. Dicha figura muestra además el resultado de simular este proceso. Como puede verse, el sistema no sigue exactamente la referencia. Esto es debido a que consecuencia del burdo proceso de identificación utilizado, el modelo en variables de estado utilizado por el controlador para predecir el comportamiento futuro del sistema dentro del horizonte de control no coincide exactamente con el sistema real. Como se verá a continuación, esto carece de importancia ya que ni si quiera el modelo utilizado para predecir el comportamiento del sistema pueda ser controlado en lazo abierto como consecuencia

del error que normalmente está presente sobre la predicción de la demanda utilizada para generar la señal de control.

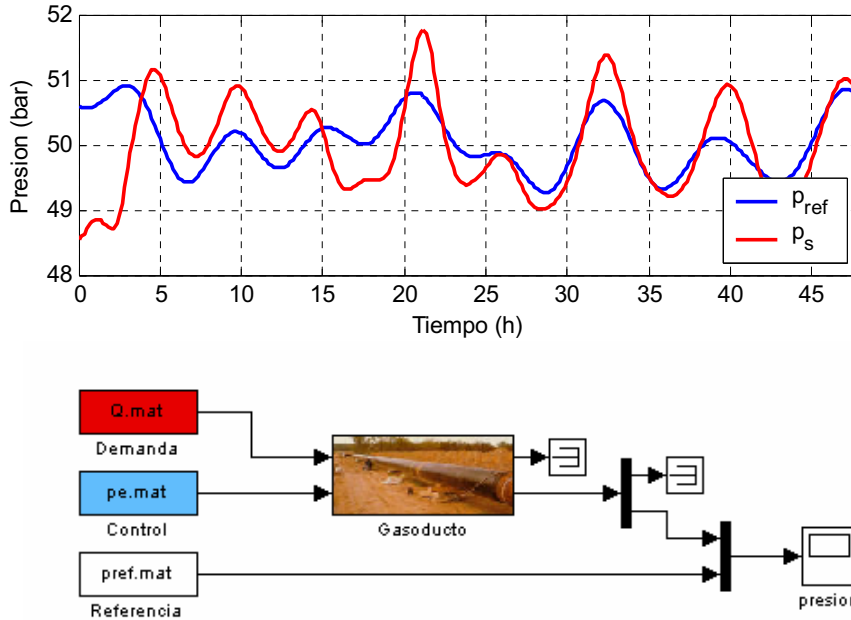


Figura 7.5: Control del sistema en lazo abierto sin error en la predicción de la demanda.

Para ver esto, se puede utilizar de nuevo la secuencia de control obtenida tras el proceso de optimización para tratar de controlar en lazo abierto el modelo del sistema, pero utilizando una demanda real, que difiere de la predicha (figura 7.2) en la cantidad mostrada en la figura 7.6. Esto es bastante común, y puede corresponder por ejemplo a un valor inferior al predicho durante el día y un valor superior al predicho durante la noche. El modelo Simulink utilizado para llevar a cabo esta simulación se muestra en la figura 7.7, en donde se ve como efectivamente la presión de salida no sigue a la referencia.

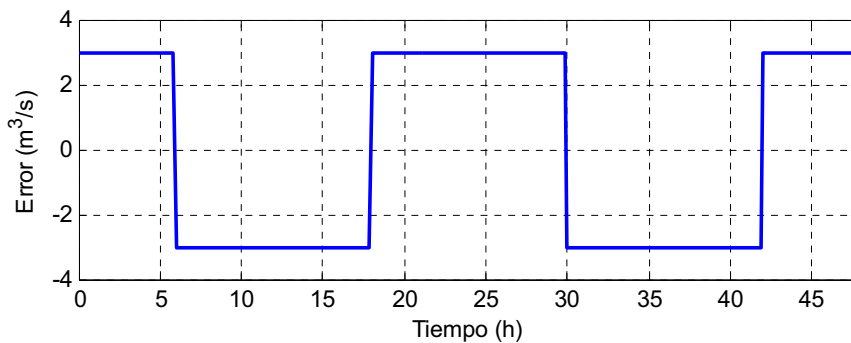


Figura 7.6: Error en la predicción de la demanda.

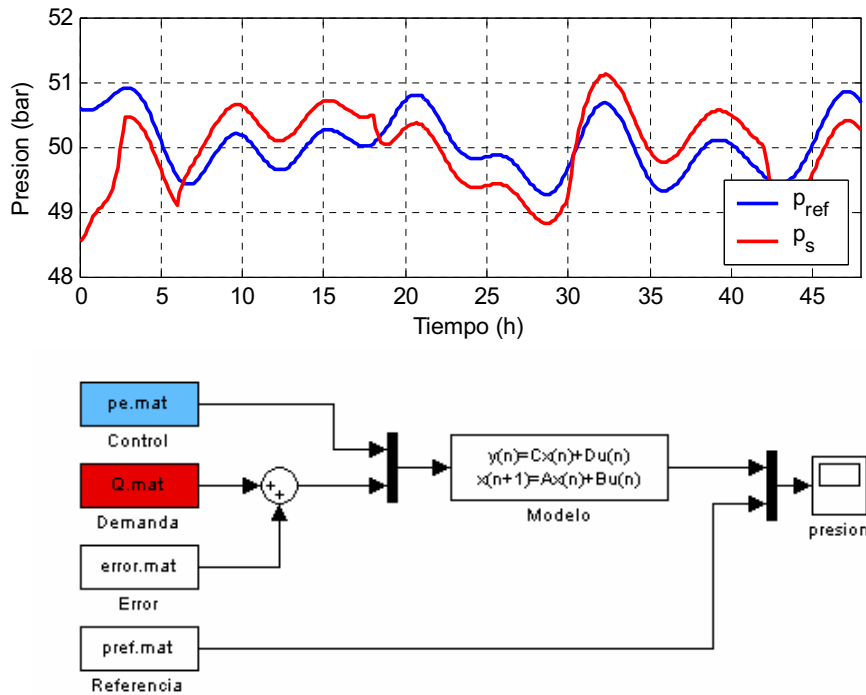


Figura 7.7: Control del modelo en lazo abierto con error en la predicción de la demanda.

Desde el punto de vista del optimizador, las situaciones mostradas en las figuras 7.5 y 7.7 son semejantes, es decir, el optimizador debe hacer que la presión de salida siga a la referencia sin importarle la causa de la discrepancia existente entre ellas (error en el modelo o error en la predicción de la demanda). Así, con la información disponible, un operador experto podría modificar la presión con la que se inyecta el gas en el gasoducto cada vez que la presión de entrega se desvía de la referencia. De esta forma los operadores de red logran su objetivo pero mediante una estrategia de actuación que *no será la óptima.*, al estar el sistema controlado de forma *no automática.* Por tanto, y dado que normalmente habrá un error en la predicción de la demanda, es necesario replantear el problema de control cada vez que la presión de salida se desvía de la referencia especificada para el punto de entrega. Esto se logra mediante la implementación de un control automático en lazo cerrado.

7.3.3 Control automático del sistema

En el apartado anterior, se ha visto como la posible discrepancia entre la presión de salida y la presión de referencia, bien sea por la utilización de un modelo de predicción poco preciso o por un error en la predicción de la demanda, crea la necesidad de imponer cierta robustez al sistema incorporando la realimentación del mismo. Esta realimentación se consigue gracias a la técnica del horizonte deslizante consistente en

aplicar la secuencia de control obtenida durante un periodo de tiempo, tras el cual se muestrea el estado del sistema, se actualizan los parámetros del controlador, y se resuelve un nuevo problema de optimización. De esta manera, el horizonte de predicción se va desplazando a lo largo del tiempo, y se van resolviendo de forma secuencial los correspondientes problemas de optimización que se van planteando. Para implementar dicha realimentación con la que llevar a cabo el control en lazo cerrado se ha utilizado el esquema mostrado en la figura 7.8.

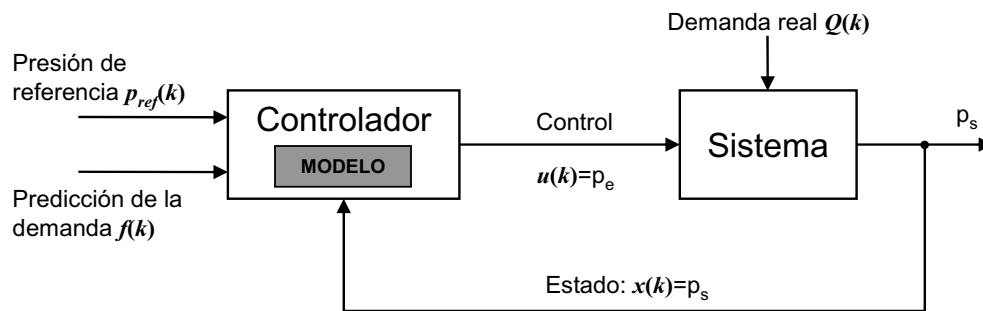


Figura 7.8: Esquema de control automático.

Como puede verse, para obtener la señal de control, el controlador utiliza una predicción de la demanda real para calcular la secuencia de control. Para ello, utiliza el modelo en variables de estado del sistema partiendo del estado del sistema real en cada instante. Así, la posible discrepancia entre modelo y sistema es corregida en cada instante, proporcionando al controlador la robustez de la que carece cuando es utilizado para llevar a cabo un control en lazo abierto. Además, los posibles errores en la predicción de la demanda también pueden ser corregidos proporcionando al controlador la demanda real. Para implementar dicho esquema realimentado se ha utilizado el modelo Simulink mostrado en la figura 7.9 en donde puede verse el bloque “Controlador” de la librería Simulink desarrollada.

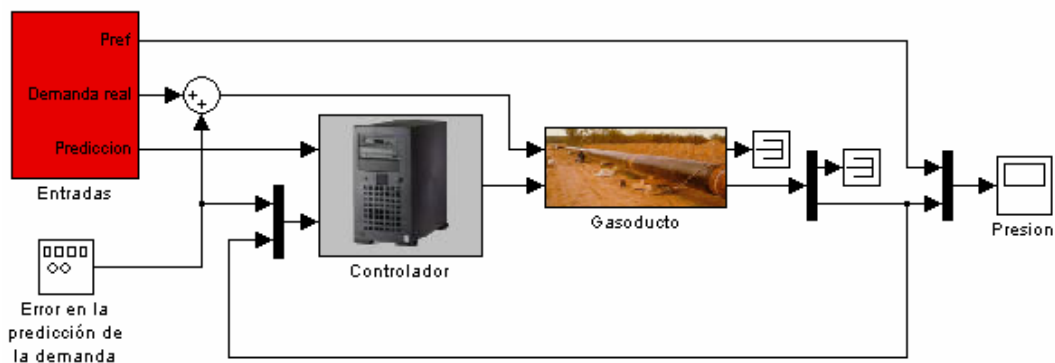


Figura 7.9: Modelo Simulink para la implementación de esquema mostrado en la figura 7.8.

Como puede verse en la figura 7.9, el bloque desarrollado para la implementación del controlador tiene dos entradas, correspondientes a la predicción de la demanda y la presión de referencia, y una salida, correspondiente a la señal de control (en este caso la presión de entrada al gasoducto). La figura 7.10 muestra la implementación interna de dicho bloque, que como puede verse consta de la *función*-S “scontrolador”.

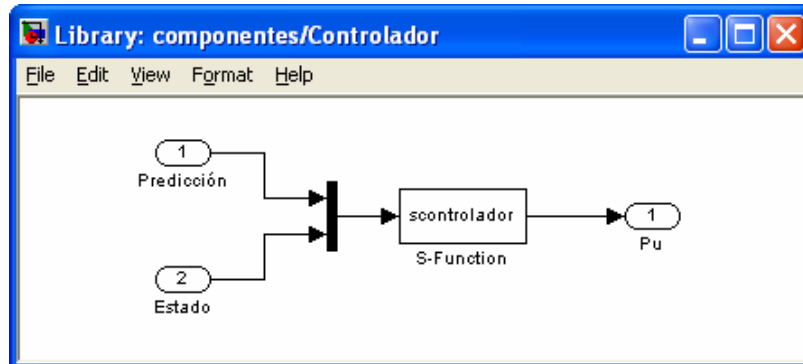


Figura 7.10: Implementación del controlador.

La figura 7.11 muestra un bloque controlador dentro de un modelo Simulink. Pulsando dos veces sobre el mismo aparece la ventana desde la que configurar cada una de las instancias de dicho bloque incluidas en un modelo. Además, se incluye una casilla que permite especificar el periodo de muestreo T en segundos.

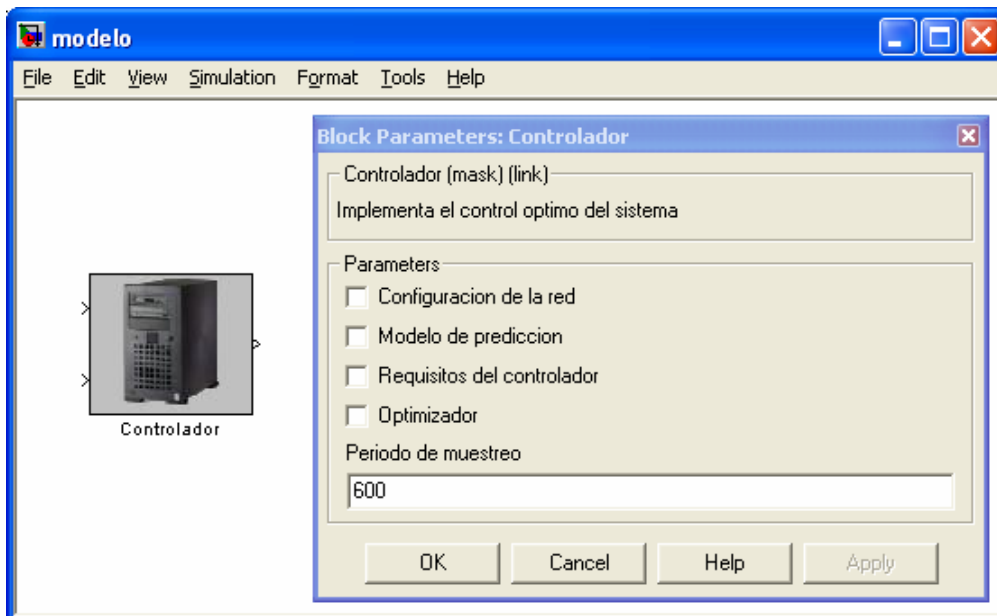


Figura 7.11: Parámetros de un controlador incluido en un modelo.

Como puede verse, se distinguen cuatro pestañas desde las que especificar tanto los parámetros de la red de gasoductos a controlar, como los del propio controlador. Las figuras 7.12 y 7.13 muestran cómo se despliega la ventana de configuración al pulsar sobre cualquiera de estas cuatro pestañas. La figura 7.12 muestra los parámetros que pueden especificarse al pulsar las pestañas “Configuración de la red” y “Modelo de predicción”. En cuanto a los parámetros de la red es necesario especificar el número de gasoductos y estaciones de compresión que la componen así como las condiciones iniciales para todas las señales de control. Además, deben proporcionarse los límites físicos entre los que deben estar todas las señales del sistema, así como la máxima variación temporal permitida en las señales de control. En cuanto a los parámetros relativos al modelo de predicción, se debe especificar en primer lugar la longitud del horizonte de control, así como los modelos con los que predecir el funcionamiento de los gasoductos y estaciones de compresión de la red durante dicho horizonte. Además, existe la posibilidad de implementar un control robusto del sistema. Para ello, las señales de control se calculan de tal forma que sean capaces de controlar de forma simultánea un determinado número de sistemas generados de forma uniforme en torno al nominal con una desviación típica especificada por el usuario.

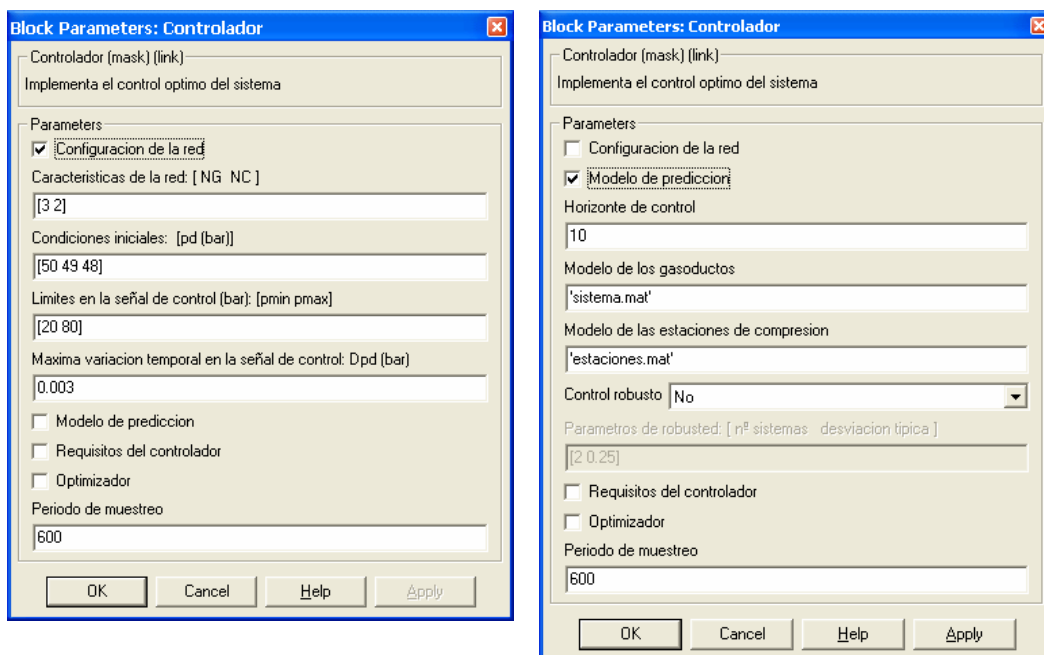


Figura 7.12: Configuración del controlador (I).

La figura 7.13 muestra los parámetros que pueden especificarse al pulsar las pestañas “Requisitos del controlador” y “Optimizador”. En cuanto a los parámetros relativos a los requisitos del controlador, se puede seleccionar entre dos problemas de control: 1)

la presión de salida del último gasoducto de la red debe seguir una determinada referencia; y 2) minimizar el consumo asociado al proceso de distribución cuando se pretende que la presión del gas a la salida del último gasoducto de la red no caiga por debajo de un determinado valor especificado por el usuario. Además, se puede seleccionar entre dos modos de operación distintos: 1) fijo, en el que el número de compresores que cada estación de compresión pone en funcionamiento en cada instante queda fijado al valor especificado por el usuario; y 2) variable, en el que dicho número pertenece al conjunto de variables de decisión, siendo por tanto determinado de forma óptima por el controlador. En cuanto a los parámetros relativos al optimizador, puede escogerse entre los optimizadores mostrados en la figura 7.14 dependiendo del problema de control a resolver.

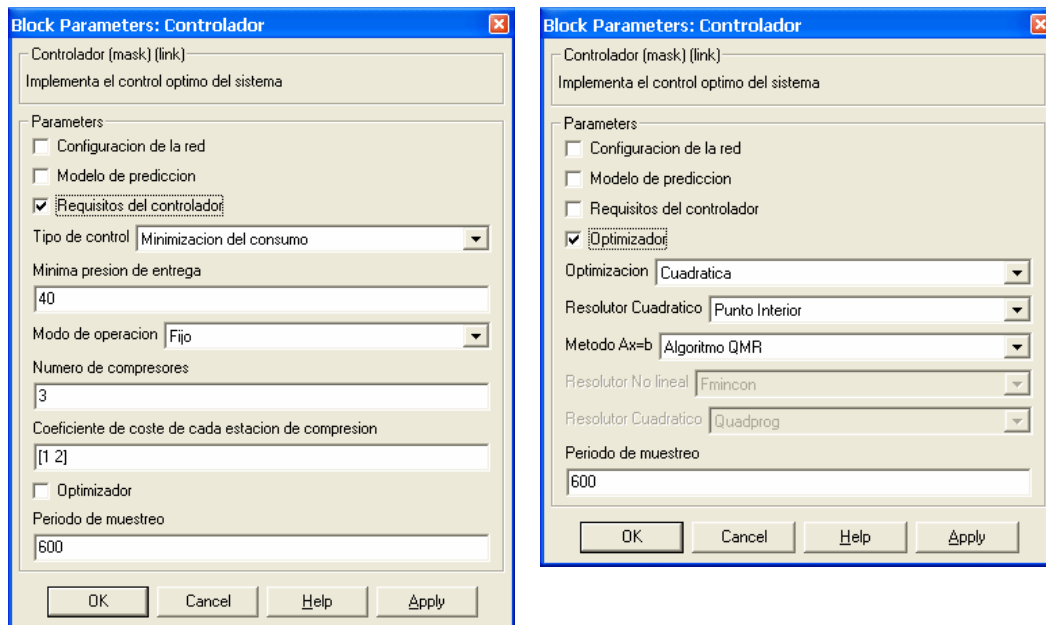


Figura 7.13: Configuración del controlador (II).

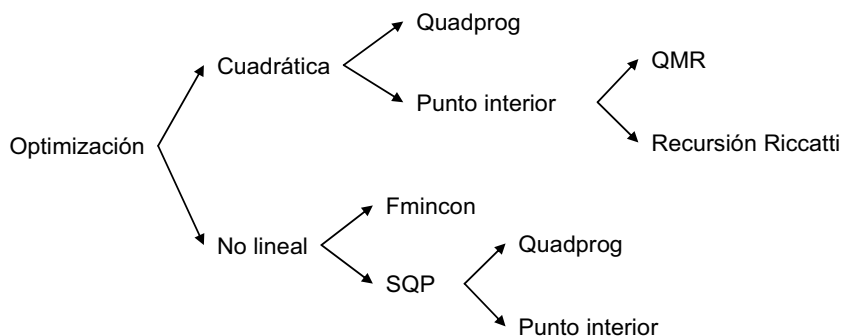


Figura 7.14: Diferentes optimizadores disponibles.

Teniendo en cuenta el problema de control planteado en esta sección, mostrado en la figura 7.9, debe seleccionarse “presión de entrega fija” en los requisitos del controlador. El modo de operación carece de importancia en este ejemplo, ya que no hay ninguna estación de compresión involucrada en el proceso. Además, otros parámetros son $NG=1$, $NC=0$ y una variación temporal en la señal de control (presión de entrada) limitada a 5 mbar/s . Las condiciones iniciales así como los límites en las señales son los mismos que los utilizados para el control en lazo abierto. En cuanto al algoritmo de control se ha seleccionado el mismo que el utilizado para resolver el mismo problema en lazo abierto (Punto Interior con Recursión de Riccati). El control en lazo cerrado tiene lugar al actualizar el problema de control que se resuelve en cada instante con el horizonte desplazado. En esta actualización es fundamental sustituir el estado inicial predicho por el modelo de predicción en el instante anterior por el estado real del sistema obtenido mediante la realimentación del mismo. Dicha actualización se hace a través del vector g mostrado en la ecuación (7.65). La figura 7.15 muestra el resultado del control en lazo cerrado utilizando un horizonte $N=10$, en donde se puede ver como el sistema queda controlado al seguir la presión de salida la referencia impuesta a pesar de errores tanto en el modelo como en la predicción de la demanda utilizados para calcular la secuencia de control.

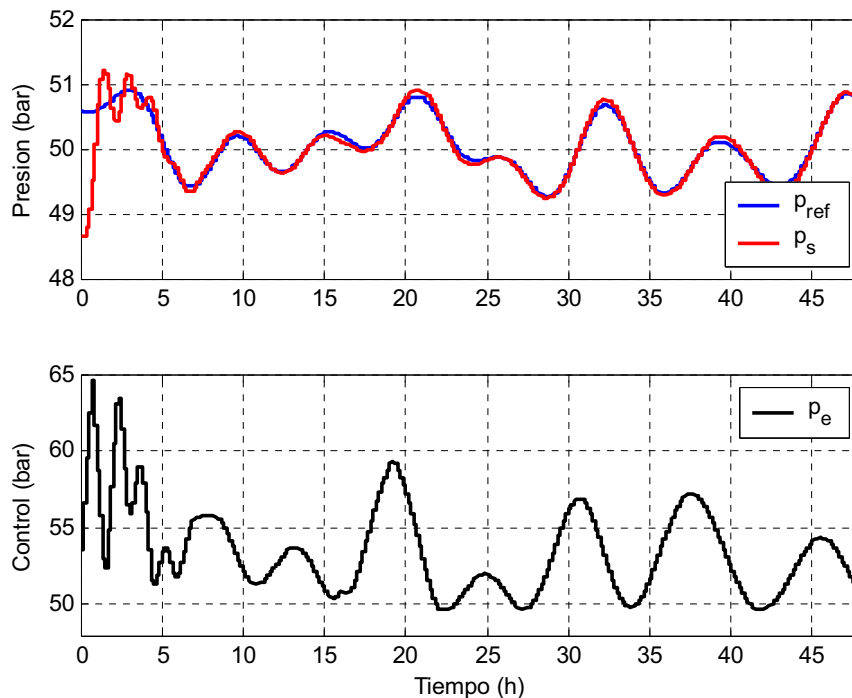


Figura 7.15: Control en lazo cerrado.

