

**UMA METAHEURÍSTICA GRASP PARA O PLANEJAMENTO DE  
MOVIMENTAÇÃO DE GÁS NATURAL EM GASODUTOS**

**ANGELO CESAR TOZI CHRISTO**

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE – UENF**

**CAMPOS DOS GOYTACAZES – RJ**

**ABRIL – 2008**

UMA METAHEURÍSTICA GRASP PARA O PLANEJAMENTO DE  
MOVIMENTAÇÃO DE GÁS NATURAL EM GASODUTOS

**ANGELO CESAR TOZI CHRISTO**

“Dissertação apresentada ao Centro de  
Ciência e Tecnologia da Universidade  
Estadual do Norte Fluminense, como parte  
das exigências para obtenção do título de  
Mestre em Engenharia de Produção”.

Orientador: Prof. José Ramón Arica Chávez, D.Sc.

**CAMPOS DOS GOYTACAZES – RJ**

**ABRIL – 2008**

# UMA METAHEURÍSTICA GRASP PARA O PLANEJAMENTO DE MOVIMENTAÇÃO DE GÁS NATURAL EM GASODUTOS

**ANGELO CESAR TOZI CHRISTO**

“Dissertação apresentada ao Centro de  
Ciência e Tecnologia da Universidade  
Estadual do Norte Fluminense, como parte  
das exigências para obtenção do título de  
Mestre em Engenharia de Produção”.

**Aprovada em 30 de Abril de 2008**

Comissão Examinadora:

---

Prof. Geraldo Galdino de Paula Junior, D.Sc. - LEPROD/UENF

---

Prof<sup>a</sup>. Gudelia Guillermina Morales de Arica, D.Sc. - LEPROD/UENF

---

Prof. Edson Kenji Iamashita, D.Sc. – PETROBRAS (Macaé)

---

Prof. Nilo Américo Fonseca de Melo, D.Sc. – CEFET (Campos)

---

**Prof. José Ramón Arica Chávez, D.Sc. - Orientador - LEPROD/UENF**

## DEDICATÓRIA

Ao meu filho Guilherme.

À minha companheira Danielle, que esteve ao meu lado me apoiando.

À minha família, que sempre me incentivou e me deu forças para ir em frente.

## **AGRADECIMENTO**

Agradeço a Deus por sempre me guiar e proteger.

Ao meu professor e orientador José Ramón Arica Chávez, pelo incentivo, dedicação e amizade demonstrada ao longo de todo o desenvolvimento deste trabalho.

A todos os professores do LEPROD/CCT/UENF, de maneira especial ao coordenador do mestrado em Engenharia de Produção Prof. Dr. Geraldo Galdino de Paula Júnior.

Ao nobre amigo Edson Kenji Iamashita pela atenção, apoio e disponibilidade.

Aos meus amigos do mestrado e aos companheiros de viagem, de modo especial a Daniel José Ventrone Nunes pelo apoio, incentivo e companheirismo.

Aos meus colegas de mestrado Márcia Miranda Azeredo e Gilberto Mazoco Jubini que fizeram parte deste trabalho.

## SUMÁRIO

LISTA DE TABELAS .....	vii
LISTA DE FIGURAS .....	viii
RESUMO.....	ix
ABSTRACT .....	x
Capítulo 1 - INTRODUÇÃO.....	1
Capítulo 2 - MODELO DE MINIMIZAÇÃO DO CUSTO DE COMBUSTÍVEL .....	6
2.1. Modelo Clássico .....	6
2.2. Modelo Modificado .....	11
Capítulo 3 - DOMÍNIO VIÁVEL DE UMA ESTAÇÃO DE COMPRESSÃO E FUNÇÃO CUSTO DE COMPRESSÃO .....	16
3.1. Domínio Viável do Modelo Clássico .....	16
3.1.1. Domínio viável para um único compressor.....	16
3.1.2. Domínio viável para uma estação de compressão clássica .....	19
3.2. Domínio Viável Modelo Modificado .....	19
3.2.1. Aproximação do domínio viável do modelo modificado.....	21
3.3. Função de Custo Modelo Clássico.....	22
3.3.1. Função de custo de um compressor clássico.....	22
3.3.2. Função de custo de uma estação de compressão .....	23
3.4. Função de Custo Modelo Modificado .....	24
Capítulo 4 - METAHEURÍSTICA GRASP PROPOSTA.....	26
4.1. GRASP - <i>Greedy Randomized Adaptive Search Procedure</i> .....	26
4.1.1 Lista Restrita de Candidatos (LRC).....	27
4.1.2 Busca Local.....	27
4.2. Heurística GRASP para o Modelo Modificado.....	28
Capítulo 5 - PSEUDOCÓDIGO GRASP - EXEMPLOS E RESULTADOS .....	34
5.1. Pseudocódigos.....	34
5.2. Exemplo 1 .....	43
5.3. Exemplo 2 .....	44
Capítulo 6 - CONCLUSÕES.....	56