Uno de los parámetros más característicos del control predictivo es el horizonte de control, es decir, el número de instantes sobre los que se resuelve el problema de optimización asociado en cada instante, o longitud de la secuencia de control. Por ello, es interesante investigar cuál es el efecto de la variación del mismo sobre la secuencia de control obtenida. La figura 7.16 muestra el resultado de dicho estudio sobre el ejemplo aquí considerado para los valores de $N=1, 2, 4$ y 8 . En la parte izquierda se muestra la señal de control obtenida en cada caso, mientras que en la derecha se ve la salida del sistema asociada a cada señal de control junto con la referencia a seguir.

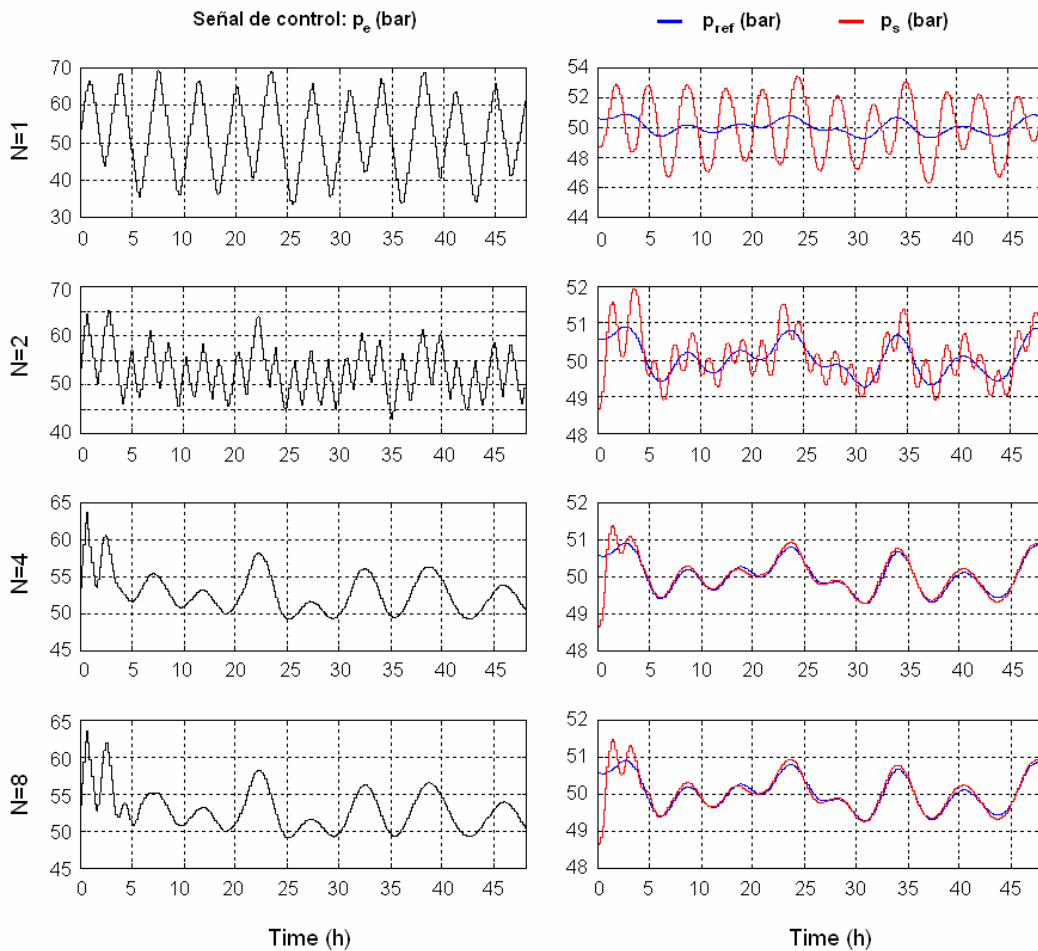


Figura 7.16: Efecto de la modificación del horizonte de control.

Tal y como puede verse, la utilización de un horizonte de control demasiado pequeño da lugar a una señal de control un tanto errática, incapaz de controlar el sistema. Esto es lógico ya que reducir el horizonte de control equivale a reducir la información de la que el controlador dispone para calcular la secuencia de control. Por otro lado, se

ve como a partir de un cierto valor ($N=4$ en este caso) el incremento de dicho horizonte tampoco supone una mejora significativa. Esto se puede explicar con la siguiente analogía para el control de un coche. El control clásico equivale a controlar (conducir) un coche mirando por el espejo retrovisor. Sin embargo el control predictivo es equivalente a conducir el coche tal y como lo hace un ser humano. Desde este punto de vista, aumentar o reducir el horizonte de control equivale a aumentar o reducir el campo de visión del conductor. Por tanto, con un horizonte de control demasiado pequeño el conductor se toparía casi de golpe con las curvas por lo que la conducción sería un tanto errática. Por otro lado, un horizonte de control demasiado grande tampoco aportaría nada ya que de poco le sirve al conductor conocer como es la carretera después de la siguiente curva para controlar el coche en la misma.

7.3.4 Control óptimo del sistema

Como se acaba de ver en el apartado anterior, la función objetivo planteada trata de minimizar la diferencia entre la presión de salida del gasoducto y una referencia prefijada. Sin embargo, el caso habitual suele ser aquel en el que no es necesario que la presión de salida siga una determinada referencia ya que tan solo basta con que ésta no caiga por debajo de un determinado límite inferior. Así, en este caso, debe seleccionarse “minimización del consumo” en el apartado “tipo de control” incluido en los requisitos del controlador. En este caso, la presión de referencia será un límite inferior incluido en las restricciones del problema y la función objetivo consistirá en obtener la menor señal de control para la que se satisfagan dichas restricciones. Esto es debido a que la señal de control es la presión con la que un compresor suministra el gas a la tubería y por tanto, cuanto menor sea su valor, menos compresión será necesaria en la estación correspondiente, consumiendo con ello menor energía. Así, la formulación matemática de este nuevo problema de control óptimo es la mostrada en la ecuación (7.69).

$$\begin{aligned}
 \min_{p_e} \quad & \sum_{k=0}^N (p_e(k))^2 \\
 p_s(k+1) = & A \cdot p_s(k) + B \cdot \begin{pmatrix} p_e(k) \\ Q(t) \end{pmatrix} \\
 Q(t) = & f(t) \\
 \text{s.t.} \quad & \left| \frac{p_e(k+1) - p_e(k)}{T} \right| \leq K \\
 & p_{\min} \leq p_s(k) \leq p_{\max} \\
 & p_{\min} \leq p_e(k) \leq p_{\max}
 \end{aligned} \tag{7.69}$$

Para implementar este nuevo problema de control, tan solo hay que modificar las matrices que aparecen en la ecuación (7.64) de la forma mostrada en la ecuación (7.70).

$$Q_j(k) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ; S_j(k) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ; R_j(k) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (7.70)$$

Supóngase que se desea calcular la mínima señal de control para la que la presión del gas a la salida del gasoducto no baje de 30bar cuando la demanda de gas a la salida del mismo es la mostrada en la figura 7.2. La figura 7.17 muestra la secuencia de control obtenida junto con la salida del sistema cuando es controlado en lazo cerrado. Como puede verse, al comienzo la señal de control cae hasta su valor mínimo (30bar) a consecuencia de que la presión de salida está por encima del límite inferior establecido también a de 30bar. A continuación, se aprecia como la presión de salida caería por debajo de dicho límite si la señal de control continuase en su mínimo. Sin embargo, la señal de control aumenta su valor, pero sólo lo necesario para que la presión de salida no caiga por debajo de su límite inferior. Esta solución corresponde al caso en el que se desea obtener la solución factible para la que se minimiza el coste asociado a la operación.

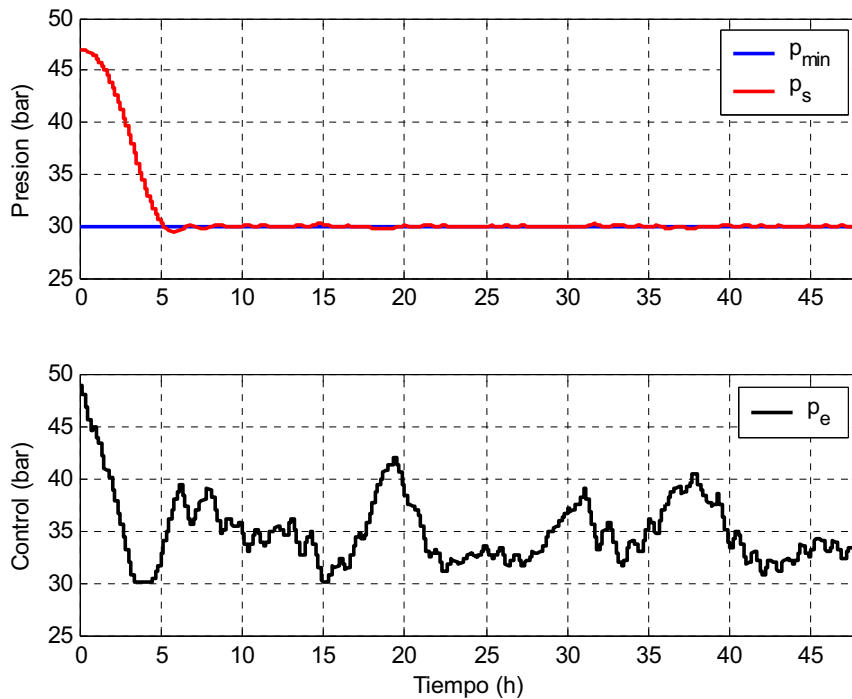


Figura 7.17: Control óptimo en lazo cerrado.

7.4 Minimización del consumo en una red de gasoductos

7.4.1 Planteamiento del problema

El gas natural es transportado mediante presión a través de la red de gasoductos que forman el sistema de distribución de gas. A medida que el gas fluye por la red, tiene lugar una pérdida de energía y de presión como consecuencia de la fricción del gas con la pared interior de los gasoductos, la transferencia de calor entre el gas y sus alrededores y la posible inclinación de cada uno de los gasoductos de la red. Si se pretende que el gas llegue con la presión adecuada a los correspondientes puntos de entrega, las caídas de presión no deseadas deberán ser reestablecidas periódicamente. De esta tarea se encargan las estaciones de compresión instaladas en la propia red, llegando a consumir para su funcionamiento en torno al 3 y el 5% del total del gas transportado. La idea del control óptimo en la distribución de gas es por tanto, obtener un sistema de control automático que sea capaz de mantener la presión por encima de un determinado mínimo, a la vez que se minimiza el gasto asociado al funcionamiento de las estaciones de compresión. En ocasiones, dichos sistemas de transmisión están controlados de forma no automática. Es decir, unos operadores de red, basándose en la experiencia adquirida, modifican los parámetros de actuación de los compresores desde la central de control para proporcionar al gas la presión apropiada. De esta forma los operadores de red logran su objetivo pero mediante una estrategia de actuación que no será la óptima. La figura 7.18 se muestra una red de estas características.

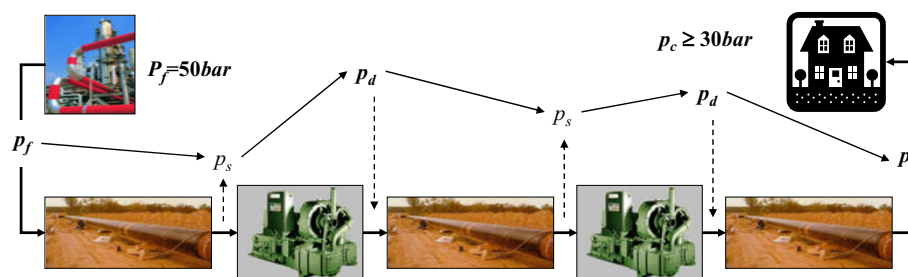


Figura 7.18: Red de gasoductos.

Una fuente proporciona el gas a través del primer gasoducto de la red a una presión constante y conocida. El gas debe llegar a su destino, situado a la salida del tercer gasoducto con una presión mayor o igual que un determinado valor incluido en las especificaciones del problema. Para ello, los compresores irán reestableciendo las

caídas en la presión del gas desde la presión de succión, p_s , hasta la presión de descarga, p_d , consumiendo una cierta energía en este proceso. Dichas presiones de descarga son las variables de control del proceso. Así, el problema de control consiste en este caso en encontrar la presión a la que se debe comprimir el gas en cada una de dichas estaciones en cada instante para que el gas llegue a su destino en las condiciones requeridas, minimizando el consumo de energía asociado a este proceso de transporte.

En el *Capítulo* anterior se vio como la región de funcionamiento de las estaciones de compresión se modifica en función de la propia presión de succión y cuando estas utilizan diferente número de compresores para comprimir el gas. La figura 7.19 la modificación de dicha región en función de la presión de succión y del número de compresores utilizados por la estación. Como puede verse el hecho de que la estación opere con diferente número de compresores determina los límites en la presión de descarga de la misma. Además, la eficiencia con la que opera cada uno de los compresores es una función no lineal del flujo de gas a comprimir el cual, es función a su vez del número de compresores utilizados. Todo esto hace que el problema de control planteado conlleve la resolución de un problema de optimización no lineal mixta-entera, en donde las variables manipuladas son ahora tanto las presiones de descarga en cada compresor como el número de compresores que se deben poner en funcionamiento en cada instante.

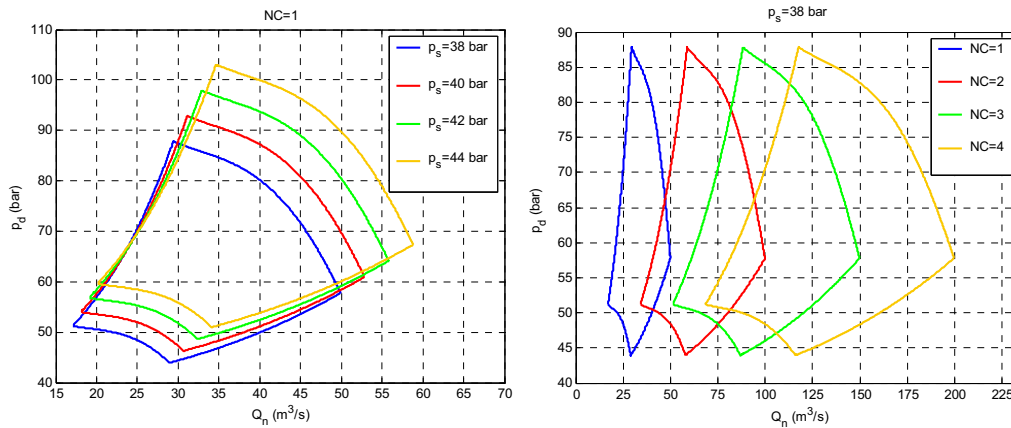


Figura 7.19: Región de funcionamiento de una estación de compresión.

La principal complejidad del problema se encuentra por tanto, en mantener todas las variables del proceso dentro de sus límites. Así, el problema de control aquí planteado puede resolverse encontrando la solución al problema de optimización mostrado en la ecuación (7.71) que incluye todas estas restricciones.

$$\begin{aligned}
 \min_{\bar{p}_d} \quad & \sum_{k=0}^N \sum_{ec=1}^{NE} G_{ec}(k) \\
 \text{s.t} \quad & \bar{x}(k+1) = A \cdot \bar{x}(k) + B \cdot \bar{u}(k) \\
 & pe_1(k) = p(k) \\
 & Q_3(k) = f(k) \\
 & ps^L \leq ps_{ec}(k) \leq ps^U \quad ; \quad ec = 1, \dots, NE \\
 & F^L \left(\frac{Q_{ec}}{ps_{ec}} \right) \cdot ps_{ec} \leq pd_{ec} \leq ps_{ec} \cdot F^U \left(\frac{Q_{ec}}{ps_{ec}} \right) \quad ; \quad ec = 1, \dots, NE \\
 & \left| \frac{pd_{ec}(k+1) - pd_{ec}(k)}{T} \right| \leq K \quad ; \quad ec = 1, \dots, NE
 \end{aligned} \tag{7.71}$$

El coste asociado al consumo de cada estación de compresión, ec , en cada instante puede ser una función no lineal $G_{ec}(k)$ de las presiones de succión y descarga, así como del número de compresores utilizados en la misma. En este caso, se deben satisfacer las ecuaciones de estado para cada gasoducto. Esto puede hacerse sin más que considerar un modelo de predicción formado por las matrices del sistema completo, construidas tal y como se mostró en la sección 6.3.3 del *Capítulo* anterior. Como puede verse, ahora se han añadido además las ecuaciones correspondientes a la topología de la red. Dichas ecuaciones establecen las conexiones entre los diferentes elementos de la red. Así, la presión de entrada al primer gasoducto es igual a la presión, $p(k)$, a la que la fuente suministra el gas a la red. La presión del gas a la salida de cada gasoducto coincide con la presión de succión de la estación a la que está conectado. Análogamente, la presión de descarga de cada compresor será la presión de entrada de cada gasoducto. La demanda se especifica en el tercer gasoducto mediante la función $f(k)$ y los gasoductos están conectados en serie. Además, los límites en la presión de entrada a cada gasoducto (presión de descarga de la estación conectada al mismo) deben obtenerse teniendo en cuenta la región de funcionamiento de cada estación de compresión, que varía a su vez dependiendo del número de compresores utilizados tal y como se muestra en la figura 7.19. Dichos límites, se obtienen de acuerdo con la ecuación (6.13) del *Capítulo* anterior. Finalmente, sigue estando presente el límite en la máxima variación en la señal de control (presiones de descarga de cada estación de compresión).

La figura 7.20 muestra el esquema mediante el que implementar el control en lazo cerrado para un sistema de este tipo. Como puede verse, el sistema recibe dos entradas además de la demanda real, $Q(k)$. La primera corresponde a la presión constante a la que la fuente suministra el gas a la red a través del primer gasoducto, $f(k)$. La segunda entrada corresponde a la señal de control $u(k)$ (presiones de descarga

a la que deben comprimir el gas cada uno de los compresores de la red). Dichas presiones son calculadas por el controlador en cada instante del horizonte temporal en base al estado actual del sistema $x(k)$ (presión a la salida de cada gasoducto) y a la predicción de la demanda durante dicho horizonte temporal, $g(k)$. Como se verá más adelante, dependiendo del criterio utilizado a la hora de calcular tales presiones se obtienen diferentes estrategias de control.

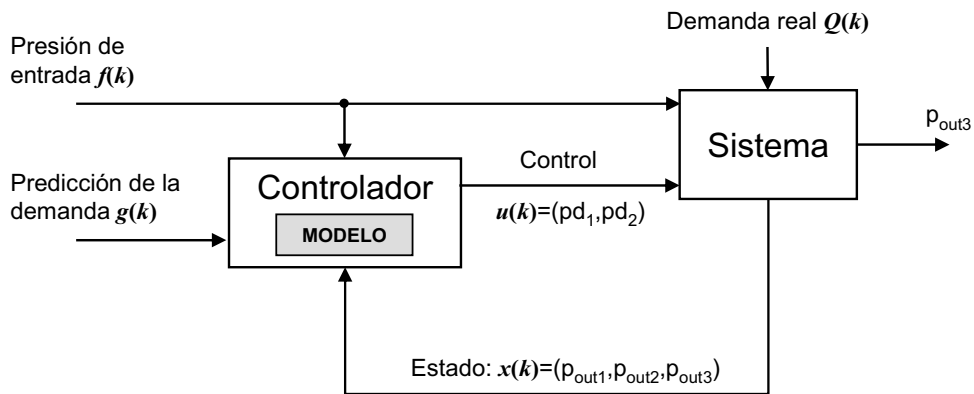


Figura 7.20: Implementación del control óptimo en lazo cerrado.

Para implementar dicho esquema realimentado se ha utilizado el modelo Simulink mostrado en la figura 7.21, en donde el bloque red contiene el sistema mostrado en la figura 7.18. Como puede verse, el sistema a controlar corresponde al mostrado en la figura 7.18. De nuevo, al igual que para el sistema mostrado en la figura 7.9, los posibles errores en la predicción de la demanda también pueden ser corregidos proporcionando al controlador la demanda real.

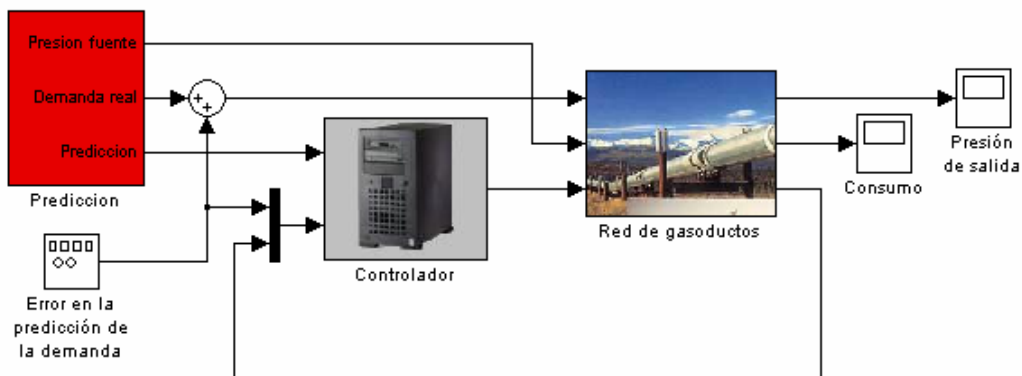


Figura 7.21: Modelo Simulink para la implementación de la figura 7.20.

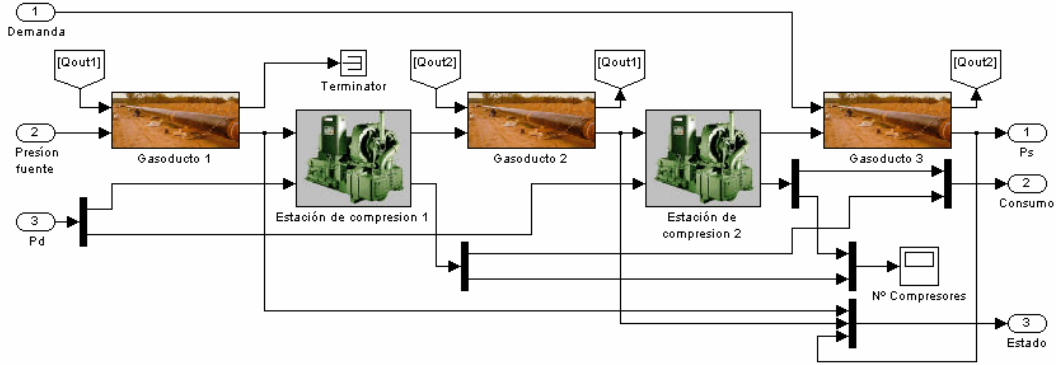


Figura 7.22: Contenido del bloque red del modelo mostrado en la figura 7.20.

7.4.2 Modo de operación fijo

En el caso en el que las estaciones de compresión operen con un número fijo de compresores, el problema anterior se simplifica notablemente al quedar eliminadas del mismo las variables enteras (número de compresores a utilizar en cada instante en cada estación de compresión de la red). Además, la no linealidad asociada a la diferente eficiencia con la que operaría cada estación al comprimir cada uno de sus compresores un caudal de gas diferente dependiendo del número de compresores que utilice también desaparece del modelo. Así, fijando el número de compresores que utiliza cada estación de compresión durante todo el horizonte de control, la función $G_{ec}(k)$ mostrada en la ecuación (7.71) puede escribirse tal y como se muestra en la ecuación (7.72), que corresponde a la potencia requerida por la estación para comprimir el flujo de gas Q_n desde p_s a p_d utilizando nc compresores.

$$G_{ec}(k) = nc \times C_{ec} \times \frac{1}{\eta \left(\frac{Q_n(k)}{nc} \right)} \cdot \frac{Z_s \cdot \left(\frac{Q_n(k)}{nc} \right)}{(n-1)/n} \left[\left(\frac{p_d(k)}{p_s(k)} \right)^{n-1/n} - 1 \right] \quad (7.72)$$

Como se puede ver, aún fijando el valor de nc , se trata de una función no lineal. Sin embargo, si se tiene en cuenta que para cada valor de $Q_n(k)$, la potencia requerida para la compresión es menor cuanto más cerca estén los valores p_s y p_d , la función $G_{ec}(k)$ puede sustituirse por la aproximación cuadrática mostrada en la ecuación (7.73). Así, la función objetivo del problema mostrado en la ecuación (7.71) pasa a ser la mostrada en la ecuación (7.74), en donde, como puede verse en la ecuación (7.75), se ha tenido en cuenta que la presión de succión de la estación de compresión i es la presión a la salida del gasoducto i , y la presión de descarga de la estación de compresión i es la presión a la entrada del gasoducto $i+1$.

$$G_{ec}(k) = C_{ec} \times (p_d(k) - p_s(k))^2 \quad (7.73)$$

$$\min_{p_s} \sum_{k=0}^N J(k) \quad (7.74)$$

$$\begin{aligned} J(k) &= \sum_{ec=1}^{NE} C_{ec} \times (ps_{ec}(k) - pd_{ec}(k))^2 = \\ &= \sum_{i=1}^{NE} C_i \times (ps_i(k) - pe_{i+1}(k))^2 = \\ &= C_1 \times (ps_1(k)^2 - 2pe_2(k)ps_1(k) + pe_2(k)^2) + \\ &= C_2 \times (ps_2(k)^2 - 2pe_3(k)ps_2(k) + pe_3(k)^2) \end{aligned} \quad (7.75)$$

Para hacer esta nueva función objetivo compatible con la formulación matemática del programa cuadrático mostrado en la ecuación (7.21), tan solo hay que construir las matrices $Q_j(k)$, $S_j(k)$ y $R_j(k)$ de la forma mostrada en la ecuación (7.76).

$$Q_j(k) = \begin{pmatrix} C_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad R_j(k) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (7.76)$$

$$S_j(k) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -C_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -C_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Para examinar detenidamente como opera el controlador diseñado, se puede obtener primeramente una estrategia de control factible, es decir, la presión de descarga de cada compresor en cada instante necesaria para que la presión a la salida del sistema sea superior a un determinado valor (30bar, por ejemplo) y sin optimizar la energía consumida por los mismos en el proceso. Para ello, basta con utilizar los valores hacer $C_1=0$ y $C_2=0$ en las matrices $Q_j(k)$, $S_j(k)$ y $R_j(k)$. Además, se ha supuesto una región de funcionamiento lineal para las estaciones de compresión consistente en sustituir la 5ª restricción del problema mostrado en la ecuación (7.71) por $pd_{ec} \in [30, 70] \text{bar}$. Resolviendo el problema para $nc=4$, se obtiene el resultado mostrado en la figura 7.23. Como se puede ver, se trata de una solución factible ya que la

presión de salida de la red (salida del tercer gasoducto) no baja de los 30bar y el resto se mantienen dentro de los límites establecidos para este ejemplo (30–70bar). Sin embargo, esta no es la solución óptima ya que la presión en el punto de entrega supera con creces la mínima permitida, habiéndose consumido por tanto un exceso de energía en la compresión tal y como muestra la parte derecha de la figura 7.23.

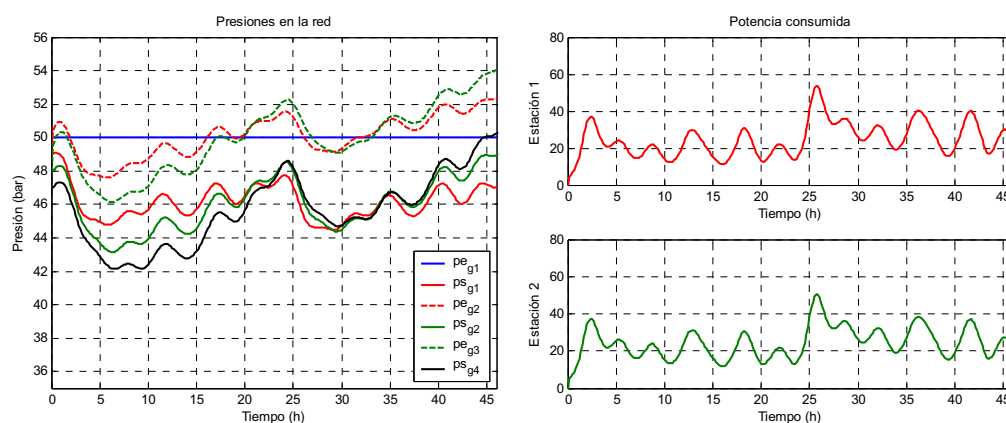


Figura 7.23: Solución factible (sin minimizar el consumo).

Si ahora se añade la condición de que se optimice la energía consumida por los compresores mediante la correspondiente función objetivo utilizando las matrices mostradas en la ecuación (7.76), se obtiene el resultado mostrado en la figura 7.24. En esta gráfica se puede observar como las presiones de succión y descarga en cada compresor coinciden haciendo nulo el consumo de energía. Debe notarse que esto es así debido a que el límite inferior para la presión de entrega está por debajo del que pondría a funcionar los compresores.

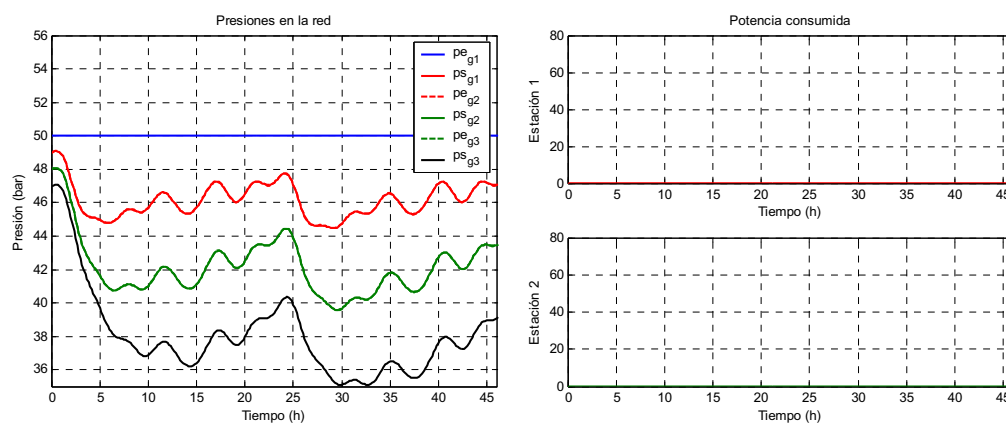


Figura 7.24: Solución óptima sin límite en la presión de llegada.

Si lo que se desea es observar como operan los compresores para mantener al sistema dentro de los límites de presión establecidos a la vez que se optimiza la energía consumida por los mismos, se puede imponer un límite en la presión de entrega superior. Observando la figura 7.24, puede verse que si se impone una presión de entrega superior a 40bar los compresores deberán ponerse en funcionamiento para evitar el descenso de la presión de entrega por debajo de su límite inferior. Imponiendo este nuevo límite en la presión de entrega se obtienen los resultados mostrados en la figura 7.25. A su vez, la parte derecha muestra la potencia consumida por cada una de las dos estaciones de compresión en el proceso. Como puede verse, dichas estaciones tan sólo se ponen en marcha cuando es necesario para mantener la presión de entrega por encima del valor de entrega.

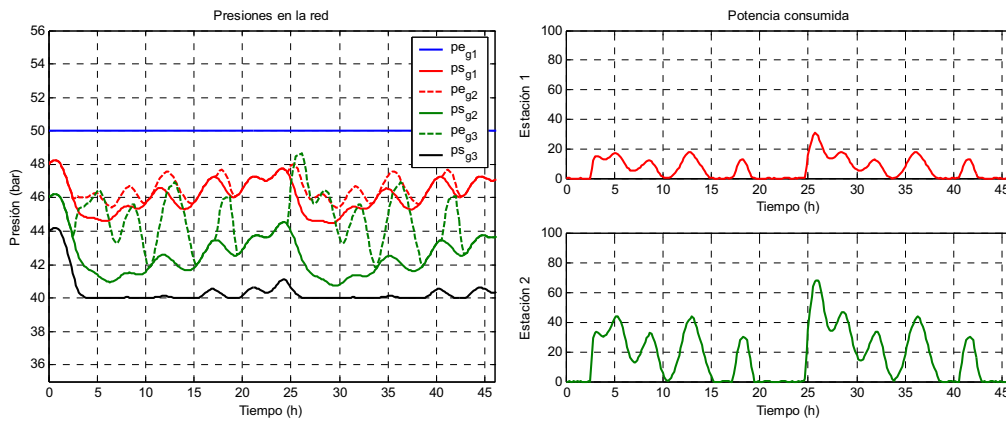


Figura 7.25: Solución óptima con límite en la presión de llegada.

7.4.3 Modo de operación variable

En la sección anterior se ha presentado una simplificación del modelo matemático para el control en lazo cerrado de una red de distribución de gas. Dicha simplificación es consecuencia de fijar el número de compresores con los que opera cada una de las estaciones de compresión durante todo el horizonte de control, haciendo que el problema de control pueda ser resuelto mediante un problema de optimización cuadrática en lugar de un problema de optimización no lineal mixta entera. Además, se ha supuesto una región de operación para las estaciones de compresión independiente del número de compresores utilizados y de la presión de succión. Dicha región consiste en $pd_{ec} \in [30, 70] \text{ bar}$ para todos los posibles valores de Q_n .

Sin embargo, tal y como se muestra en la figura 7.19 dependiendo del caudal a comprimir, la cada estación deberá poner en marcha un determinado número de

compresores, siendo en cada caso diferentes los límites en la presión de descarga y el coste asociado al proceso de compresión. Dado que el problema completo es bastante complejo, una primera aproximación a su resolución consiste en resolver el problema mostrado en la ecuación (7.71) pero considerando como límites en la presión de descarga los obtenidos de la envoltura de la región de operación para todos sus posibles modos de funcionamiento (con 1, 2, 3, ..., NC compresores) junto con la función objetivo mostrada en la ecuación (7.75). Dicha envoltura se muestra en la figura 7.26 para la estación aquí considerada. De esta forma, se incluye la región de funcionamiento de una estación de compresión dotada de varios compresores, pero sin incluir el número de ellos a poner en funcionamiento en cada estante como variable de decisión. Ahora, en el caso en el que el controlador determine un valor de la presión de descarga, que junto con el valor de la presión de succión y el caudal de gas a comprimir, esté dentro de la región de operación de la estación para varios modos de operación diferentes, se determina el óptimo (número de compresores a utilizar en la estación) utilizando la función MODO DE OPERACIÓN mostrada en el algoritmo (6.1) del *Capítulo* anterior. Es decir, en una primera etapa se determinan las variables continuas (presión de descarga en cada una de las estaciones) mediante la resolución del problema mostrado en la ecuación (7.71), y en una segunda etapa se determina el valor de las variables enteras (número de compresores a utilizar en cada una de las estaciones) para el que el consumo asociado al proceso sea mínimo.

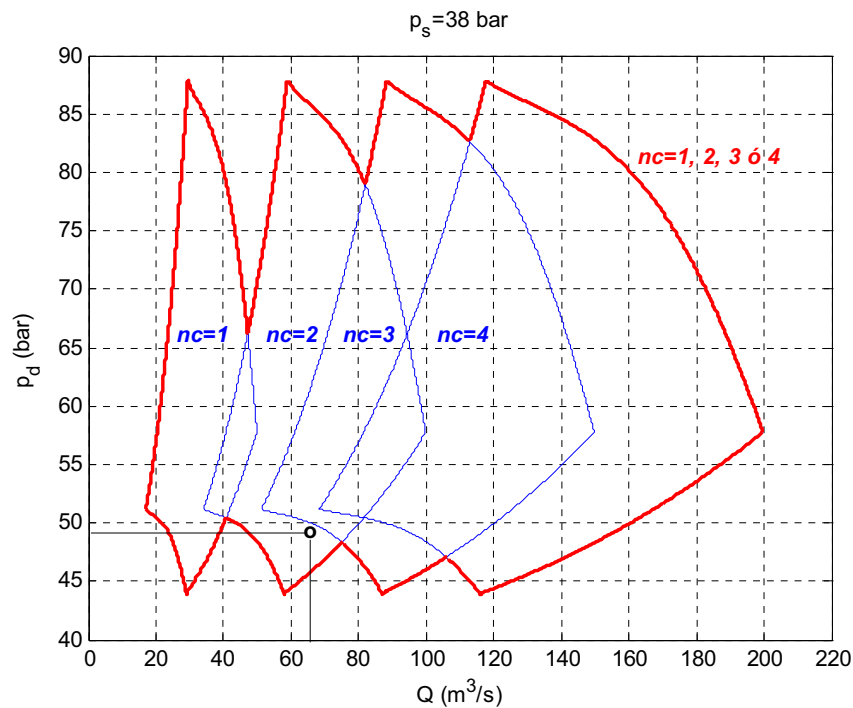


Figura 7.26: Solución óptima obtenida con un modo de operación fijo.

Las figuras 7.27 y 7.28 muestran los resultados obtenidos adoptando esta estrategia. En primer lugar, la figura 7.27 muestra la comparación entre las presiones en la red para los modos de operación fijo (derecha) y variable (izquierda). Como puede verse, en el modo de operación variable se aprecian algunos saltos en la presión de descarga como consecuencia de los límites sobre la misma impuestos por la región de operación mostrada en la figura 7.26. Es decir, en caso de que la compresión no sea necesaria las presiones de succión y descarga son iguales, pero en caso de que sea necesario comprimir el gas, la presión de descarga aumenta de forma abrupta debido a que el límite inferior en la razón de compresión es superior a la unidad. Finalmente, la figura 7.28 muestra la potencia consumida en el proceso por cada una de las dos estaciones de la red, junto con la evolución temporal del número de compresores puestos en marcha por cada estación. Los saltos en el consumo son consecuencia de los cambios en el número de compresores operando en cada estación.

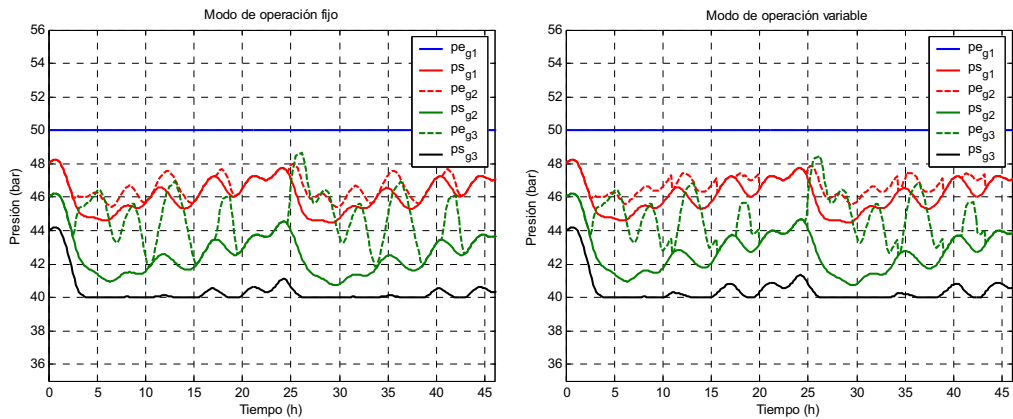


Figura 7.27: Solución óptima obtenida con un modo de operación variable.

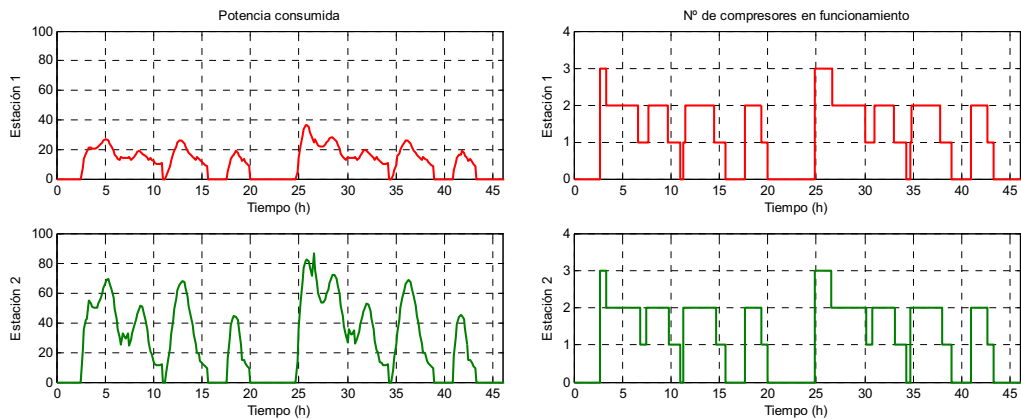


Figura 7.28: Consumo y número de compresores en funcionamiento para el modo variable.

Esta primera aproximación a la resolución del problema completo podría hacer que la estrategia de control obtenida no sea la óptima si fuese posible encontrar una estrategia de control en la que incluyendo el número de compresores que pone en funcionamiento cada estación en cada instante como variable de decisión el coste fuese menor. Para ver esto, considérese el siguiente ejemplo. Supóngase que en un determinado instante llegan $65m^3/s$ de gas a la primera estación a una presión de succión de $38bar$, y que en esas condiciones, el controlador, teniendo en cuenta la función objetivo mostrada en la ecuación (7.75) junto con la región de operación mostrada en la figura 7.26, determina que la presión de descarga debe ser de $49bar$. Ahora, teniendo en cuenta la región de operación mostrada en la figura 7.26, la función que calcula el modo de operación de la estación determinará que se debe utilizar un único compresor. Sin embargo, podría ocurrir, que si se hubiese fijado el número de compresores a utilizar en esas condiciones $nc=2$ antes de calcular la presión de descarga, el coste fuese menor, ya que, a pesar de que debido a esta nueva situación (teniendo en cuenta la figura 7.26) la presión de descarga deberá ser mayor de $50bar$, la eficiencia con la que opera la estación en estas condiciones podría aumentar, reduciendo el coste de operación. Así, el problema de control más complejo implica la sucesiva resolución de un MINLP a medida que se desplaza el horizonte de control. Dado que dichos problemas deben resolverse en un tiempo inferior al periodo de muestreo, ya que tras este se plantea un nuevo problema a resolver al desplazar el horizonte de control en una unidad, es necesario disponer de optimizadores eficientes capaces de obtener una buena solución en un tiempo aceptable.

Dada la formulación MINLP del problema, los algoritmos clásicos basados en la técnica de Branch&Bound podrían no ser capaces de proporcionar soluciones aceptables en un tiempo relativamente pequeño cuando el número de variables enteras aumenta, haciendo por tanto que se deban utilizar horizontes de control de longitud reducida o imposibiliten implementación del control robusto para este tipo de sistemas. Para solventar dicho inconveniente, se pueden tratar de desarrollarse algoritmos heurísticos o alguna hibridación con técnicas clásicas mediante los que mejorar la eficiencia de los algoritmos clásicos para poder ser utilizados en aplicaciones de control predictivo. La idea básica a la hora de resolver mediante técnicas heurísticas problemas que involucran variables enteras es el sustituir la forma en la que el algoritmo Branch&Bound fija la parte entera del problema mediante un algoritmo heurístico que, utilizando el conocimiento que tiene del problema a resolver, se encargue de encontrar la parte entera de la solución óptimo. Esta idea se ilustra mejor mediante el diagrama mostrado en la figura 7.29. En este caso podrían utilizarse los AGs como técnica heurística y el algoritmo de Punto Interior para QP aquí desarrollado como técnica clásica.

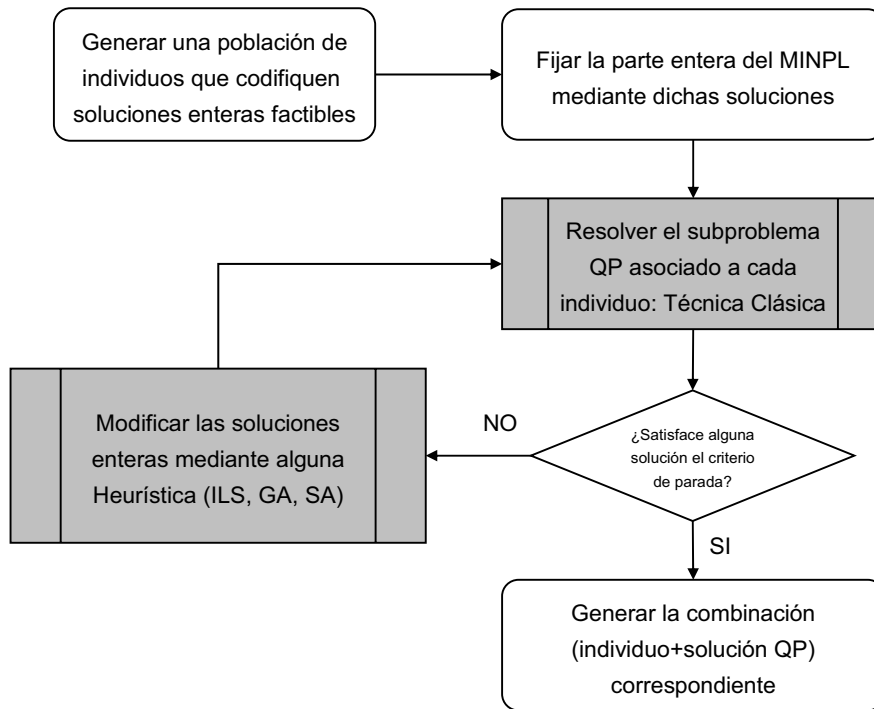


Figura 7.29: Utilización de heurísticas en la resolución de problemas MINPL.

Así, tal y como se puede ver en la figura 7.29 el algoritmo comienza por generar una población de individuos codificando la parte entera de la solución al problema MINPL. Dichos individuos se generan de forma aleatoria y deben ser tales que satisfagan todas las restricciones correspondientes a la parte entera de la formulación MINPL. En este caso, las variables enteras corresponden al número de compresores que cada una de las estaciones de compresión de la red debe poner en funcionamiento en cada uno de los instantes del horizonte de control, por lo que la única restricción que deben satisfacer dichas variables son los límites superior e inferior en dicho número. La ecuación (7.77), muestra la expresión formal con la que incluir dicha restricción en el modelo, donde el índice c recorre las estaciones de compresión, y el k los instantes del horizonte de control.

$$N_c^U(k) \leq N_c(k) \leq N_c^L(k) \quad ; \quad \forall(c,k) \tag{7.77}$$

Para el problema aquí tratado, un individuo que codifique la parte entera de la solución al problema deberá contener $N \times NC$ genes enteros cuyo valores estén limitados a los marcados por la restricción mostrada en la ecuación (7.77), siendo N la longitud del horizonte de control y NC el número de compresores de la red. La figura muestra una representación de uno de tales individuos.

Representación mediante heurísticas

	Estación 1										Estación 2									
$k =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$N(c,k)$	2	1	1	1	2	3	3	2	2	1	2	1	3	1	2	1	1	4	3	2

Figura 7.30: Representación de la parte entera de la solución.

Si ahora se resuelve el problema de control planteado en la sección 7.4.2 pero con un modo de operación fijado por dicho individuo, se obtendrá como resultado una estrategia de control en la que la energía consumida por los compresores de la red corresponde a la presión de descarga de los compresores en cada instante calculada para el modo de operación fijado por dicho individuo. Evidentemente, si ahora se calcula la secuencia de control necesaria para alcanzar los mismos objetivos pero utilizando el modo de operación fijado por otro individuo de la población, se obtendrá un coste diferente. Pues bien, la utilización del coste asociado a la estrategia obtenida fijando el modo de operación con cada uno de los individuos de la población, puede utilizarse como el *fitness* con el que el AG detecte pueda dirigir la búsqueda de la parte entera de la solución óptima. De esta forma, ejecutando un AG que resuelve problemas asociados a un modo de operación fijo en la etapa del cálculo del *fitness*, el coste asociado a cada combinación “individuo+”solución del problema con modo de operación fijo” se irá minimizando. Nótese que una vez fijada la parte entera de la solución mediante un individuo, el problema MINLP mostrado en la ecuación (7.71) se transforma en un QP que puede ser resuelto mediante el algoritmo 7.1. Si alguna combinación (individuo+solución QP) es suficientemente buena se toma como solución al problema, en caso contrario, el algoritmo heurístico continua su ejecución modificando los individuos de la población con el objetivo de mejorar la solución encontrada hasta el momento. En el caso de los AGs, dicha modificación es llevada a cabo por los operadores de cruce y mutación.

Capítulo VIII

Conclusiones y trabajo futuro

Esencialmente, la tesis está compuesta por dos partes diferenciadas. Los *Capítulos* 2, 3 y 4 corresponden a la etapa de distribución de los derivados del petróleo mediante redes de poliductos, centrandó la investigación en el desarrollo de los modelos matemáticos que conciernen a dicho proceso y de los algoritmos necesarios para obtener la planificación óptima del modo de operación. Los *Capítulos* 5, 6 y 7 corresponden la etapa de transporte del gas mediante redes de gasoductos, centrandó la investigación en el desarrollo de sistemas de control on-line capaces de generar las consignas de presión necesarias para que el gas llegue a su destino en condiciones óptimas. En este *Capítulo* se hace un resumen de las conclusiones obtenidas en cada uno de los capítulos anteriores. Además se esbozan las futuras líneas de investigación en el área.

8.1 Sistemas de distribución de derivados del petróleo

Los *Capítulos 2, 3 y 4* corresponden a la etapa de distribución de diferentes derivados del petróleo mediante redes de poliductos, centrando la investigación tanto en el desarrollo de los modelos matemáticos con los que llevar a cabo la planificación óptima de dicho proceso, como del desarrollo de los correspondientes algoritmos con los que resolver dichos modelos. A continuación se muestran las conclusiones a las que se han llegado, así como las líneas futuras de investigación en esta área.

8.1.1 Conclusiones

Las principales conclusiones a las que se han llegado son:

- La utilización de un modelo multiperiodo permite resolver problemas para los que un modelo monoperiodo no es capaz de encontrar ninguna solución. Incluso en el caso en el que fuese posible planificar el modo de operación del poliducto a lo largo de varios periodos mediante un modelo monoperiodo, dicha planificación no sería la óptima, tan solo alcanzable mediante la utilización de un modelo multiperiodo.
- Si el modelo integra la planificación de la producción en la refinería como parte del conjunto de variables de decisión del proceso, es posible reducir los costes de la operación al sincronizar temporalmente la producción de los diferentes productos en la refinería con su inyección en el poliducto, de tal forma que se evite la utilización del sistema durante ciertos intervalos de tiempo del horizonte de planificación en los que la utilización del sistema tiene un coste superior que fuera de los mismos.
- Un modelo multiperiodo que integre la planificación de la producción como variable de decisión, es demasiado complejo como para ser resuelto de forma eficiente mediante técnicas clásicas cuando se aplica a problemas con más de 3 ó 4 periodos. Este hecho hace necesario el desarrollo de nuevos algoritmos basados en técnicas heurísticas capaces de aportar buenas soluciones, aunque no sean óptimas, en tiempos de cómputo aceptables.
- Los nuevos modelos desarrollados para planificación en redes de poliductos permiten resolver problemas de distribución en los que se incluyan nodos intermedios, que pueden actuar tan solo como bifurcadores de producto en diferentes direcciones (modo bifurcador) o como nodos bifurcadores con

posibilidad de almacenamiento temporal de producto (modo almacén). La posibilidad de almacenamiento de producto en los nodos intermedios permite reducir el número de interfases con mezcla reduciendo, por tanto, el coste de la operación. En contrapartida, cuando la red opera en modo almacén el espacio de búsqueda a recorrer para encontrar la solución óptima aumenta de forma considerable, haciendo que el tiempo empleado por el algoritmo de optimización en encontrar la solución al problema también aumente en exceso.

- Para problemas que involucren redes de tamaño considerable operando en modo almacén, los algoritmos clásicos de optimización necesitan un excesivo tiempo de cómputo para encontrar la solución óptima del problema, dado que se trata de problemas combinatorios. En estos casos, se han buscado alternativas mediante el desarrollo de algoritmos de optimización basados en técnicas heurísticas que sean capaces de obtener buenas soluciones en tiempos de cómputo aceptables. En concreto se han desarrollado algoritmos basados en Metaheurísticas de Búsqueda y Metaheurísticas de Evolución.
- Todas las Metaheurísticas de Búsqueda desarrolladas son combinaciones de métodos de mejora aplicados sobre las soluciones iniciales obtenidas mediante diferentes heurísticas de construcción. Se han descrito tres heurísticas de construcción: aleatoria (RND), basada en la relajación lineal de la formulación IP (RLP) y basada en la relajación cuadrática de la formulación IP (RQP). En cuanto a la generación de los vecindarios sobre los que buscar la solución mejora, se han descrito cinco métodos: cambio (Nc), intercambio (Ns), inserción (Ni), una combinación de los tres anteriores (COMB) y una mejora por probabilidades (PROB). Finalmente, tanto los métodos de construcción como los de mejora han sido utilizados en las diferentes versiones de las metaheurísticas de búsqueda desarrolladas: Búsquedas MS, VNS y Tabú, así como diferentes variantes del algoritmo de Enfriamiento Simulado (SA).
- En cuanto a las Metaheurísticas de Evolución, se han desarrollado tres versiones diferentes de los Algoritmos Genéticos. La primera de ellas es un Algoritmo Genético Secuencial (SGA), para el que se han diseñado unos operadores específicos con los que implementar el cruce y la mutación del proceso de reproducción. Una mejora del SGA consiste en introducir búsquedas locales sobre el mejor individuo de la población cada cierto número de generaciones. Con este propósito se ha utilizado el algoritmo VNS como algoritmo de búsqueda local dando lugar a la segunda versión de Algoritmo Genético desarrollada (SGA-LS). En tercer y último lugar, se ha desarrollado un

Algoritmo Genético Multiagente (MAGA) utilizando un modelo de evolución que se asemeja más a la evolución natural que el modelo que siguen tanto el SGA como el SGA-LS (Algoritmos Genéticos tradicionales).

- Finalmente se han implementado las versiones paralelas de los mejores representantes tanto de Metaheurísticas de Búsqueda (SMMC-SA) como de Metaheurísticas de Evolución (MAGA). En ambos casos se ha hecho un estudio para determinar el mejor esquema de migración entre las diferentes poblaciones, así como de la frecuencia de tales migraciones. Los mejores algoritmos encontrados fueron el PMMC-SA-ME (como Metaheurística de Búsqueda) y el PMAGA-ME (como Metaheurística de Evolución), siendo la frecuencia de migración de 10 generaciones. Estos algoritmos han sido aplicados a la resolución del problema planteado en la sección 3.4.3 del *Capítulo 3*, comparándose la evolución de la mejor solución encontrada por los mismos con la encontrada por el resolutor comercial CPLEX.
- Cualquiera de las metaheurísticas ofrece mejores resultados que CPLEX, siendo el mejor algoritmo a la hora de resolver el problema aquí planteado el PMMC-SA-ME. No obstante el algoritmo PMAGA-ME da mejores resultados que el PMMC-SA-ME para tiempos de cómputo inferiores a 2 horas. Así, si lo que se desea es obtener una solución relativamente buena en un tiempo de cómputo aceptable, el algoritmo PMAGA-ME sería una buena opción. Por el contrario, si se dispone de mayor tiempo de CPU para resolver el problema, el algoritmo PMMC-SA-ME ofrecerá mejores resultados que ningún otro de entre los aquí desarrollados.

8.1.2 Trabajo futuro

Tal y como se ha comentado en las conclusiones, el modelo desarrollado para la planificación óptima durante varios periodos de la producción y distribución de varios derivados del petróleo en un sistema de un único poliducto, es demasiado complejo como para ser resuelto de forma eficiente mediante técnicas clásicas cuando se aplica a problemas con más de 3 ó 4 periodos. Este hecho hace necesario el desarrollo de nuevos algoritmos basados en técnicas heurísticas capaces de aportar buenas soluciones, aunque no sean óptimas, en tiempos de cómputo aceptables. La idea básica, consiste en sustituir la forma en la que el algoritmo Branch&Bound fija la parte entera del problema mediante un algoritmo heurístico, que genere dichas soluciones enteras utilizando el conocimiento que tiene del problema y las vaya

modificando de tal manera que converjan hacia el óptimo. Esta idea se ilustra mejor mediante el diagrama mostrado en la figura 8.1.

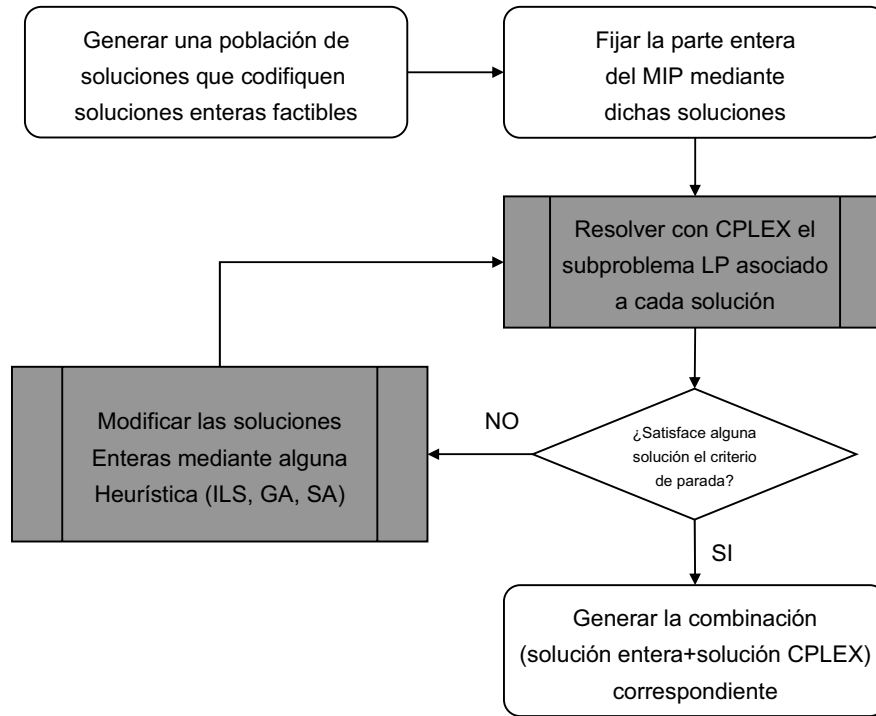


Figura 8.1: Algoritmo híbrido para la planificación óptima.

Tal y como se puede ver el algoritmo comienza por generar de forma aleatoria una población de soluciones que satisfagan todas las restricciones correspondientes a la parte entera de la formulación MIP. A continuación dichas soluciones se utilizan para fijar el valor de todas las variables enteras la formulación MIP, y los LP resultantes son resueltos mediante CPLEX. Si alguna combinación (individuo+solución CPLEX) es suficientemente buena se toma como solución al problema, en caso contrario, se utiliza un algoritmo heurístico para modificar las soluciones de la población entera con el objetivo de mejorar la solución encontrada hasta el momento.

8.2 Sistemas de transporte de gas

Los *Capítulos 5, 6 y 7* corresponden la etapa de transporte del gas mediante redes de gasoductos, centrandó la investigación en el desarrollo de sistemas de control on-line capaces de generar las consignas de presión necesarias para que el gas llegue a su destino de forma óptima en las condiciones especificadas. A continuación se muestran las conclusiones a las que se han llegado, así como las líneas futuras de investigación en esta área.

8.2.1 Conclusiones

Las principales conclusiones a las que se han llegado son:

- Utilizando las leyes de conservación de masa, momento y energía, se ha modelado la dinámica de presión y caudal del gas en el interior de un gasoducto de sección circular constante. Tras aplicar ciertas propiedades conocidas de los fluidos, se han obtenido un par de modelos simplificados fácilmente integrables en un computador mediante los esquemas numéricos desarrollados.
- Se han modelado las estaciones de compresión de la red teniendo en cuenta que están formadas por un conjunto de compresores centrífugos operando en paralelo. A partir de los datos experimentales que se poseen sobre su funcionamiento se han obtenido los parámetros que caracterizan la región de funcionamiento de cada compresor y su eficiencia, a partir de los cuales calcular el modo de operación de la estación. Además, se muestran otros elementos presentes en la red como fuentes, cargas, bifurcadores y válvulas.
- Se ha desarrollado una librería de componentes en MATLAB–Simulink con el fin de poseer un sistema experimental que reproduzca los mismos resultados que el sistema real. Una vez diseñada, dicha librería ha sido utilizada para resolver cuatro ejemplos de aplicación mostrando la utilidad de la misma. Los dos bloques fundamentales de dicha librería Simulink son los bloques diseñados para la simulación de los gasoductos y estaciones de compresión. Desde ellos, se pueden especificar los parámetros asociados tanto a sus características físicas como al método numérico utilizado para integrar los correspondientes modelos.
- Se ha diseñado un controlador predictivo que utiliza el Algoritmo de Punto Interior como elemento central para el cálculo de la secuencia de control. La secuencia de control asociada a cada uno de los diferentes problemas de control planteados se calcula resolviendo un problema de optimización definido por una función objetivo más un conjunto de restricciones de igualdad y desigualdad. Por tanto, se ha establecido un método sistemático para transformar cada uno de los posibles problemas de control en los correspondientes programas lineales, cuadráticos, no lineales, enteros, etc...
- El controlador diseñado ha sido utilizado para resolver un problema de control en lazo abierto, mostrando la necesidad de dotar de cierta robustez al controlador que elimine los posibles errores asociados a las posibles discrepancias entre el modelo de predicción y el sistema real o a los posibles

errores en la predicción de la señales. Dicha robustez se logra implementando un control en lazo cerrado mediante la técnica del horizonte deslizante.

- Se ha formulado el problema con el que encontrar la secuencia de control óptima en una red de distribución que contenga estaciones de compresión. Dicho problema es un MINLP. En el caso de que las estaciones de compresión operen con un número fijo de compresores, dicho problema se simplifica notablemente, al quedar eliminadas las variables enteras del problema, resultando un QP.
- Finalmente, se introduce la parte entera del modelo, consecuencia de la utilización de elementos discretos, y se desarrollan y evalúan los algoritmos propuestos para el control de tales sistemas híbridos. Dichos algoritmos se basan en la hibridación de técnicas tanto clásicas como heurísticas para acelerar la convergencia de los mismos en la búsqueda de soluciones.

8.2.2 Trabajo futuro

Los sistemas de control de redes de gasoductos desarrollados en esta tesis, son aplicables a redes cuya topología se basa en la conexión en serie de varios gasoductos mediante estaciones de compresión. Así, falta por desarrollar la formulación matemática del problema a resolver cuando:

- De desee controlar una red con una topología diferente.
- Se incluyan otros elementos en la red susceptibles de ser controlados, tales como bifurcadores o válvulas con las que cortar el flujo de gas en determinadas direcciones.
- La demanda de gas sea una variable de control.

En este caso último caso, el problema puede resolverse en dos etapas. Primeramente, hay que determinar el flujo de gas a inyectar en cada uno de los gasoductos de entrada de la red, y como distribuirlo por el resto para satisfacer una determinada demanda en los puntos de consumo. En segundo lugar, se deberían determinar las presiones con las que distribuir los flujos de gas determinados en la primera etapa, con las que el consumo total asociado a dicho proceso de distribución sea mínimo. En este sentido, se pueden tratar de desarrollar en un futuro algoritmos de control que integren estas dos etapas en el mismo controlador.

Apéndice A

Resolución numérica de EDPs en dinámica de fluidos

La solución analítica de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales (EDPs) implica expresiones compactas las cuales proporcionan la variación continua de las variables dependientes a través todo el dominio en el que éstas están definidas. En contraste, la solución numérica puede proporcionar respuesta solamente en puntos discretos de dicho dominio, llamados puntos malla, y cuyo espaciado suele ser uniforme, aunque no tiene porqué. La resolución numérica de las ecuaciones es más precisa cuanto menor sea dicho espaciado, pero en contrapartida aumentan los requisitos computacionales.

El desarrollo de las simulaciones computacionales de la dinámica de fluidos (CFD) comenzó con el advenimiento de las computadoras digitales a comienzo de la década de los 50. Los métodos de diferencias finitas (FDM) y elementos finitos (FEM), que constituyen las herramientas básicas en la resolución de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales en general y de CFD en particular, tuvieron diferentes orígenes. En 1910, en la Royal Society de Londres, Rychardson presentó un artículo con la primera resolución mediante FEM del análisis de tensiones en una presa masonera. En contraste, el primer trabajo sobre FEM fue publicado en el *Aeronautical Science Journal* por Tuner, Clough, Martín y Topp para el análisis de tensiones en aviones en 1956. Desde entonces ambos métodos han sido extensamente desarrollados en la dinámica de fluidos, transferencia de calor y áreas relacionadas.

Hay un evidente crecimiento en los beneficios que se obtienen cuando se combinan los conocimientos aportados por estas dos técnicas. Como resultado se obtiene el método de los volúmenes finitos (FVM), el cual ha adquirido popularidad en los últimos años gracias al manejo de estructuras de datos simples y a su formulación relacionada con los métodos FDM y FEM. Históricamente, los métodos de diferencias finitas han dominado en el CFD. Su formulación y computación simple han contribuido a este hecho. Por otro lado, los FEM son conocidos como una formulación más complicada y que requiere mayor tiempo de cálculo.

A.1 Propiedades matemáticas de las ecuaciones en dinámica de fluidos

En el *Capítulo 5* se dedujeron las ecuaciones que gobiernan la dinámica de un fluido compresible en su forma diferencial. Antes de comenzar a estudiar los métodos numéricos para la solución de dichas ecuaciones, es útil examinar algunas de las propiedades matemáticas que éstas poseen. Cualquier solución numérica válida debería exhibir unas propiedades que obedezcan a las propiedades matemáticas de dichas ecuaciones, [Wen96].

A.1.1 Clasificación de las EDPs

Una ecuación en derivadas parciales es aquella en la que aparecen derivadas parciales de una función desconocida u con respecto a dos o más variables independientes. Supóngase tres funciones $a(x,y)$, $b(x,y)$ y $c(x,y)$ definidas sobre un dominio D del plano xy . La solución de la ecuación $L(u)=c$ mostrada en (A.1) es una función $f(x,y)$ definida sobre todo o parte de D y tal que la ecuación se reduce a una identidad en las variables x e y cuando u es reemplazado por $f(x,y)$.

$$L(u) = a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} = c \quad (\text{A.1})$$

La ecuación (A.1) es una EDP de primer orden lineal. De primer orden porque no aparecen derivadas de orden superior a 1 y lineal porque se verifica la siguiente identidad mostrada en la ecuación (A.2) para cualquier par de constantes α_1 y α_2 y funciones diferenciables u_1 y u_2 .

$$L(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) = \alpha_1 L(u_1) + \alpha_2 L(u_2) \quad (\text{A.2})$$

Por definición, una EDP para $u(x,y)$ tiene la forma mostrada en la ecuación (A.3), donde $a(x,y)$ y $g(x,y)$ son funciones dadas de x e y . N y M son enteros positivos y las derivadas de orden cero corresponden a u .

$$L(u) = \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^M a_{n,m}(x,y) \frac{\partial^{n+m} u}{\partial x^n \partial y^m} = g(x,y) \quad (\text{A.3})$$

Si $g(x,y)=0$ entonces se dice que la ecuación (A.3) es homogénea. Si los coeficientes a , b y c dependen tanto de u como de x e y , entonces se dice que la ecuación (A.2) es quasilineal. La forma general de un sistema de ecuaciones quasilineales para el caso de dos variables independientes (x,y) y dos dependientes (u,v) puede escribirse de la forma mostrada en las ecuaciones (A.4) y (A.5), donde los coeficientes a_1, a_2, \dots, e_2 son

funciones conocidas de x , y , u y v y sus derivadas. Se asume que todas las funciones son continuas, con tantas derivadas continuas como se requieran y que en ninguna parte se verifica la condición $a_1 : a_2 = b_1 : b_2 = c_1 : c_2 = d_1 : d_2$.

$$L_1 = a_1 \frac{\partial u}{\partial x} + b_1 \frac{\partial u}{\partial y} + c_1 \frac{\partial v}{\partial x} + d_1 \frac{\partial v}{\partial y} + e_1 = 0 \quad (\text{A.4})$$

$$L_2 = a_2 \frac{\partial u}{\partial x} + b_2 \frac{\partial u}{\partial y} + c_2 \frac{\partial v}{\partial x} + d_2 \frac{\partial v}{\partial y} + e_2 = 0 \quad (\text{A.5})$$

Supóngase la combinación lineal de L_1 y L_2 mostrada en la ecuación (A.6). Si se satisface la relación mostrada en la ecuación (A.7), entonces dicha combinación lineal se convierte en la mostrada en la ecuación (A.8) en la que sólo aparecen derivadas totales respecto a una única variable (ordinarias).

$$L = \lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 = (\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2) \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2}{\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \right) + (\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2) \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\lambda_1 d_1 + \lambda_2 d_2}{\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right) + (\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2) = 0 \quad (\text{A.6})$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2}{\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2} = \frac{\lambda_1 d_1 + \lambda_2 d_2}{\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2} \quad (\text{A.7})$$

$$L = (\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2) \cdot \frac{du}{dx} + (\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2) \cdot \frac{dv}{dx} + (\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2) = 0 \quad (\text{A.8})$$

Utilizando la ecuación (A.7) para eliminar los coeficientes de la combinación lineal λ , se obtiene la ecuación (A.9), a partir de la cual se encuentra la ecuación característica (A.10) cuadrática en dy/dx .

$$-\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{a_2 dy - b_2 dx}{a_1 dy - b_1 dx} = \frac{c_2 dy - d_2 dx}{c_1 dy - d_1 dx} \quad (\text{A.9})$$

$$(a_1 c_2 - a_2 c_1) \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - (a_1 d_2 - a_2 d_1 + b_1 c_2 - b_2 c_1) \left(\frac{dy}{dx} \right) + (b_1 d_2 - b_2 d_1) = 0 \quad (\text{A.10})$$

Las direcciones especificadas por las soluciones de la ecuación (A.10) son las llamadas direcciones características. Estas pueden ser reales y distintas, reales e iguales, o complejas dependiendo de si su discriminante mostrado en la ecuación (A.11) es positivo, cero o negativo respectivamente. Este es también un criterio de clasificación de las ecuaciones (A.4) y (A.5) como hiperbólicas, parabólicas o elípticas. Son hiperbólicas si el discriminante es positivo, existiendo por tanto dos características

reales; parabólica si el discriminante es nulo; y elíptica si no existen direcciones características reales.

$$(a_1d_2 - a_2d_1 + b_1c_2 - b_2c_1)^2 - 4(a_1c_2 - a_2c_1)(b_1d_2 - b_2d_1) = 0 \quad (\text{A.11})$$

Considérese ahora la ecuación lineal de segundo orden (A.12), donde a , b , c y e son funciones de x , y , u y las derivadas parciales de u con respecto a x e y .

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e \quad (\text{A.12})$$

Definiendo las variables (A.13), pueden obtenerse las relaciones mostradas en la ecuación (A.14), y la ecuación (A.12) puede escribirse como se muestra en (A.15).

$$p = \frac{\partial u}{\partial x} \quad q = \frac{\partial u}{\partial y} \quad r = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad s = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \quad t = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (\text{A.13})$$

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = p dx + q dy$$

$$dp = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) dx + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) dy = r dx + s dy \quad (\text{A.14})$$

$$dq = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) dx + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) dy = s dx + t dy$$

$$a \cdot r + 2b \cdot s + c \cdot t = e \quad (\text{A.15})$$

Considérese ahora una curva en el plano xy con valores dados de u , p y q sobre dicha curva y en la que $du=pdx+qdy$. Para determinar r , s y t sobre la misma, se dispone del sistema lineal (A.16). Sin embargo, si el determinante mostrado en la ecuación (A.17) es nulo, no existe solución a menos que se satisfaga una de las tres relaciones mostradas en (A.18).

$$\begin{aligned} dx \cdot r + dy \cdot s &= dp \\ dx \cdot s + dy \cdot t &= dq \\ a \cdot r + 2b \cdot s + c \cdot t &= e \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

$$\begin{vmatrix} dx & dy & 0 \\ 0 & dx & dy \\ a & 2b & c \end{vmatrix} = a dy^2 - 2b dx dy + c dx^2 = a \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - 2b \left(\frac{dy}{dx} \right) + c \quad (\text{A.17})$$

$$\begin{vmatrix} dp & dy & 0 \\ dq & dx & dy \\ e & 2b & c \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} dx & dp & 0 \\ 0 & dq & dy \\ a & e & c \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} dx & dy & dp \\ 0 & dx & dq \\ a & 2b & e \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{A.18})$$

De la ecuación (A.17) se obtienen dos soluciones para dy/dx que son reales solamente si $b^2-ac > 0$, siendo la ecuación hiperbólica, o si $b^2-ac = 0$, siendo la ecuación parabólica. Si $b^2-ac < 0$ las soluciones son complejas y la ecuación se dice que es elíptica. La razón por la que se debe satisfacer alguna de las ecuaciones (A.18) es que se produzca una indeterminación en la resolución del sistema (A.16) para el caso en el que el determinante mostrado en (A.17) sea nulo. El desarrollo de las ecuaciones genera un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias y en algunos casos simples ecuaciones algebraicas. Dichas ecuaciones se llaman de compatibilidad y sólo son válidas a lo largo de las curvas características. De esta forma se sustituye el problema de resolver una EDP por el de resolver un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs) sobre las curvas características. Esta es la esencia del llamado método de las características.

A continuación, se discuten brevemente, y sin demostración, las características básicas del comportamiento de las EDPs hiperbólicas, parabólicas y elípticas, así como su relación con el comportamiento de la solución en problemas de dinámica de fluidos.

A.1.2 Ecuaciones hiperbólicas

Para ecuaciones hiperbólicas, la información dada en un punto P tiene influencia solamente sobre los puntos pertenecientes a la región comprendida entre sus curvas características. Para ver esto, considérese la gráfica mostrada en la parte izquierda de la figura A.1 para un problema bidimensional con dos variables espaciales independientes. En ella, pueden verse las curvas características a través del punto P para el sistema formado por las ecuaciones (A.4) y (A.5). La información proporcionada en el punto P , tiene influencia sobre la región I . Esto tiene un efecto colateral sobre las condiciones de contorno para las ecuaciones hiperbólicas.

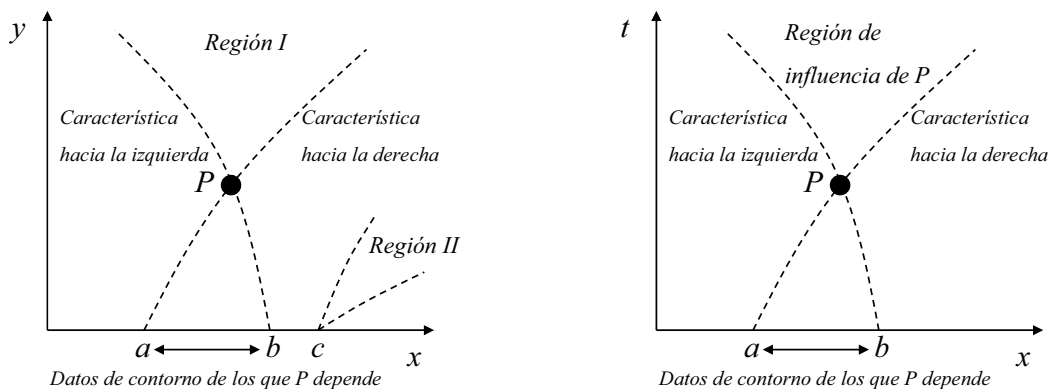


Figura A.1: Dominio y contornos para la solución de las ecuaciones hiperbólicas.

Supóngase que las condiciones de contorno para el problema en cuestión están dadas sobre el eje x , es decir, se conoce el valor de la variable dependiente sobre dicho eje. Entonces, la solución puede obtenerse avanzando hacia delante en la dirección y desde el contorno de partida. Sin embargo, la solución para u y v en el punto P dependerá solamente de los valores sobre la región del contorno comprendida entre los puntos a y b tal y como se muestra en la parte izquierda de la figura A.1. La información en el punto c , el cual está fuera del intervalo ab , es propagada a lo largo de las características a través de c y tiene influencia solamente sobre los puntos de la región *II*. El punto P está fuera de dicha región y por tanto no “siente” la información aportada en el punto c . Por esta razón, el punto P depende solamente de la parte del contorno que cae dentro de la región interceptada por las características que pasan a su través (intervalo ab).

En dinámica de fluidos, hay dos tipos de flujo gobernados por EDPs hiperbólicas, y que muestran el comportamiento siguiente:

Flujo supersónico, inviscible y estacionario

Este tipo de flujo presenta el comportamiento presentado en la parte izquierda de la figura A.1 para el caso bidimensional. En el caso tridimensional el tratamiento es análogo, pero se ha omitido aquí por no complicar los gráficos.

Flujo compresible, inviscible y no estacionario

En este caso la dirección de avance en la solución es el tiempo. Para el caso unidimensional, considérese un punto P en el plano xt como el mostrado en la parte derecha de la figura A.1. De nuevo, la región influenciada por el punto P es la región entre las dos características a través del punto P , y el intervalo ab es la única porción del contorno a lo largo del eje x que aporta información para la solución de la ecuación en el punto P .

A.1.3 Ecuaciones parabólicas

Para ecuaciones parabólicas, la información dada en un punto P en el plano xy tiene influencia sobre toda la región del plano situada a uno de los lados de dicho punto. Para ver esto, considérese la gráfica mostrada en la figura A.2 en donde se ha dibujado una única línea característica a través del punto P . Supóngase además que los ejes x e y delimitan el dominio en el que están definidas las variables del proceso. Entonces, la solución en un punto P depende de las condiciones de contorno sobre todo el eje y y sobre la porción del eje x comprendida entre los puntos a y b .

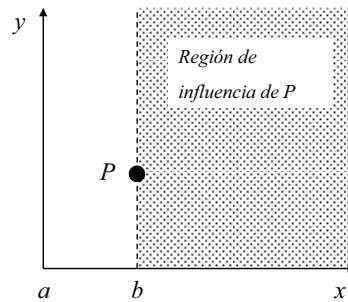


Figura A.2: Dominio y contornos para la solución de las ecuaciones parabólicas en dos dimensiones.

A.1.4 Ecuaciones elípticas

Para ecuaciones elípticas, la información dada en un punto P del plano xy tiene influencia sobre todas las demás regiones del dominio. Para ver esto, considérese el dominio rectangular mostrado en la figura A.3. Aquí, el dominio es totalmente cerrado en contraste con los dominios abiertos de las ecuaciones hiperbólicas y parabólicas. Entonces, la solución en un punto P debe ser obtenida simultáneamente con la solución en todos los demás puntos del dominio ya que todos ellos tienen influencia sobre el valor que toma dicha solución sobre dicho punto.

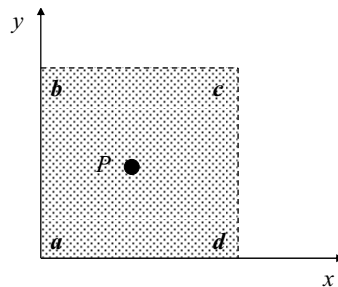


Figura A.3: Dominio y contornos para la solución de las ecuaciones elípticas en dos dimensiones.

A.2 Discretización de EDPs

A.2.1 Diferencias finitas

El método de diferencias finitas, [MG97], es ampliamente usado en CFD. La filosofía del método es reemplazar las derivadas parciales que aparecen en las ecuaciones que gobiernan la dinámica del proceso por diferencias algebraicas, dando lugar a un sistema algebraico que puede resolverse en los puntos de la malla que

resulta al discretizar el dominio en el que las variables están definidas. Para comprender la notación del esquema numérico, se ha de tener en cuenta que este tipo de algoritmos recursivos se basan en el uso de una malla discreta de puntos, en la que las filas son los índices de los puntos temporales (índice n) y las columnas los espaciales (índice i) y tal y como se muestra en la figura A.4.

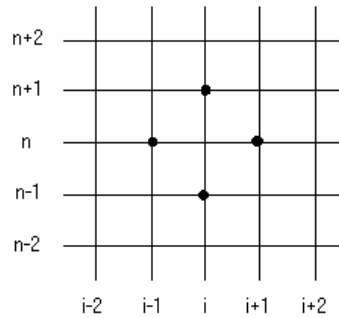


Figura A.4: Malla discreta.

Cada esquema numérico tiene un diagrama de este tipo. Al conjunto de puntos en negrita de la malla, en este caso cuatro, se le llama molécula computacional. La relación con el espacio continuo de la variable viene dada por la ecuación (A.19), donde Δx y Δt son los llamados pasos de simulación en x y en t respectivamente.

$$\begin{aligned} x_i &= x_0 + i \cdot \Delta x \\ t_n &= t_0 + n \cdot \Delta t \end{aligned} \tag{A.19}$$

Es fácilmente deducible que el nivel $n=0$ es precisamente la condición inicial en $t=0$, para cualquier punto espacial i , que debe darse como entrada al algoritmo de cómputo. Así mismo, la columna $i=0$, para cualquier n , es también conocida ya que representa la condición de contorno en $x=0$.

Al hecho de que un esquema converja a la solución real con menos error cuanto más pequeño se haga el paso de simulación se le llama convergencia condicional. En este tipo de esquemas, cuando se hace un desarrollo Taylor de la pérdida de magnitudes conservadas se llega a expresiones del tipo:

$$\delta E = C_0 + C_1(\Delta t) + C_2(\Delta t)^2 + \dots \tag{A.20}$$

Si el primer término C_0 resulta ser nulo, se dice que el esquema numérico es disipativo de orden 1. Si además también lo es C_1 , se dice que es disipativo de orden 2, etc... Es por ello que cuanto mayor orden de disipación tenga el esquema y cuanto más pequeño se haga el paso de simulación más exacta será la solución y menos

degenerará con el tiempo. Obviamente, en este tipo de esquemas la convergencia total se daría en el límite $(\Delta x, \Delta t) \rightarrow 0$.

A.2.2 Esquemas elementales de diferencias finitas

La representación en diferencias finitas de las derivadas que aparecen en las ecuaciones está basada en los desarrollos en serie de Taylor. Por ejemplo, si $u_{i,n}$ denota la componente x de la velocidad en el punto (i,n) , entonces la velocidad $u_{i+1,n}$ en el punto $(i+1,n)$ puede ser expresada mediante el desarrollo en serie de Taylor de u en torno al punto (i,n) mostrado en (A.21). Esta expresión es matemáticamente exacta para $u_{i+1,n}$ si: a) el número de términos es infinito y la serie converge, y b) $\Delta x \rightarrow 0$.

$$u_{i+1,n} = u_{i,n} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,n} \cdot \Delta x + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,n} \cdot \frac{(\Delta x)^2}{2} + \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_{i,n} \cdot \frac{(\Delta x)^3}{6} + \dots \quad (\text{A.21})$$

Para computaciones numéricas es impracticable utilizar un número infinito de términos en esta ecuación, por tanto lo que se hace es truncar. Por ejemplo, si se desprecian los términos de orden 2 y superiores, se obtiene la ecuación (A.22) con primer orden de precisión. En esta ecuación los términos de orden superior despreciados representan el error de truncado en la representación de serie finita. El error de truncado para la ecuación (A.22) se muestra en la ecuación (A.23). Por tanto, puede verse como para reducir el error no hay que incluir más términos en el desarrollo en serie de Taylor o reducir la magnitud de Δx .

$$u_{i+1,n} \approx u_{i,n} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,n} \cdot \Delta x \quad (\text{A.22})$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{\partial^n u}{\partial x^n}\right)_{i,n} \cdot \frac{(\Delta x)^n}{n!} \quad (\text{A.23})$$

Si se resuelve la ecuación (A.22) para la derivada de u con respecto a x en el punto (i,n) se obtiene la ecuación (A.24), que es la representación en diferencia avanzada de dicha derivada en dicho punto. Si se procede de forma análoga pero partiendo de un desarrollo para $u_{i-1,n}$ en lugar de para $u_{i+1,n}$ (ecuación (A.25)), se obtiene la ecuación (A.26), que es la representación en diferencia retardada de dicha derivada en dicho punto. Finalmente, restando las ecuaciones (A.21) y (A.25), despreciando los términos de orden 2 y superiores y resolviendo para la derivada de u con respecto a x en el punto (i,n) , se obtiene la representación en diferencia centrada de dicha derivada en dicho punto mostrada en la ecuación (A.27).

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,n} = \frac{u_{i+1,n} - u_{i,n}}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (\text{A.24})$$

$$u_{i+1,n} = u_{i,n} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,n} \cdot (-\Delta x) + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,n} \cdot \frac{(-\Delta x)^2}{2} + \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_{i,n} \cdot \frac{-(-\Delta x)^3}{6} + \dots \quad (\text{A.25})$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,n} = \frac{u_{i,n} - u_{i-1,n}}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (\text{A.26})$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,n} = \frac{u_{i+1,n} - u_{i-1,n}}{2\Delta x} + O(\Delta x)^2 \quad (\text{A.27})$$

Análogamente pueden obtenerse expresiones en diferencias finitas para derivadas de órdenes superiores y con mayores órdenes de precisión. Por ejemplo, fácilmente se puede obtener la expresión mostrada en la ecuación (A.28) para la derivada segunda, a partir de la cual obtener la (A.29).

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,n} = \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right]_{i,n} \approx \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i+1,n} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,n}}{\Delta x} = \left[\left(\frac{u_{i+1,n} - u_{i,n}}{\Delta x}\right) - \left(\frac{u_{i,n} - u_{i-1,n}}{\Delta x}\right) \right] \cdot \frac{1}{\Delta x} \quad (\text{A.28})$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,n} \approx \frac{u_{i+1,n} - 2u_{i,n} + u_{i-1,n}}{(\Delta x)^2} \quad (\text{A.29})$$

La figura A.5 muestra una representación gráfica de todas estas aproximaciones por diferencias finitas.

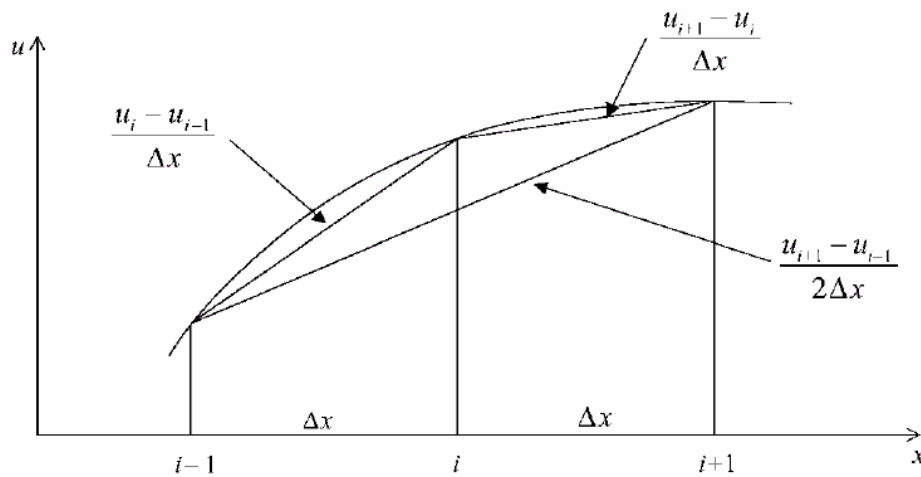


Figura A.5: Aproximaciones por diferencias finitas.

Una vez se dispone de las aproximaciones en diferencias finitas para las derivadas que aparecen en el modelo, cabe preguntarse qué ocurre en los puntos de la frontera que delimita el dominio dentro del que se busca la solución. Por ejemplo, en el caso del transporte de gas, si a la entrada del gasoducto ($x=0$) se utiliza un esquema en diferencias centradas, serían necesarios valores de la presión o el caudal en puntos que están fuera del mismo, es decir en $x=-\Delta x$. Evidentemente esto no es posible, y por ello se deben encontrar soluciones. Una posibilidad es utilizar un esquema de diferencias avanzadas pero entonces se pierde en precisión. En los comienzos de los desarrollos en CFD se utilizaba la llamada condición de contorno reflejada, que supone un valor en $x=-\Delta x$ semejante al que tenemos en $x=\Delta x$, sin embargo esto no tiene sentido físico en la mayoría de los casos e incluso llega a ser menos preciso que la diferencia avanzada. Entonces, ¿cómo se puede obtener una expresión en diferencias finitas en $x=0$ con precisión de orden 2? La respuesta es simple, y además ilustra otro método para derivar las aproximaciones en diferencias para las derivadas. Se basa en el uso de los polinomios interpoladores de Lagrange mostrados en la ecuación (A.30), donde k hace referencia a los puntos de la función $u(x,t)$ seleccionados para la interpolación y m es el número de puntos en el intervalo de estudio $x_0 < x < x_J$.

$$W_{m-1} = \sum_{i=0}^m u(x_i, t) \cdot \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^m \frac{(x - x_k)}{(x_i - x_k)} \quad (\text{A.30})$$

Interpolando en tres puntos sucesivos del intervalo, $k=0, 1$ y 2 del intervalo dividido por $x_j = x_0 + i \Delta x$, se obtiene la ecuación (A.31). Seguidamente, teniendo en cuenta las ecuaciones (A.32), se obtiene la (A.33), y tras simplificar se convierte en la (A.34).

$$u(x, t) = u(x_0, t) \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + u(x_1, t) \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + u(x_2, t) \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_1)} \quad (\text{A.31})$$

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + \Delta x \\ x_2 &= x_1 + \Delta x \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = \frac{u(x_0, t)}{2(\Delta x)^2} (2x - x_2 - x_1) + \frac{u(x_1, t)}{2(\Delta x)^2} (2x - x_2 - x_0) + \frac{u(x_2, t)}{2(\Delta x)^2} (2x - x_0 - x_1) \quad (\text{A.33})$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_o = \frac{-3u_o + 4u_1 - u_2}{2\Delta x} + O(\Delta x)^2 \quad (\text{A.34})$$

Análogamente, se puede encontrar una expresión para dicha derivada en la salida del gasoducto ($x=L$) mostrada en la ecuación (A.35). Tanto la ecuación (A.34) como la (A.35) se denominan diferencias de un lado por que expresan la derivada en un punto

en función del valor que la variable dependiente toma en los puntos situados a un único lado del mismo.

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_L = \frac{-3u_L + 4u_{L-1} - u_{L-2}}{2\Delta x} + O(\Delta x)^2 \quad (\text{A.35})$$

A.2.3 Métodos explícitos e implícitos

Como se acaba de ver, la esencia de los métodos en diferencias finitas consiste en aproximar las derivadas que aparecen en las ecuaciones que describen la dinámica del proceso en cuestión mediante alguno de los esquemas mostrados en la figura A.5 para pasar de un sistema de EDPs a unas ecuaciones algebraicas fácilmente programables en una computadora. Pues bien, el tipo de esquema utilizado hace que los esquemas en diferencias finitas se pueden clasificar en dos grupos, explícitos e implícitos. Para entender lo que significan dichos grupos, se puede partir de la siguiente EDP de segundo orden:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (\text{A.36})$$

Si en ella se reemplaza la derivada temporal mediante un esquema de diferencias avanzadas y la derivada espacial mediante uno de diferencias centradas, se obtiene la ecuación (A.37). Suponiendo que se conocen las condiciones iniciales, la única variable desconocida es u_i en el siguiente instante, es decir $u_{i,n+1}$, que se puede despejar directamente en función de variables conocidas. Debido a esto, este tipo de aproximación para las derivadas cae dentro de los llamados métodos explícitos.

$$\frac{u_{i,n+1} - u_{i,n}}{\Delta t} = \frac{u_{i+1,n} - 2u_{i,n} + u_{i-1,n}}{(\Delta x)^2} \quad (\text{A.37})$$

Si se reemplaza la derivada temporal mediante un esquema de diferencias avanzadas y la derivada espacial mediante el promedio de las diferencias centradas en los instantes n y $n+1$, se obtiene la ecuación (A.38). Examinando esta ecuación, se puede ver como la variable desconocida $u_{i,n+1}$ ya no queda expresada únicamente en función de cantidades conocidas en el instante n ya que existen otros dos términos en el instante $n+1$. Por tanto, en este caso la resolución del problema consiste en escribir la ecuación de aproximación en todos los puntos de la discretización espacial y resolver el sistema de ecuaciones resultante para todos los $u_{i,n+1}$ de manera simultánea. Debido a este hecho, este tipo de aproximación para las derivadas cae dentro de los llamados métodos implícitos.

$$\frac{u_{i,n+1} - u_{i,n}}{\Delta t} = \frac{1}{2} \left(\frac{u_{i+1,n+1} + u_{i+1,n} - 2u_{i,n+1} - 2u_{i,n} + u_{i-1,n+1} + u_{i-1,n}}{(\Delta x)^2} \right) \quad (\text{A.38})$$

A.2.4 Errores y análisis de estabilidad

En la resolución numérica de una EDP aparecen dos fuentes de error, cuyo origen se debe a diferentes aspectos:

- *Error de discretización:* Es la diferencia entre la solución analítica exacta y la solución exacta de la correspondiente ecuación en diferencias. Así, según la discusión previa, el error de discretización es simplemente el error de truncado en la ecuación en diferencias más todos los errores introducidos por el tratamiento numérico de las condiciones de contorno.
- *Error de redondeo:* Es el error numérico introducido después del repetitivo número de cálculos en el cual la computadora está constantemente redondeando consecuencia de su precisión finita.

Sean:

A = Solución analítica de la ecuación diferencial en derivadas parciales.

D = Solución exacta de la ecuación en diferencias.

N = Solución numérica aportada por una computadora con precisión finita.

Teniendo en cuenta la definición de los parámetros A , D y N , dichos errores pueden calcularse como se muestra en la ecuación (A.39). Por tanto, la solución numérica aportada por una computadora de precisión finita (N) viene dado por la ecuación (A.40), donde al error de redondeo (ε) se le suele denominar simplemente error.

$$\text{Error de discretización} = A - D \quad (\text{A.39})$$

$$\text{Error de redondeo} \quad \varepsilon = N - D$$

$$N = D + \varepsilon \quad (\text{A.40})$$

La solución numérica debe verificar la ecuación en diferencias. Por ejemplo, para la ecuación (A.37), se obtiene la (A.41). Por otro lado, dado que D es la solución exacta de la ecuación en diferencias, se verifica la ecuación (A.42).

$$\frac{D_{i,n+1} + \varepsilon_{i,n+1} - D_{i,n} - \varepsilon_{i,n}}{\Delta t} = \frac{D_{i+1,n} + \varepsilon_{i+1,n} - 2D_{i,n} - 2\varepsilon_{i,n} + D_{i-1,n} + \varepsilon_{i-1,n}}{(\Delta x)^2} \quad (\text{A.41})$$

$$\frac{D_{i,n+1} - D_{i,n}}{\Delta t} = \frac{D_{i+1,n} - 2D_{i,n} + D_{i-1,n}}{(\Delta x)^2} \quad (\text{A.42})$$

Restando estas dos ecuaciones, se obtiene la ecuación (A.43) a partir de la cual se pueden considerar ciertos aspectos sobre la estabilidad de la ecuación en diferencias. Para que el método sea estable, el error debe disminuir en el avance de la solución tal y como muestra la ecuación (A.44).

$$\frac{\varepsilon_{i,n+1} - \varepsilon_{i,n}}{\Delta t} = \frac{\varepsilon_{i+1,n} - 2\varepsilon_{i,n} + \varepsilon_{i-1,n}}{(\Delta x)^2} \quad (\text{A.43})$$

$$\left| \frac{\varepsilon_{i,n+1}}{\varepsilon_{i,n}} \right| \leq 1 \quad (\text{A.44})$$

Supóngase que la distribución de errores a lo largo del eje x está dada por el desarrollo de Fourier en x mostrado en la ecuación (A.45), en donde k_m es el número de onda y e^{at} se denomina factor de amplificación.

$$\varepsilon(x, t) = e^{at} \sum_m e^{ik_m x} \quad (\text{A.45})$$

Puesto que la ecuación en diferencias es lineal, cuando la ecuación (A.45) es sustituida en la (A.43) el comportamiento de cada término de la serie es el mismo que el de la serie completa. Por tanto, al quedarse con un único término de la serie se puede escribir:

$$\varepsilon_m(x, t) = e^{at} e^{ik_m x} \quad (\text{A.46})$$

Sustituyendo esta ecuación en la (A.43) se obtiene la (A.47), que tras diversas operaciones conduce a la (A.48).

$$\frac{e^{a(t+\Delta t)} e^{ik_m x} - e^{at} e^{ik_m x}}{\Delta t} = \frac{e^{at} e^{ik_m(x+\Delta x)} - 2e^{at} e^{ik_m x} + e^{at} e^{ik_m(x-\Delta x)}}{(\Delta x)^2} \quad (\text{A.47})$$

$$e^{at} = 1 - \frac{4\Delta t}{(\Delta x)^2} \sin^2\left(\frac{k_m \Delta x}{2}\right) \quad (\text{A.48})$$

Por otro lado, de la ecuación (A.46), se obtiene la (A.49), que combinada con las ecuaciones (A.48) y (A.44) conduce a la (A.50). Tras diversas manipulaciones se deduce la condición mostrada en la ecuación (A.51) que proporciona el criterio de estabilidad necesario para que la solución de la ecuación (A.37) sea estable.

$$\frac{\varepsilon_i^{n+1}}{\varepsilon_i^n} = \frac{e^{a(t+\Delta t)} e^{ik_m x}}{e^{at} e^{ik_m x}} = e^{a\Delta t} \quad (\text{A.49})$$

$$\left| 1 - \frac{4\Delta t}{(\Delta x)^2} \sin^2 \left(\frac{k_m \Delta x}{2} \right) \right| \leq 1 \quad (\text{A.50})$$

$$\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \leq \frac{1}{2} \quad (\text{A.51})$$

Para terminar, se puede analizar la estabilidad de la ecuación hiperbólica (A.52). Reemplazando la derivada espacial mediante la diferencia centrada mostrada en la ecuación (A.53), y la derivada temporal mediante una diferencia de primer orden con $u_{i,n}$ expresado mediante el promedio entre los valores en los puntos $(i+1,n)$ e $(i-1,n)$, ecuación (A.54), se obtiene la ecuación aproximada (A.55).

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (\text{A.52})$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i,n} = \frac{u_{i+1,n} - u_{i-1,n}}{2\Delta x} \quad (\text{A.53})$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_{i,n} = \frac{u_{i+1,n} - \frac{1}{2}(u_{i+1,n} + u_{i-1,n})}{\Delta t} \quad (\text{A.54})$$

$$u_{i,n+1} = \frac{u_{i+1,n} + u_{i-1,n}}{2} - c \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\frac{u_{i+1,n} + u_{i-1,n}}{2} \right) \quad (\text{A.55})$$

Si ahora se supone un error de la forma indicada en la ecuación (A.46) y se sustituye en la ecuación (A.55), se obtiene el factor de amplificación mostrado en la ecuación (A.56), en donde el parámetro C se calcula como se muestra en (A.57).

$$e^{at} = \cos(k_m \Delta x) - iC \sin(k_m \Delta x) \quad (\text{A.56})$$

$$C = c \frac{\Delta t}{\Delta x} \quad (\text{A.57})$$

Para que el esquema numérico sea estable es necesario que $|e^{at}| \leq 1$. Aplicando este criterio sobre la ecuación (A.56) se obtiene la ecuación (A.58) llamada condición de Courant–Friedrichs–Lewy. En esta ecuación C se llama número de Courant e indica que para que la solución numérica de la ecuación (A.55) sea estable es necesario que

una vez hecha la discretización espacial, la discretización temporal verifique la condición mostrada en la ecuación (A.59).

$$C = c \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1 \tag{A.58}$$

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{c} \tag{A.59}$$

Para entender mejor el significado físico de la condición CFL, considérese la ecuación de ondas de segundo orden (A.60) cuyas líneas características representadas en la figura A.6 se muestran en las ecuaciones (A.61).

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{A.60}$$

$$\begin{aligned} x = ct & \quad \text{hacia la derecha} \\ x = -ct & \quad \text{hacia la izquierda} \end{aligned} \tag{A.61}$$

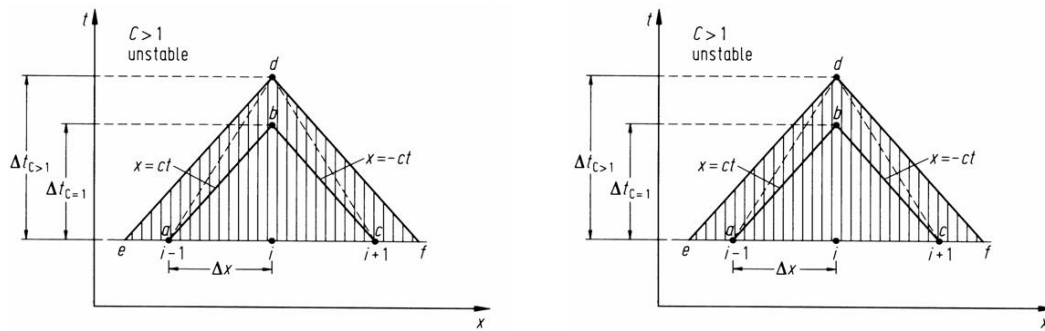


Figura A.6: Dominios de las soluciones.

En ambas figuras, considérese el punto b como la intersección entre la característica hacia la derecha a través del punto $(i-1)$ y la característica hacia la izquierda desde el punto $(i+1)$. Entonces, para la ecuación (A.60) el criterio CLF dado en la ecuación (A.59) asegurará la estabilidad de su solución numérica. Supóngase que se utiliza $C < 1$ tal y como se muestra en la parte izquierda de la figura A.6. Entonces el corte de las características en el punto i vendrá dado por el punto d . En dicho punto la solución será calculada numéricamente a partir de las ecuaciones en diferencias usando los puntos $(i-1)$ e $(i+1)$ y por tanto, el dominio numérico para el punto d estará definido por el triángulo adc . Sin embargo el dominio analítico para dicho punto será el triángulo sombreado definido por las características a través de dicho punto. Así, en la parte izquierda de la figura A.6 se ve como el dominio numérico incluye al dominio analítico. Mediante un razonamiento similar, puede verse como para el caso en el que

tomemos $C > 1$, el dominio numérico no contendrá al analítico tal y como se muestra en la parte derecha de la figura A.6. Por tanto, la interpretación física del criterio de estabilidad CLF es que para asegurar la estabilidad del método numérico, el dominio numérico debe incluir siempre al dominio analítico.

Sin embargo, la cuestión de la precisión es bastante diferente. Considérese el caso estable mostrado en la parte izquierda de la figura A.6. En dicha figura el dominio analítico de dependencia para el punto d es el triángulo sombreado. De la discusión hecha en el apartado B1.2 de dicho *Apéndice* se deduce que las propiedades de la solución en el punto d teóricamente solo dependen de los puntos incluidos en dicha región. Sin embargo, puede verse como los puntos de la rejilla numérica $(i-1)$ e $(i+1)$ caen fuera del dominio de dependencia y por tanto, teóricamente no deberían influir sobre las propiedades de la solución en el punto d . Por otro lado, los cálculos numéricos de valores en el punto d proporcionan información de los puntos $(i-1)$ e $(i+1)$. Esta situación se agrava cuando se toma $\Delta t_{C=1} \ll \Delta t_{C<1}$. En este caso, incluso aunque los cálculos sean estables, el resultado puede ser bastante impreciso debido a la gran diferencia entre el dominio de dependencia del punto d y la localización del dato numérico actual usado para calcular el valor de la solución en el punto d . Por tanto, de la discusión anterior se puede concluir que el número de Courant debe ser menor o igual a la unidad para la estabilidad, pero al mismo tiempo es deseable que sea lo más próximo a la unidad posible para ganar en precisión.

Apéndice B

Métodos de Punto Interior aplicados a la Optimización

Los métodos de Punto Interior parten de una aproximación fundamentalmente diferente a la de la que parte el método Simplex para la programación lineal. El método Simplex generalmente se mueve en cada iteración sobre los vértices del politopo generado por las restricciones del problema y normalmente mejorando el valor de la función objetivo en cada paso. Al final de este proceso, el método alcanza un vértice en el que ya no es posible mejorar el valor de la función objetivo, y que por tanto debe tomarse como la solución del problema lineal.

La tentativa más exitosa del método de Punto Interior se centra en las conocidas condiciones de Karush–Kuhn–Tucker (KKT) en busca del conjunto de variables primales y duales que satisfacen las condiciones y reduciendo la cantidad en la que dichas variables violan dichas condiciones en cada iteración. Al final, se obtiene la solución a ambos problemas, primal y dual.

B.1 Introducción

El método de Punto Interior, [Wri97], puede introducirse partiendo de la forma canónica de un problema de programación lineal mostrada en la ecuación (B.1). Introduciendo los multiplicadores de Lagrange, y , para las restricciones de igualdad $Ax=b$, las condiciones de KKT para dicho problema se pueden escribir de la forma mostrada en las ecuaciones (B.2). Recuérdese aquí que las condiciones de KKT son condiciones de optimalidad. Si existen vectores $x \in \mathcal{R}^n$ e $y \in \mathcal{R}^m$ que satisfagan (B.2), entonces x es solución del problema primal mostrado en (B.1), mientras que y es solución del problema dual mostrado en (B.3).

$$\begin{aligned} \min \quad & p'x \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned} \tag{B.1}$$

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ A'y &\leq p \\ x'(p - A'y) &= 0 \\ x &\geq 0 \end{aligned} \tag{B.2}$$

$$\begin{aligned} \max \quad & b'y \\ \text{s.t.} \quad & A'y \leq p \end{aligned} \tag{B.3}$$

Introduciendo el vector $s \in \mathcal{R}^n$ definido por $s = p - A'y$, las ecuaciones (B.2) se pueden reescribir de la forma mostrada en (B.4). Las tres últimas ecuaciones en (B.4) indican que para cada $i=1,2,\dots,n$, una de las variables x_i ó s_i es cero, y la otra es no negativa (posiblemente también cero). Por tanto, dichas condiciones se pueden reescribir según se muestra en (B.5) para cada $i=1,2,\dots,n$.

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ A'y + s &= p \\ x &\geq 0 \\ s &\geq 0 \\ x's &= 0 \end{aligned} \tag{B.4}$$

$$\begin{aligned} x &\geq 0 \\ s &\geq 0 \\ x_i s_i &= 0 \end{aligned} \tag{B.5}$$

Definiendo el vector unidad $e=(1,1,\dots,1)^T$ y las matrices diagonales X y S mostradas en la ecuación (B.6) a partir de las componentes de x y s respectivamente, las condiciones mostradas en (B.5) se pueden reescribir matricialmente de la forma mostrada en

(B.7), quedando por tanto las condiciones de KKT tal y como se muestra en las ecuaciones (B.8).

$$X = \text{diag}(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} x_1 & & \\ & \ddots & \\ & & x_n \end{pmatrix} ; \quad S = \text{diag}(s_1, \dots, s_n) = \begin{pmatrix} s_1 & & \\ & \ddots & \\ & & s_n \end{pmatrix} \quad (\text{B.6})$$

$$\begin{aligned} x &\geq 0 \\ s &\geq 0 \\ XSe &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ A'y + s &= p \\ XSe &= 0 \\ x &\geq 0 \\ s &\geq 0 \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Defínase la cantidad conocida como *gap dual* mediante la expresión mostrada en la ecuación (B.9):

$$\mu = \frac{x' s}{n} = \sum_{i=1}^n \frac{x_i s_i}{n} \quad (\text{B.9})$$

Pues bien, los métodos de Punto Interior para la variedad “primal–dual” (el tipo con más éxito tratado hasta el momento) se basa en la generación de iterativa de puntos (x,y,s) con las propiedades que se detallan a continuación:

1. Las desigualdades de (B.8) son estrictamente satisfechas en cada iteración, esto es, $x_i > 0$ y $s_i > 0$ para cada $i=1,2,\dots,n$.
2. La cantidad en la cual se violan las dos primeras condiciones de igualdad en (B.8) se reduce en cada iteración.
3. La cantidad μ definida en la ecuación (B.9) y conocida como *gap dual*, se reduce en cada iteración. Nótese a partir del punto 1, esta cantidad es estrictamente positiva, mientras que debido a la tercera ecuación (B.8), se aproximará a cero a la vez que (x,y,s) se aproxime a la solución del problema.
4. Los productos $x_i s_i$, $i=1,2,\dots,n$ se mantienen en balance. Esto es, aunque esos productos vayan a cero cuando (x,y,s) se aproxima a la solución del problema primal–dual mostrado en (B.8), una de estas cantidades no se aproxima a cero mucho más rápido que cualquiera de las otras. De (B.9) y el valor positivo de $x_i s_i$, se puede ver que μ es el valor medio de estos productos.

En la sección B3.3 se verá como los métodos de Punto Interior se mueven de una iteración a la siguiente. El número de iteración aparece como un superíndice. El punto de partida es (x^o, y^o, s^o) y los correspondientes a las siguientes iteraciones serán (x^k, y^k, s^k) con $k=0,1,2,\dots$

B.2 El método de Newton

El método de Newton para sistemas de ecuaciones no lineales juega un papel importante en el desarrollo de los métodos de Punto Interior. Por ello, se da aquí una breve descripción de dicho método.

Sea $F(z)$ una función vectorial de N componentes que dependen a su vez de N variables. Una raíz de la función F será un vector z tal que $F(z)=0$. Excepto para funciones simples es difícil encontrar una solución al sistema $F(z)=0$ por simple observación. Un caso especial es aquel en el que F es una función lineal de z , esto es, $F(z)=Az-b$ para una matriz $A \in \mathfrak{R}^{N \times N}$ y un vector $b \in \mathfrak{R}^n$. Para tal función, la solución de $F(z)=0$ satisface $Ax=b$. Por tanto, si A es no singular, se puede encontrar una solución factorizando la matriz A (factorización LU por ejemplo) y resolviendo los sistemas que resultan tras dicha factorización.

El método de Newton puede usarse cuando F es una función suave, es decir, cuando cada una de sus N componentes es al menos una función continuamente diferenciable de z . El Jacobiano de F , denotado por $J(z)$, es una matriz $N \times N$ cuyas componentes son las primeras derivadas parciales de F . El elemento (i,j) de $J(z)$ es la derivada parcial de la i -ésima componente de F con respecto a la j -ésima variable, es decir:

$$[J(z)]_{i,j} = \frac{\partial F_i(z)}{\partial z_j} \quad , \quad i = 1, 2, \dots, N \quad , \quad j = 1, 2, \dots, N \quad \text{(B.10)}$$

Cuando F es una función suave, los valores de $F(z)$ y $J(z)$ se pueden usar para construir una aproximación al valor de $F(z+\Delta z)$ para Δz pequeño tal y como se muestra en la ecuación (B.11). En otras palabras, la función y el Jacobiano proporcionan en el punto z una estimación del valor de la función en los puntos vecinos.

$$F(z + \Delta z) \approx F(z) + J(z) \cdot \Delta z \quad \text{(B.11)}$$

La aproximación (B.11) resulta de la aplicación del teorema de Taylor, el cual constituye un importante resultado del análisis que resulta central en el desarrollo de la optimización no lineal. Esto es una generalización de la observación de que cuando

F es una función escalar de una única variable, se cumple (B.12) por lo que la gráfica de F en la vecindad de z está bien aproximada por su tangente en dicho punto.

$$F(z + \Delta z) \approx F(z) + F'(z) \cdot \Delta z \quad (\text{B.12})$$

El método de Newton toma un punto de partida z^0 y genera una serie de iteraciones obteniendo los puntos z^1, z^2, \dots . En cada iteración k , se forma la aproximación lineal mostrada en la ecuación (B.11). Para ello, es necesario calcular el valor de $F(z^k)$ y $J(z^k)$, y entonces se encuentra la raíz de tal aproximación resolviendo la ecuación (B.13). Cuando $J(z^k)$ es no singular, la solución de dicho sistema está dada por la ecuación (B.14).

$$F(z^k) + J(z^k) \cdot \Delta z = 0 \quad (\text{B.13})$$

$$\Delta z^k = -J(z^k)^{-1} \cdot F(z^k) \quad (\text{B.14})$$

De la ecuación (B.11), se tiene que $F(z+\Delta z)=0$, es decir, la solución de la aproximación proporciona una solución aproximada del problema exacto $F(z)=0$. Una vez solucionado el sistema, se obtiene el punto correspondiente a la siguiente iteración mediante la ecuación (B.15). Este proceso iterativo termina cuando el error ε_k definido por la ecuación (B.16) es suficientemente pequeño.

$$z^{k+1} = z^k + \Delta z^k \quad (\text{B.15})$$

$$\varepsilon_k = \|z^k - z^*\| \quad (\text{B.16})$$

El método de Newton converge rápidamente una vez se alcanza la vecindad de la solución a $F(z)=0$. Cuando F es dos veces continuamente diferenciable y $J(z)$ es no singular en la vecindad de una solución z^* de $F(z)=0$, entonces el método converge de forma cuadrática. Por ello, se dice que el error satisface la ecuación (B.17) para alguna constante $B>0$.

$$\varepsilon_{k+1} \leq C \varepsilon_k^2 \quad (\text{B.17})$$

Si por ejemplo $B=2$ y el error inicial es $\varepsilon_0=10^{-1}$, mediante la ecuación (B.17) se ve que $\varepsilon_1=2 \times 10^{-2}$, $\varepsilon_2=8 \times 10^{-4}$, $\varepsilon_3=1.3 \times 10^{-6}$, $\varepsilon_4=3.4 \times 10^{-12}$, por lo que cuatro iteraciones del método de Newton proporcionarán más de diez órdenes de magnitud de mejora en el error.

A pesar de las excelentes propiedades de convergencia local que este método proporciona, el método de Newton puede comportarse de forma errática cuando el punto inicial z^0 está alejado de la solución. Una forma de mejorar el comportamiento

del método consiste en introducir una línea de búsqueda. En lugar de definir el nuevo punto obtenido tras la correspondiente iteración mediante la ecuación (B.15), puede hacerse mediante la ecuación (B.18), donde α_k es un escalar positivo conocido como la longitud del paso, escogido de tal forma que z^{k+1} sea el punto más apto según un determinado criterio obtenido buscando desde z^k en la dirección de Δz^k .

$$z^{k+1} = z^k + \alpha_k \Delta z^k \tag{B.18}$$

Un posible criterio para la elección de α_k es seleccionarlo de forma que se minimice la función mostrada en la ecuación (B.19) que es la norma Euclídea de F , la cual será cero para cualquier solución de $F(z)=0$ y positiva en cualquier otro punto. Dicha elección asegura que se satisfaga la condición (B.20) y a menudo, pero no siempre, hace que las sucesivas iteraciones se aproximen a la solución de $F(z)=0$ de forma estacionaria.

$$\|F(z^k + \alpha_k \Delta z^k)\|_2 \tag{B.19}$$

$$\|F(z^0)\|_2 > \|F(z^1)\|_2 > \dots > \|F(z^k)\|_2 > \|F(z^{k+1})\|_2 \dots \tag{B.20}$$

B.3 Métodos primales–duales

Los métodos de Punto Interior primales–duales se basan en parte en la observación de que las tres primeras ecuaciones en (B.8) forman un sistema de $N=2n+m$ ecuaciones algebraicas con el mismo número de variables, al que puede aplicarse el método de Newton. Sin embargo, la necesidad de manejar la condición de no negatividad, última ecuación en (B.8), introduce significantes, pero interesantes, complicaciones.

Definiendo la función $F_o(x,y,s)$ tal y como se muestra en la ecuación (B.21), el Jacobiano $J_o(x,y,s)$ de F_o puede expresarse mediante la matriz por bloques 3×3 mostrada en la ecuación (B.22).

$$F_o(x,y,s) = \begin{pmatrix} Ax - b \\ A'y + s - c \\ XSe \end{pmatrix} \tag{B.21}$$

$$J_o(x,y,s) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A' & I \\ S & 0 & X \end{pmatrix} \tag{B.22}$$

Un vector (x^*, y^*, s^*) satisface las condiciones de KKT mostradas en (B.8) si y sólo si $F_o(x^*, y^*, s^*)=0$ y, además, $x^* \geq 0$ y $s^* \geq 0$. Partiendo de un punto (x^o, y^o, s^o) , con $x^o > 0$ y $s^o > 0$, los métodos primales–duales generan una serie de iteraciones aplicando el método de Newton a la función F_o , o alguna modificación suya, y escogiendo la longitud del paso α_k en cada iteración k de tal forma que se asegure el cumplimiento de las condiciones $x^k > 0$ y $s^k > 0$. Dichas condiciones deben ser satisfechas en todas las iteraciones por dos razones. Primeramente, vectores que solucionan el sistema $F_o(x, y, s)=0$ pero violan dichas condiciones no son de interés a la hora de resolver problemas primales–duales como los mostrados en (B.1) y (B.3). Dichos puntos están normalmente alejados de la solución de estos problemas, y por ello no es posible alcanzarla fácilmente desde ellos. Y en segundo lugar, cuando la matriz A tiene el rango completo, el Jacobiano $J_o(x, y, s)$ será no singular siempre que se mantengan las condiciones $x > 0$ y $s > 0$, y por tanto, el paso de Newton estará bien definido en dicho punto.

B.3.1 Affine–Scaling

Posiblemente la forma más simple de un método de Punto Interior consiste en aplicar el método de Newton directamente (sin modificar) sobre la función F_o , y mantener la positividad de x y s reduciendo la longitud del paso cuando sea necesario. En la iteración k , con $x^k > 0$ y $s^k > 0$ satisfechas, la dirección de Newton Δz^k se puede obtener resolviendo el sistema mostrado en la ecuación (B.23).

$$J(x^k, y^k, s^k) \begin{pmatrix} \Delta x^k \\ \Delta y^k \\ \Delta s^k \end{pmatrix} = -F_o(x^k, y^k, s^k) \quad (B.23)$$

Una vez resuelto dicho sistema, el siguiente punto se obtiene de la forma mostrada en la ecuación (B.24) donde la longitud del paso es escogida para asegurar $x^{k+1} > 0$ y $s^{k+1} > 0$ en esta nueva iteración. Para hacer esto, puede buscarse el menor valor de α en el rango $(0, 1]$ que cause que alguna de las componentes de $(x^k + \alpha \Delta x^k, s^k + \alpha \Delta s^k)$ llegue a cero (α_{max}). Entonces se escoge α_k como un valor ligeramente inferior a este, por ejemplo utilizando la ecuación (B.25). Este valor mantiene la positividad, a la vez que selecciona la longitud del paso tan grande como es posible, pero no mayor que 1, y por tanto avanzando tanto como se pueda a lo largo de la dirección seleccionada por el método de Newton.

$$(x^{k+1}, y^{k+1}, s^{k+1}) = (x^k, y^k, s^k) + \alpha_k (\Delta x^k, \Delta y^k, \Delta s^k) \quad (B.24)$$

$$\alpha_k = \min(1, 0.99\alpha_{max}) \quad (B.25)$$

Esta primera tentativa de implementación de un método de Punto Interior para problemas primales–duales se denomina de *Affine–Scaling*. Mientras que puede demostrarse la convergencia hacia la solución primal–dual, para una estrategia de selección de la longitud del paso apropiada, mucho más complicada que la mostrada en la ecuación (B.25), suelen requerirse muchas iteraciones. Normalmente, hasta que se llega a las iteraciones en las que se está próximo a la solución, las componentes x y s del paso $(\Delta x^k, \Delta s^k)$ se mueven demasiado rápido hacia el límite del octante no negativo. Por tanto, es necesario fijar un valor pequeño para α_k para evitar la violación de las condiciones $x > 0$ y $s > 0$.

Otras implementaciones más exitosas utilizan modificaciones en la dirección de búsqueda que evitan el movimiento rápido hacia el límite de la región factible. En particular, las componentes de Δx^k y Δs^k son reorientadas de tal manera que pueda usarse una longitud de paso mayor. Estas modificaciones se definen mediante la aplicación del método de Newton no a la función F_0 sino a una versión perturbada del sistema.

B.3.2 Path–Following

Los métodos *Path–Following* toman una implementación menos ambiciosa para satisfacer las condiciones complementarias que los métodos de *Affine–Scaling*. En lugar de tratar cada iteración del método de Newton con el objetivo de cumplir dichas condiciones $XSe=0$ (tercera componente del sistema mostrado en la ecuación (B.21)), toman algunas iteraciones del método de Newton para alcanzar los puntos en los cuales el valor de los n los productos $x_i \cdot s_i$ se reduce con respecto al valor que tienen actualmente, y además, están mejor balanceados.

Un importante elemento en la motivación de los métodos de *Path–Following* es el denominado *camino central* C . Este se define como el conjunto de puntos (x,y,s) que son primales–duales factibles, es decir, que satisfacen las ecuaciones 1, 2, 4 y 5 del sistema (B.8), y tienen todos sus productos $x_i \cdot s_i$, $i=1,2,\dots,n$, en perfecto balance. En concreto, para el sistema (B.8), C se define como se muestra en la ecuación (B.26).

$$C = \left\{ (x, y, s) \mid \begin{array}{l} Ax = b \\ A'y + s = p \\ (x, s) \geq 0 \\ x_i s_i = \mu = x' s / n \end{array} , i = 1, 2, \dots, n \right\} \quad (B.26)$$

Defínase una vecindad de C , denotada por \mathcal{N} , como el conjunto de puntos estrictamente factibles para los cuales los productos $x_i \cdot s_i$ están altamente, pero no

exactamente, en balance. Existen varios tipos de algoritmos *Path-Following* dependiendo de la definición de $\mathcal{N}(\gamma)$. Una posibilidad es definir $\mathcal{N}(\gamma)$ mediante la ecuación (B.27) donde γ es algún parámetro fijo en el rango $(0, 1)$, y μ está definido como en la ecuación (B.9). Si (x,y,s) pertenece a $\mathcal{N}(\gamma)$, entonces todos los productos $x_i \cdot s_i$ valen al menos una fracción γ del valor medio de μ . Si $\gamma=1$, entonces que $\mathcal{N}(1)=C$.

$$\mathcal{N}(\gamma) = \left\{ (x, y, s) \mid \begin{array}{l} Ax = b \\ A'y + s = p \\ (x, s) \geq 0 \\ x_i s_i \geq \gamma\mu \end{array}, i = 1, 2, \dots, n \right\} \quad (\text{B.27})$$

Los pasos generados por los métodos *Path-Following* normalmente son pasos de Newton ejecutados en puntos cercanos al camino central C , en lugar de pasos del método de Newton cercanos a la solución del sistema formado por las tres primeras ecuaciones mostradas en (B.8). Considérese la modificación de F_o mostrada en la ecuación (B.28) donde $\sigma \in [0, 1]$ se conoce como el *parámetro de centrado*.

$$F_{\sigma\mu}(x, y, s) = \begin{pmatrix} Ax - b \\ A'y + s - c \\ XSe - \sigma\mu e \end{pmatrix} \quad (\text{B.28})$$

Cuando $\sigma=0$, se puede recuperar F_o de (B.21). Para algunos valores fijos no negativos de σ y μ , la solución de $F_{\sigma\mu}(x,y,s)=0$ es un punto del camino central C . Cuando se trata a σ y μ como parámetros fijos, el Jacobiano de $F_{\sigma\mu}$ es el mostrado en la ecuación (B.29), que como puede verse es el mismo que el mostrado en la ecuación (B.22) para F_o , ya que la única diferencia entre ambos es el vector constante $\sigma\mu e$ en la tercera componente de $F_{\sigma\mu}$.

$$J_{\sigma\mu}(x, y, s) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A' & I \\ S & 0 & X \end{pmatrix} \quad (\text{B.29})$$

Los métodos *Long Step-Path-Following* (LPF) generan cada paso mediante la aplicación del método de Newton a $F_{\sigma\mu}(x,y,s)$, con μ fijado a $x's/n$ para el valor actual de (x,y,s) y para algunos valores de σ cuidadosamente escogidos. Además, dichos métodos calculan la dirección de búsqueda de tal forma que todas las iteraciones se mantengan en la vecindad de $\mathcal{N}(\gamma)$. Nótese que esta condición significa que el punto inicial debe pertenecer a $\mathcal{N}(\gamma)$, y en particular, que se deben satisfacer las condiciones $Ax_o-b=0$ y $A'y_o+s=c$. El algoritmo B.1 muestra el pseudocódigo para la implementación de dicho método. El algoritmo tiene una complejidad polinómica. Dado un ε

suficientemente pequeño y un punto de partida razonable, el método converge hacia un punto factible, cercano al punto (x,y,s) óptimo con $x's < \epsilon$ en $O(n \cdot \log(1/\epsilon))$ iteraciones. Unos valores razonables para las constantes involucradas en dicho algoritmo son $\gamma=10^{-4}$, $\sigma_{min}=0.01$ y $\sigma_{max}=0.5$.

Algoritmo B.1: Long-Step Path-Following (LPF).

(1) Tomar $\gamma \in (0,1)$ y σ_{min} y σ_{max} tal que $0 < \sigma_{min} < \sigma_{max} < 1/2$

(2) Tomar un punto inicial $(x^0, y^0, s^0) \in \mathcal{N}(\gamma)$.

(3) **for** $k=0,1,2,\dots$

(4) Tomar $\sigma_k \in [\sigma_{min}, \sigma_{max}]$.

(5) Resolver para $(\Delta x^k, \Delta y^k, \Delta s^k)$ el sistema

$$\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A' & I \\ S^k & 0 & X^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x^k \\ \Delta y^k \\ \Delta s^k \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} Ax^k - b \\ A'y^k + s^k - c \\ X^k S^k e - \sigma_k \mu_k e \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ X^k S^k e - \sigma_k \mu_k e \end{pmatrix}$$

donde $\mu_k = (x^k)' s^k$, $X^k = \text{diag}(x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k)$, etc...

(6) Tomar α_k como el mayor valor en el rango $(0, 1]$ tal que:

$$(x^k, y^k, s^k) + \alpha_k (\Delta x^k, \Delta y^k, \Delta s^k) \in \mathcal{N}(\gamma)$$

(7) Fijar $(x^{k+1}, y^{k+1}, s^{k+1}) = (x^k, y^k, s^k) + \alpha_k \cdot (\Delta x^k, \Delta y^k, \Delta s^k)$

(8) **end**

Lo ideal sería que el algoritmo fuese escogiendo una secuencia de parámetros de centrado σ_k con el objetivo de ir reduciendo el gap dual hasta cero (lo que implica σ_k cercanos a cero) mientras que al mismo tiempo se fuese manteniendo la longitud de los correspondientes pasos cercanos a 1 (lo que es más probable que ocurra cuando σ_k es cercano a 1). Los resultados teóricos son bastante flexibles a este respecto ya que la estimación vista para el número de iteraciones es aplicable aun sin importar como se tome σ_k . En general, una buena elección es tomar un mayor valor de σ_k en la iteración actual que el utilizado en la anterior cuando la longitud del paso α_k fue cercana a 1 en la misma. Cuando, por otro lado, el algoritmo se vio forzado a tomar un pequeño valor de α_k en la última iteración, tiene sentido reducir el valor de σ_k en la iteración presente para generar una dirección de búsqueda “menos ambiciosa”, ya que en este caso será más probable obtener una longitud de paso cercana a 1. Debido a los parámetros manejados por este tipo de métodos existe un gran número de posibilidades a la hora de experimentar con diferentes heurísticas. Recuérdese aquí que el algoritmo LPF requiere un punto de partida (x^0, y^0, s^0) primal-dual

estrictamente factible, en particular, que satisfaga las condiciones $Ax^0-b=0$ y $A'y^0+s^0-c=0$. Es posible englobar los problemas primal y dual en un par primal-dual con una o dos variables extra, de tal forma que el escoger un punto inicial para el problema expandido sea más sencillo.

Otra alternativa, más práctica y popular, es extender el algoritmo LPF para obtener otro tipo de algoritmos que no requieran en cumplimiento de las condiciones $Ax^0-b=0$ y $A'y^0+s^0-c=0$, aunque si requieren del cumplimiento de $x>0$ y $s>0$. Estos algoritmos se denominan *Infeasible Path-Following* (ILP). En ellos, las direcciones de búsqueda se encuentran de la misma forma que en los algoritmos LPF, y la longitud del paso α_k es escogida para asegurar que ninguno de los productos $x_i \cdot s_i$ tienda a cero de forma prematura. La definición de vecindad $\mathcal{N}(\gamma)$ puede ser en este caso extendida para incluir puntos no factibles. Estrictamente hablando, un punto (x,y,s) está en esta vecindad extendida si $(x,s)>0$ y si la medida de dicha infactibilidad satisface la condición mostrada en la ecuación (B.30), donde $M>0$ es una constante dada. En otras palabras, la infactibilidad de los puntos está limitada mediante el gap dual. Esta condición asegura que la infactibilidad de los puntos tienda a cero a medida que se aproxima a la solución.

$$\begin{aligned} \|Ax - b\| &\leq Mx's \\ \|A'y + s - c\| &\leq Mx's \end{aligned} \tag{B.30}$$

La especificación precisa de un método ILP con complejidad polinómica es costosa. El algoritmo B.2 muestra el pseudocódigo para la implementación de una variante de dicho método cercana a la versión teórica válida y que generalmente resulta bastante buena en la práctica. Unos valores razonables para las constantes involucradas en dicho algoritmo son $\gamma=10^{-2}$, $\sigma_{min}=0.01$ y $\sigma_{max}=0.5$.

Algoritmo B.2: Infeasible Path-Following.

- (1) Tomar $\gamma \in (0,1)$ y σ_{min} y σ_{max} tal que $0 < \sigma_{min} < \sigma_{max} < 1/2$
- (2) Tomar un punto inicial (x^0, y^0, s^0) con $x^0 > 0$ y $s^0 > 0$ y $x_i^0 s_i^0 \geq \gamma \mu_0$
- (3) **for** $k=0,1,2,\dots$
- (4) Tomar $\sigma_k \in [\sigma_{min}, \sigma_{max}]$
- (5) Resolver para $(\Delta x^k, \Delta y^k, \Delta s^k)$ el sistema:

$$\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A' & I \\ S^k & 0 & X^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x^k \\ \Delta y^k \\ \Delta s^k \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} Ax^k - b \\ A'y^k + s^k - c \\ X^k S^k e - \sigma_k \mu_k e \end{pmatrix}$$

donde $\mu_k = (x^k)' s^k$, $X^k = \text{diag}(x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k)$, etc...

- (6) Tomar α_{max} como el mayor valor en el rango $(0, 1]$ tal que:
- $$(x^k, s^k) + \alpha_k (\Delta x^k, \Delta s^k) \geq 0$$
- (7) Fijar $\alpha_k = \min(1, (1-\gamma) \cdot \alpha_{max})$
- (8) Fijar $(x^{k+1}, y^{k+1}, s^{k+1}) = (x^k, y^k, s^k) + \alpha_k \cdot (\Delta x^k, \Delta y^k, \Delta s^k)$
- (9) **end**
-

B.3.3 Algoritmo de Mehrotra

Las implementaciones de métodos de Punto Interior experimentaron un mayor refinamiento entre 1988 y 1991, y en 1992 Mehrotra publicó un artículo [Mehr92] describiendo una implementación altamente efectiva que aún hoy en día es la base de los modernos códigos de Punto Interior. El algoritmo de Mehrotra es similar al algoritmo IPF, pero incorpora una serie de modificaciones y heurísticas para mejorar el comportamiento del código para un amplio abanico de problemas. A continuación se detallan alguno de los puntos incorporados por dicho algoritmo:

1. Incorpora una ingeniosa técnica para la elección del parámetro de centrado σ_k en cada iteración. El método comienza evaluando la efectividad del paso correspondiente al *Affine-Scaling*, obtenido al hacer $\sigma_k=0$ en el sistema mostrado en el algoritmo IPF. Si es posible tomar una longitud de paso cercana a 1 en la dirección obtenida sin violar las condiciones de positividad en x y s , el método concluye que es necesario un centrado relativamente pequeño, por lo que fija σ_k en un valor cercano a cero. Si por el contrario, tan solo es posible avanzar una pequeña cantidad a lo largo de la dirección obtenida en el paso *Affine-Scaling* sin violar las condiciones de positividad, el método concluye que es necesario un centrado significativo, por lo que fijará σ_k en un gran valor.
2. Incorpora una componente “correctora”. El método obtiene su dirección de búsqueda resolviendo el sistema mostrado en la ecuación (B.31) donde ΔX^k_{aff} y ΔS^k_{aff} son matrices diagonales construidas a partir de las componentes de x y s ya calculadas en el paso correspondiente a la obtención de la dirección *Affine-Scaling*. La motivación de esta componente adicional en la parte derecha del sistema procede de variantes del método de Newton de mayor orden, en las cuales se reemplaza el modelo usualmente lineal.

$$\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A' & I \\ S^k & 0 & X^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x^k \\ \Delta y^k \\ \Delta s^k \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} Ax^k - b \\ A'y^k + s^k - c \\ X^k S^k e - \sigma_k \mu_k e + \Delta X^k_{aff} \Delta S^k_{aff} e \end{pmatrix} \quad (B.31)$$

3. Incorpora una heurística para la elección del punto de partida (x^0, y^0, s^0) , basada en un ajuste por mínimos cuadrados de las condiciones de factibilidad $Ax=b$ y $A'y+s=c$, y de tal forma que se asegure que x y s sean suficientemente positivos. Para propósitos de análisis teóricos de la convergencia, es suficiente tomar un punto de partida de la forma $(x^0, y^0, s^0)=(\beta e, 0, \beta e)$ siendo β algún valor positivo grande. Sin embargo, este ingenuo punto de partida fracasa al converger a la solución en ocasiones contadas, mientras que la heurística del algoritmo de Mehrotra proporciona un comportamiento mucho más robusto.
4. Incorpora una heurística para determinar la fracción de α_{max} a usar en el cálculo de α_k en cada iteración. En el algoritmo ILP se vio como esta fracción era $(1-\gamma)$, que típicamente vale 0.99 ó 0.999. Sin embargo, se puede conseguir una mayor eficiencia permitiendo que dicha fracción se aproxime a 1 a medida que se va alcanzando la solución. El algoritmo de Mehrotra describe una forma sistemática para hacer esto. A menudo, acompañando a la elección de σ_k , resulta un gran descenso del valor de μ en las iteraciones siguientes y una rápida convergencia en las etapas finales. En algunos problemas, esta rápida convergencia permite obtener una excelente aproximación a la solución antes de que cuestiones numéricas asociadas con la resolución del sistema (B.31) comiencen a ser problemáticas, cosa que suele ocurrir en las últimas iteraciones.

El mayor coste en la implementación del algoritmo de Mehrotra se encuentra en la resolución de los dos sistemas de ecuaciones involucrados en el mismo, el sistema de la ecuación (B.31) con $\sigma_k=0$ para obtener al paso *Affine-Scaling* y el mismo sistema con $\sigma_k \neq 0$ para obtener la dirección de búsqueda. Ambos sistemas tienen la misma matriz de coeficientes, por lo que sólo se requiere una única factorización de la misma en cada iteración. Esta cuestión se discute más detalladamente en la sección siguiente. Otra causa de coste computacional, a menudo de menor importancia, es la asociada con el cálculo de α_{max} . El coste del ajuste por mínimos cuadrados en la obtención del punto de partida es aproximadamente equivalente al coste de una iteración del método de Punto Interior.

B.4 Aspectos prácticos para la implementación

La operación principal en cada paso de un método de Punto Interior primal-dual consiste en la resolución del sistema mostrado en la ecuación (B.32), donde S y X son matrices diagonales con elementos positivos. En algoritmos tales como el de Mehrotra

podría ser necesario resolver este sistema más de una vez en cada iteración, con la misma matriz de coeficientes pero diferentes componentes en la parte derecha.

$$\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A' & I \\ S & 0 & X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_b \\ r_c \\ r_{xs} \end{pmatrix} \quad (\text{B.32})$$

Un aspecto crítico es la resolución del sistema (B.32) de forma eficiente, ya que incluso para prácticos problemas lineales, la matriz de coeficientes suele ser bastante grande. Además, la matriz de restricciones A , y por tanto toda la matriz del sistema (B.32), suele ser dispersa, por lo que debe utilizarse software para el manejo del álgebra de matrices dispersas si se quiere resolver dicho sistema de forma eficiente. Afortunadamente, MATLAB incorpora algunos resolutores dispersos, por lo que es posible implementar un algoritmo de Punto Interior únicamente en MATLAB de forma sencilla, algo que no es posible para el método Simplex. C++ también dispone de librerías para matrices dispersas con los correspondientes resolutores para el tipo de sistemas en los que éstas aparecen.

Aunque es posible aplicar un resolutor disperso directamente sobre el sistema (B.32), es preferible hacerlo sobre otro sistema alternativo obtenido explotando su estructura. Para ello, se comienza escribiendo el tercer bloque de ecuaciones del sistema (B.32) de la forma mostrada en la ecuación (B.33).

$$S\Delta x + X\Delta s = r_{xs} \quad (\text{B.33})$$

Expresando s en función de x mediante la ecuación (B.34), sustituyendo dicho valor en la segunda ecuación $A'\Delta y + \Delta s = r_c$ de (B.32), e intercambiando el primero y segundo bloques del sistema, el sistema (B.32) se puede reescribir de la forma equivalente mostrada en (B.35).

$$\Delta s = -X^{-1}S\Delta x + X^{-1}r_{xs} \quad (\text{B.34})$$

$$\begin{pmatrix} -X^{-1}S & A' \\ A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_c - X^{-1}r_{xs} \\ r_b \end{pmatrix} \quad (\text{B.35})$$

La matriz de este sistema es simétrica indefinida. Existen resolutores que explotan este hecho y por tanto factorizan el sistema usando una menor capacidad de almacenamiento y menor número de operaciones aritméticas que las necesarias para un sistema no simétrico del mismo tamaño. Nótese que $X^{-1}S$ es también una matriz

diagonal con elementos positivos e inversa $S^{-1}X$, por lo que puede utilizarse la primera ecuación de (B.35) para eliminar Δx de la forma mostrada en la ecuación (B.36).

$$\Delta x = -S^{-1}X(r_c - X^{-1}r_{xs} - A\Delta y') \quad (\text{B.36})$$

Sustituyendo en la segunda ecuación de (B.35), se obtiene el sistema mostrado en la ecuación (B.37) que ya sólo involucra a Δy . Esta forma de escribir el sistema se conoce como *forma normal del sistema* de ecuaciones.

$$A(S^{-1}X)A'\Delta y = r_b + AS^{-1}X(r_c - X^{-1}r_{xs}) \quad (\text{B.37})$$

La mayoría de los códigos de Punto Interior calculan la matriz $A(S^{-1}X)A'$ en cada iteración, que es un sistema definido positivo y simétrico ya que A tiene rango completo. Nótese que esta matriz necesita ser recalculada en cada iteración, ya que las matrices diagonales X y S son diferentes de una iteración a otra. Por ejemplo, se puede utilizar la factorización de Cholesky para obtener las matrices triangular inferior L y de permutación P verificando la condición (B.38), a partir de las cuales llevar a cabo las sustituciones hacia delante y hacia atrás para obtener la solución Δy de (B.37), construir entonces Δx a partir de la ecuación (B.36), y obtener finalmente Δs utilizando la fórmula (B.34).

$$LL' = PA(S^{-1}X)A'P' \quad (\text{B.38})$$

B.5 Punto Interior vs Simplex

¿Cómo se pueden comparar los métodos de Punto Interior en cuanto a tiempo de ejecución se refiere con el método Simplex? Ninguno de los métodos es más rápido que el otro para todos los problemas. Más aun, la eficiencia práctica de ambos métodos depende fuertemente de los detalles de implementación. El número de iteraciones requeridas por un método de Punto Interior está típicamente entre las 10 y las 100, mucho menor que las $2n$ o $3n$ iteraciones típicamente requeridas por el método simplex, en donde n es el número de variables primales. Sin embargo, cada iteración del método de Punto Interior es considerablemente más costosa que la correspondiente a la del método Simplex.

En los métodos de Punto Interior, la operación crítica es la factorización de la matriz dispersa mostrada en (B.38). Dependiendo de la estrategia de ordenamiento escogida (diferente elección en la permutación de la matriz P) el tiempo empleado en

dicha factorización puede variar dramáticamente. Además, hay que modificar una implementación basada en la ecuación (B.37) en el caso de que A contenga columnas densas, ya que estas podrían producir “sustituciones” inaceptables en el producto $A(S^{-1}X)A'$. Existen diferentes implementaciones que manejan estas características de diferente forma.

Como una regla general, los métodos de Punto Interior son competitivos con los Simplex, y a menudo, más rápidos en grandes problemas lineales. Para el caso de problemas pequeños, el método Simplex es normalmente más rápido. Por ello, los métodos de Punto Interior suelen encontrarse en el área denominada *Large-Scale Optimization*.

Publicaciones

Revistas internacionales

- [1] A. Herrán González, J.M. de la Cruz, B. de Andrés-Toro and J.L. Risco Martín. *Modelling And Simulation Of A Gas Distribution Pipeline Network*. Applied Mathematical Modelling, Elsevier. ISSN 0307–904X, ACEPTADO, 2008.
- [2] J.L.Risco Martín, J.M. de la Cruz García, B. de Andrés-Toro y A. Herrán González. *Entorno gráfico de modelado para problemas de optimización de sistemas a gran escala*. Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial: Control, Automatización, Robótica, Tiempo real. ISSN: 1697–7912. 2(4):89–100, 2005.
- [3] J.M. de la Cruz, A. Herrán, J. L. Risco and B. de Andrés-Toro. *Hybrid Heuristic and Mathematical Programming in Oil Pipelines Networks: Use of immigrants*. Journal of Zhejiang University SCIENCE. ISSN 1009–3095, 6A(1):9–19, 2005.

Congresos internacionales

- [4] J.M. de la Cruz, J.L. Risco, A. Herrán and P. Fernández Blanco. *Hybrid Heuristic and Mathematical Programming in Oil Pipelines Networks*. 2004 Congress on Evolutionary Computation. Session GS–C1: “Multiobjective Evolutionary Algorithms”. Track 5.4. “Computational Platforms for Automated Manufacturing Systems’ Engineering”, 1:1479–1486, 2004.
- [5] J.M. de la Cruz, B. de Andrés-Toro, A. Herrán, E. Besada Porta and P. Fernández Blanco. *Multiobjective Optimization of the Transport in Oil Pipelines Networks*. 9th IEEE International Conference on Emerging Technologies and Factory Automation. Presented on Track 5.4. “Computational Platforms for Automated Manufacturing Systems’ Engineering”, 1:566–573, 2003.

Revistas nacionales

- [6] A. Herrán González, J.M. de la Cruz y B. de Andrés-Toro. *Estrategias de control en redes de distribución mediante conductos*. Anales de Ingeniería Técnica en Informática de Sistemas. CES Felipe II. ISBN: 978-84-935511-2-4. 1:69-82, 2007.
- [7] J.L. Risco, A. Herrán, J.M. de la Cruz y B. de Andrés-Toro. *Estrategias de funcionamiento en una red dedistribución de gas: Optimización multiobjetivo*. Revista Ingeniería Química, Editorial ALCION, 421:79-86, 2005.

Congresos nacionales

- [8] A. Herrán, J.M. de la Cruz, Fantahum Defersha and Mingyuan Chen. *Planning of Petroleum Derivatives in Pipeline Transportation Systems using Genetic Algorithms*. 2006 Joint Conference of the Canadian Operation Research Society and Optimization days. Presented on Session WC5: "Metaheuristics II", 2006.

Enviados

- [9] Fantahun M. Defersha, PhD; Alberto H. González; Mingyuan Chen, PhD; J. M. Garcia, PhD. *A mathematical model for integrating production planning and transportation of multiple petroleum products in a single-pipeline system*. ENVIADO A International Journal of Production Research, 2007.

Bibliografía

- [ABQRW99] F. Allgöwer, T.A. Badgwell, J.S. Qin, J.B. Rawlings and S.J. Wright. *Nonlinear Predictive Control and Moving Horizon Estimation – An Introductory Overview*. In *Advances in Control*, P.M. Frank (Ed.), Springer, 1999.
- [AL96] E.H. Aarts and J.K. Lenstra. *Local Search in Combinatorial Optimization*. Wiley, 1996.
- [AP73] S. Ashour and N. Pai. *An algorithmic approach for scheduling a multi-product pipeline system*. *International Journal of System Science*, 4(2):149–166, 1973.
- [AT00] E. Alba and J.M. Troya. *Influence of the migration policy in parallel distributed GAs with structured and panmictic populations*. *Applied Intelligence*, 12:163–181, 2000.
- [Ayl80] S. Aylmer. *Interactive Gas Flow Analysis, Ph.D Thesis*. The University of Manchester Institute of Science and Technology, 1980.
- [AZ00] F. Allgöwer and A. Zheng (Eds.). *Nonlinear Model Predictive Control*. Birkhäuser 2000.
- [Aze92a] R. Azencott. *Parallel simulated annealing: an overview of basic techniques*. In Robert Azencott (Ed.), *Simulated Annealing: Parallelization Techniques*. John Wiley and Sons, New York, 25–35, 1992a.
- [Aze92b] R. Azencott. *Sequential simulated annealing: speed of convergence and acceleration techniques*. In Robert Azencott (Ed.), *Simulated Annealing: Parallelization Techniques*. John Wiley and Sons, New York, 1–9, 1992b.
- [BCH61] E.H. Batey, H.R. Courts and K.W. Hannah. *Dynamic approach to gas-pipeline analysis*. *Oil Gas Journal*, 59:65–78, 1961.
- [Ber99] D.P. Bertsekas. *Nonlinear Programming*. Athena Scientific, 2nd Ed., 1999.

- [Ber00] D.P. Bertsekas. *Dynamic Programming and Optimal Control, Vol. I and II*. Athena Scientific, 2000.
- [Bie98] L.T. Biegler. *Advances in nonlinear programming concepts for process control*. International Journal of Process Control, 8(5–6):301–311, 1998.
- [BJS90] M.S. Bazaraa, J.J. Jarvis and H.D. Sherali. *Linear Programming and Network Flows*. Wiley, New York, 394–418, 1990.
- [BMM00] A. Bemporad, D. Mignone and M. Morari. *Moving Horizon Estimation for Hybrid Systems and Fault Detection*. Proceedings of the 1999 American Control Conference, San Diego, CA, 1999.
- [BMS69] F.T. Brown, D.L. Margolis and R.P. Shah. *Small amplitude frequency behaviour of fluid lines with turbulent flow*. J. Basic Eng. Trans. ASME Series D, 91:678–692, 1969.
- [CAHPB03] J.M. De la Cruz, B. De Andrés–Toro, A. Herrán, E.B. Porta and P.F. Blanco. *Multiobjective Optimization of the Transport in Oil Pipelines Networks*. Proceedings of the 2003 Emerging Technologies and Factory Automation, 2:566–573, 2003.
- [CB99] E.F. Camacho and C. Bordons. *Model predictive control*. London, Springer, 1999.
- [CC88] T.S. Chiang and T. Chow. *On the convergence rate of annealing processes*. SIAM Journal on control and optimization, 26:1455–1470, 1988.
- [CC03] D.C. Calfaro and J. Cerdá. *A Continuous–Time Approach to Multiproduct Pipeline Scheduling*. Computer–Aided Chemical Engineering, 65–73, 2003.
- [CC04] D.C. Cafaro and J. Cerdá. *Optimal scheduling of multiproduct pipeline systems using a non–discrete MILP formulation*. Computers & Chemical Engineering, 28:2053–2068, 2004.
- [Chi01a] P.D. Christofides. *Control of Nonlinear Distributed Process Systems: Recent Developments and Challenges*. AIChE Journal, vol. 47, n° 3, 514–518, 2001a.

- [Chi01b] P.D. Christophides. *Nonlinear And Robust Control of PDE Systems: Methods and Applications to Transport–Reaction Processes*. Birkhäuser, 2001b.
- [CRGF04] J.M. Cruz, J.L. Risco–Martín, A.H. González, P. Fernández. *Hybrid Heuristic Mathematical Programming in Oil Pipelines Networks*. *Evolutionary Computation*, 2:1479–1486, 2004.
- [CRLSR01] J.M. Cruz, J.J. Ruz, J.A. López–Orozco, F. Saenz, J.L. Risco. *Informe Final Siglo–Enagas*. Universidad Complutense, 2001.
- [CRTR90] E.F. Camacho, M.A. Ridao, J.A. Ternero and J.M. Rodríguez. *Optimal Operation of Pipeline Transportation Systems*. *Control of Transportation Systems*, 5:455–460, 1990.
- [CS96] E. Camponogara and P.S. De Souza. *A–Teams for Oil Transportation Problem through Pipelines*. *Information Systems Analysis and Synthesis, Proceedings of the International Conference of Information Systems Analysis and Synthesis, Orlando, 718–725, 1996*.
- [DD03] K. Dowsland and B.A. Díaz. *Diseño de heurísticas y fundamentos del recocido simulado*. *Inteligencia Artificial. Revista Iberoamericana de Inteligencia Artificial*, 19:93–102, 2003.
- [EQS99] L.F. Escudero, F.J. Quintana and J. Samerón. *CORO, a modelling and an algorithmic framework for oil supply transformation and distribution optimization under uncertainty*. *European Journal of Operational Research*, 114:638–656, 1999.
- [FC01] N.H. Farra and P.D. Christofides. *Integrating Robustness, Optimality and Constraints in Control of Nonlinear Processes*. *Chemical Engineering Science*, 56:1841–1868, 2001.
- [Fel75] C.A. De Felice. *A Discrete Deterministic Pipeline Flow Simulation With Online Scheduler Interface to Solve Dynamic Batch Scheduling Problems*. *Winter Computer Simulation Conference*, 1975.
- [Flo95] C.A. Floudas. *Nonlinear and Mixed–Integer Optimization*. Oxford University Press, 1995.

- [FO03] J. Forrest and M. Oettli. *Rigorous simulation supports accurate refinery decisions*. In I. E. Grossmann & C. M. McDonald (Eds.), Proceedings of fourth international conference on foundations of computers-aided process operations, Coral Springs, CAChE, 273-280, 2003.
- [FS69] T.E. Flukinger and R. Smith. *Liquid Pipeline Scheduling and Control with an On-Line Multiprogrammer Process Computer*. IEEE Transactions on Industry and General Applications, 5(4):389-402, 1969.
- [GF89] M.H. Goldwater and A.E. Fincham. *Modelling of gas supply systems*. Cambridge University Press, 1989.
- [GL97] F. Glover and M. Laguna. *Tabu Search*. Kluwer, 1997.
- [GM03] F. Glover y B. Melián. *Búsqueda tabú. Inteligencia Artificial*. Revista Iberoamericana de Inteligencia Artificial, 19:29-48, 2003.
- [GS01] G.O. Guardabassi and S.M. Savaresi. *Approximate linearization via feedback-an overview*. Automatica, 37:1-15, 2001.
- [GW93] V. Gordon and D. Whitley. *Serial and parallel genetic algorithms as function optimizers*. Proceedings of the Fifth International Conference on Genetic Algorithms, edited by S. Forrest. Morgan Kaufmann, San Mateo, CA, 177-183, 1993.
- [Han00] A. Hansson. *A Primal-Dual Interior-Point Method for Robust Optimal Control of Linear Discrete-Time Systems*. IEEE Transactions on Automatic Control, 45(9): 1639-1655, 1989.
- [Hen89] P.V. Hentenryck. *Constraint Satisfaction in Logic Programming*. MIT Press, 1989.
- [HLRP00] S.J. Honkomp, S. Lombardo, O. Rosen and J.F. Pekin. *The Curse of Reality - why process scheduling optimization problems are difficult in practice*. Computers and Chemical Engineering, 24:323-328, 2000.
- [HR93] C.A. Hane and H.D. Ratliff. *Sequencing inputs to multi-commodity pipelines*. Annals of Operations Research, 57:77-109, 1993.

- [HS97] M.A. Henson and D.E. Seborg. *Nonlinear Process Control*. Prentice Hall, 1997.
- [HSV92] Y.C. Ho, R.S. Sreenivas and P. Vakili. *Ordinal Optimization of DEES*. *Discrete Event Dynamic Systems: Theory and Applications*, 2:61–88, 1992.
- [HVG00] I. Harjunoski, J. Vipul and I.E. Grossmann. *Hybrid mixed-integer /constraint logic programming strategies for solving scheduling and combinatorial optimization problems*. *Computers and Chemical Engineering*, 24:337–343, 2000.
- [ILO03] ILOG Inc. 2003. *ILOG OPL Studio 3.6 Users Manual*. <http://www.ilog.com>, 1080 Linda Vista Ave. Mountain View, CA 94043
- [KBK83] W.H. Kwon, A.M. Bruckstein and T. Kailath. *Stabilizing State Feedback Design via the Moving Horizon Method*. *International Journal of Control*, 37:631, 1983.
- [KGV83] S. Kirkpatrick, C.D. Gelatt and M.P. Vecchi. *Optimization by simulated annealing*. *Science*, 220:671–680, 1983.
- [Kre99] J. Krener. *Feedback Linearization*. In *Mathematical Control Theory*, J. Baillieul and J.C Willens (Eds.), Springer, 1999.
- [KSS66] S.V.A. Kirillin, V.V. Sychev and A.E. Sheindlin. *Gas Engineers Handbook*. The Industrial Press, New York, 1966.
- [KT00] S.L. Ke, H.C. Ti. *Transient analysis of isothermal gas flow in pipeline network*. *Chemical Engineering Journal*, 76:169–177, 2000.
- [LE92] C. Ling and T.F. Edgar. *A new fuzzy gain scheduling algorithm for process control*. *Proceedings of the American Control Conference*, 2284–2290, 1992.
- [Len90] T. Lengauer. *Combinatorial Algorithms for Integrated Circuit Layout*. John Wiley and Sons. Chapter 8, 427–446, 1990.
- [LGM03] M. Laguna, F. Glover and R. Martí. *Scatter search and path relinking: Advances and applications*. In F. Glover and G. Kochenberger (Eds), *Handbook on MetaHeuristics*, chapter 1, 2003.

- [Lim02] D. Limón Marruedo. *Control predictivo de sistemas no lineales con restricciones: estabilidad y robustez, Tesis Doctoral*. Escuela superior de ingenieros de la Universidad de Sevilla, septiembre, 2002.
- [Liu01] J. Liu. *Autonomous Agents and Multi-Agent Systems: Explorations in Learning Self-Organization, and Adaptive Computation*. Singapore: World Scientific, 2001.
- [LJT02] J. Liu, H. Jing and Y.Y. Tang. *Multi-agent oriented constraint satisfaction*. Artificial Intelligence, 136(1):101–144, 2002.
- [LL96] S.Y. Lee and K.G. Lee. *Synchronous and asynchronous parallel simulated annealing with multiple markov chains*. IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems, 7:903–1007, 1996.
- [LL02] J.A. Lozano and P. Larrañaga. *Estimation of Distribution Algorithms. A New Tool for Evolutionary Computation*. Kluwer Academic, 2002.
- [LLM03] P. Larrañaga, J.A. Lozano y H. MÄuhlenbein. *Algoritmos de estimación de distribuciones en problemas de optimización combinatoria. Inteligencia Artificial*. Revista Iberoamericana de Inteligencia Artificial, 19:149–168, 2003.
- [LMS03] H.R. Lourenço, O. Martin and T. StÄutzle. *Iterated local search*. In F. Glover and G.G. Kochenberger (Eds), Handbook of Metaheuristics, chapter 11. Kluwer Academic Publishers, 2003.
- [LW71] R.E. Larson and D.A. Wismer. *Hierachical Control of Transient Flow in Natural Gas Pipeline Networks*. IFAC Symposium on Distributed Parameter Systems, Banff, Alberta, Canada, 1971.
- [MAN04] L. Magatao, L.V. Arruda and F. Neves Jr. *A mixed integer programming approach for scheduling commodities in a pipeline*. Computers & Chemical Engineering, 28:171–185, 2004.
- [Mar03] R. Martí. *Multistart methods*. In Fred Glover and Gary A. Kochenberger (Eds.), Handbook of Metaheuristics, Kluwer Academic, 355–368, 2003.
- [May01] D.Q. Mayne. *Control of constrained dynamic systems*. European Journal of Control, 7:87–99, 2001.

- [MB01b] M. Morari and A. Bemporad. *Tutorial Session: Optimization-Based Hybrid Control Tools*. American Control Conference, ACC 2001, Arlington, VA . 2001b.
- [MC02] V. Manousiouthakis and D.J. Chmielewski. *On Constrained Infinite-Time Nonlinear Optimal Control*. Chemical Engineering Science, 57:105–114, 2002.
- [MCP03] P. Moscato y C. Cotta-Porras. *Una introducción a los algoritmos meméticos*. Inteligencia Artificial. Revista Iberoamericana de Inteligencia Artificial, 19:131–148, 2003.
- [Mei98] C. Meise. *On the convergence of parallel simulated annealing*. Stochastic Processes and their Applications, 76:99–115, 1998.
- [MG97] A.R. Mitchell and D.F. Griffiths. *The finite difference method in partial differential equations*. John Wiley and Sons, Chichester, 1997.
- [MG01a] M. Morari and A. Gentilini. *Challenges and Opoortunities in Process Control: Biomedical Processes*. AIChE Journal, 47(10):2140–2143, 2001a.
- [Mie99] H. Miettinen. *Nonlinear Multiobjective Optimization*, Kluwer, 1999.
- [ML99] M. Morari and J.H. Lee. *Model Predictive Control: Past, Present And Future*. Computers & Chemical Engineering, 23:667–682, 1999.
- [ML03] R. Martí y M. Laguna. *Scatter search: Diseño básico y estrategias avanzadas*. Inteligencia Artificial. Revista Iberoamericana de Inteligencia Artificial, 19:123–130, 2003
- [MM88] D. Marques and M. Morari. *On-line optimisation of gas pipelines networks*. Automatica, 24:455–469. 1988.
- [MM03] R. Martí y J.M. Moreno. *Métodos Multiarranque*. Inteligencia Artificial. Revista Iberoamericana de Inteligencia Artificial, 19:49–60, 2003.
- [Mos99] P. Moscato. *Memetic algorithms: A short introduction*. In D. Corne, M. Dorigo, and F. Glover (Eds.), *New Ideas in Optimization*, McGraw-Hill, 219–234, 1999.

- [MPL02] R.L. Milidiú, A.A. Pessoa and E.S. Laber. *Pipeline Transportation of Petroleum with No Due Dates*. Proceedings of the 5th Latin American Symposium on Theoretical Informatics, 248–262, 2002.
- [MPL03] R.L. Milidiú, A. Pessoa and E. Laber. *The complexity of makespan minimization for pipeline transportation*. Theoretical Computer Science, 306(1–3):339–351, 2003.
- [MRRTT53] N. Metropolis, A. Rosenbluth, M. Rosenbluth, A. Teller and E. Teller. *Equations of state calculations by fast computing machines*. Journal of Chemical Physics, 21:1087–1092, 1953.
- [MRRS00] D.Q. Mayne, J.B. Rawlings, C.V. Rao and P.O. Scokaert. *Constrained model predictive control: Stability and optimality*. Automatica 36:789–814, 2000.
- [MS99] K. Marriot and P.J. Stuckey. *Introduction to Constraint Logic Programming*. MIT Press, 1999.
- [MV02] P.M. Mäkilä and P. Viljamaa. *Linear Programming Based Gain Scheduling for LPV and PL Systems*. 15th IFAC World Congress, 2002.
- [MWB94] G. McMillan, W. Wojsznis and G. Borders. *Flexible gain scheduler*, ISA Trans, 33:35–41, 1994.
- [NH93a] S. Narasimhan and P. Harikuman. *A method to incorporate Bounds in Data Reconciliation and Gross Error Detection: i. the Bounded Data Reconciliation Problem*. Computers and Chemical Engineering, 17:1115, 1993a.
- [NH93b] S. Narasimhan. and P. Harikuman. *A method to incorporate Bounds in Data Reconciliation and Gross Error Detection: ii. Gross Error Detection Strategies*. Computers and Chemical Engineering, 17:1121, 1993b.
- [NP99] M. Nowostawski and R. Poli. *Parallel genetic algorithm taxonomy*. Proceedings of the Third International Conference on Knowledge-Based Intelligent Information Engineering System. Adelaide, Australia, 88–92, 1999.

- [NW99] G.L. Nemhauser and L.A. Wolsey. *Integer and Combinatorial Optimization*. John Wiley, 1999.
- [Osi82] A. Osiadacz. *Static and Dinamic Simulation of an Arbitrarily Configured Gas Transportation System* (in Polish), NOT Sigma, Warsaw, 1982.
- [Osi87] A.J. Osiadacz. *Simulation and analysis of gas pipeline networks*. E.&F.N. Spon, London, 1987.
- [Pam02] J. Pamponet. *Modelado dinámico en redes de transporte de flujo compresible para aplicar en la detección de pérdidas en tiempo real*. Bol. Téc. PETROBRAS, Rio de Janeiro, 45(2): abr./jun., 2002.
- [PCPC03] A. Pereira, F. Carvalho, J. Pedroso and M. Constantino. *Iterated local search and tabu search for a discrete lot sizing and scheduling problem*. In METAHEURISTICS: Computer Decision-Making. (Combinatorial Optimization Book Series). The Netherlands: Kluwer Academic Publishers 2003.
- [PG98] J.M. Pinto and I.E. Grossman. *Assignment and Sequencing Models for the Scheduling of Process Systems*. Annals of Operations Research, 81:433–466, 1998.
- [PK00] A. Palazoglu and L.A. Karakas. *Control of Nonlinear Distributed Parameter Systems Using Generalized Invariants*. Automatica, 36:697–703, 2000.
- [PM03] C. Cotta and P. Moscato. *A gentle introduction to memetic algorithms*. In G. Kochenberger F. Glover, editor, Handbook of Metaheuristics, Kluwer Academic Publishers, 105–144, 2003.
- [PR87] P.B. Percelll and M.J. Ryan. *Steady-state optimization of gas pipeline network operation*. In Proceedings of 19th PSIG Annual Meeting, Tulsa, OK, 1987.
- [QB93] S.J. Qin and G. Borders. *A multi-region fuzzy logic controller for controlling processes with nonlinear gains*. Proc. Int. Symp. Intell. Control, IEEE, 445–450, 1993.

- [QB97] J.Qin and T.A. Badgwell. *An overview of industrial model predictive control technology*. Proceedings of the conference on Chemical Process Control, 1997.
- [RD74] H.H. Rachford and T. Dupont Jr. *Some applications of transient flow simulation to promote understanding the performance of gas pipeline systems*. Soc. Pet. Eng. J., 14:179–186, 1974.
- [Ree03] C.R. Reeves. *Genetic algorithms*. In F. Glover and G. Kochenberger (Eds.), *Handbook on MetaHeuristics*, chapter 3, 2003.
- [RL02] D.G. Roberston and J.H. Lee. *On the Use of Constraints in Least Squares Estimation and Control*. Automatica, 2002.
- [RP03] R. Rejowski and J.M. Pinto. *Scheduling of a Multiproduct Pipeline System*. Computers & Chemical Engineering, 27:1229–246, 2003.
- [RP04] R. Rejowski and J.M. Pinto. *Efficient MILP formulations and valid cuts for multiproduct pipeline scheduling*. Computers & Chemical Engineering, 28:1511–1528, 2004.
- [RRL01] C.V. Rao, J.B. Rawlings and J.H. Lee. *Constrained Linear State Estimation—A Moving Horizon Approach*. Automatica, 37:1619–1628, 2001.
- [RR02] C.V. Rao and J.B. Rawlings. *Constrained Process Monitoring: Moving-Horizon Approach*. AIChE Journal, 48(1):97–109, 2002.
- [RWR98] C.V. Rao, S.J. Wright and J.B. Rawlings. *Application of interior-point methods to model predictive control*. Journal of Optimization Theory and Applications, 99(3):723–757, 1998
- [Sas97] M. Sasikumar. *PIPES: A heuristic Search Model for Pipeline Schedule Generation*. Knowledge Based Systems, 10:169–175, 1997.
- [Sas99] S. Sastry. *Nonlinear Systems. Analysis, Stability and Control*. Springer, 1999.
- [Sch86] A. Schrijver. *Theory of Linear and Integer Programming*. Wiley, Chichester, 1986.

- [SD02] M. Santos and A. Dexter. *Control of a cryogenic process using a Fuzzy PID scheduler*. Control Engineering Practice, 2002.
- [Sim03] Simulink, Model-Based and System-Based design. *Writing S-Functions, Version 5*. The Math Works, Inc, 2003.
- [SK95] K. Sanada and A. Kitikawa. *Robust control of a closed-loop pressure control system considering pipeline dynamics*. Transaction. of Japan Society of Mechanical Engineers, 61:3559–3566, 1995.
- [SK98] S.Y. Shvartsman and I.G. Kevrekidis. *Nonlinear Model Reduction for Control of Distributed Parameter Systems*. AIChE Journal, 44:1579–1591, 1998.
- [SM98] P.O. Scokaert and D.Q. Mayne. *Min-max feedback model predictive control for constrained linear systems*. IEEE Transactions on Automatic Control 43(8):1136–1142, 1998.
- [Spa86] D.J. Sparrow. *Computer Aided Scheduling of Multiproduct Oil Pipe Lines*. Computer Assisted Decision Making. Actas del seminario UNICORN, Amsterdam, 243–251, 1986.
- [SRK69] C.G. Segeler, M.D. Ringler and E.M. Kafka. *Gas Engineers' Handbook*, AGA, NY, 1969.
- [SS89] T. Söderström and P. Stoica. *System Identification*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1989.
- [StÄ99] T. StÄutzle. *Local search algorithms for combinatorial problems analysis, algorithms and news applications*. DISKI Dissertationen zur KÄunstliken Intelligenz, 1999.
- [SW00] D.E. Shorbryns and D.C. White. *Planning, Scheduling and Control Systems: why can they not work together*. Computers and Chemical Engineering, 24:163–173, 2000.
- [Tho75] Y.A. Thomas. *Linear Quadratic Optimal Estimation and Control with Receding Horizon*. Electronic Letters, 11:19–34, 1975.
- [TT98] W.Q. Tao and H.C. Ti. *Transient Analysis of Gas Pipeline Network*. Chemical Engineering Journal, 69:47–52, 1998.

- [UCT00] V. Uraikul, C.W. Chan and P. Tontiwachwuthikul. *Development of an expert system for optimizing natural gas pipeline operations*. Expert Systems with Applications, 18:271–282, 2000.
- [Uhl65] A.E. Uhl. *Steady flow in gas pipelines*. Institute of Gas Tecnology Technical Report No. 10. American Gas Association, New York, 1965.
- [Vil00] P. Viljamaa. *Fuzzy Gain Scheduling and tuning of multivariable Fuzzy–Control methods of Fuzzy Computing in Control Systems*. Diss. Tampere Universtiy of Technology, 2000.
- [VP01] C.G. Vassiliadis and E.N. Pistikopoulos. *Maintenance Scheduling and Process Optimization Under Uncertainty*. Computers and Chemical Engineering, 25:217–236, 2001.
- [War71] A.J. Ward Smith. *Pressure losses in ducted flows*. Butterworths, London, 1971.
- [Wei78] A. Weimann. *Modellierung und Simulation der Dynamic von Gasverteilnetzen im Hinblick auf Gasnetzführung and Gasnetzüberwachung*. Dr. Ing. Thesis. Munich Technical Universtty, 1978.
- [Wen96] J.F. Wendt (Ed.). *Computational Fluid Dynamics: An Introduction*. New York, Springer–Verlag, 1996.
- [WL68] P.J. Wong and R.E. Larson. *Optimization of Natural–Gas Pipeline Systems via Dynamic Programming*. IEEE Trans. on Automatic Control, 13:n°5, 1968.
- [WRBS00] S. Wu, R.Z. Ríos–Mercado, E.A. Boyd. and L.R. Scott. *Model Relaxations for the fuel cost minimization of steady–state gas pipelines networks*. Mathematical and Computer Modelling, 31:197–220, 2000.
- [Wri93] S.J. Wright. *Interior–point methods for optimal control of discrete–time systems*. Journal of Optimization Theory and Applications, 77:161–187, 1993.
- [Wri96] S.J. Wright. *Applying new optimization algorithms to model predictive control*. Chemical Process Control–V, 1996.

- [Wri97] S.J. Wright. *Primal–Dual Interior–Point Methods*. SIAM, Philadelphia, 1997.
- [YI02] M. Yagiura and T. Ibaraki. *Local search*. In P.M. Pardalos and M.G.C. Resende (Eds.), *Handbook of Applied Optimization*, Oxford University Press, 104–123, 2002.
- [ZHM01] G.Y. Zhu, M.A. Henson and L. Megan. *Dynamic Modelling and Linear Model Predictive Control of Gas Pipeline Networks*. *Journal of Process Control*, 11:129–148, 2001.
- [ZLXJ04] W. Zhong, J. Liu, M. Xue and L. Jiao. *A Multiagent Genetic Algorithm for Global Numerical Optimization*. *IEEE transactions on systems, man, and cybernetics–part b: cybernetics*, 34(2):1128–1141, 2004.

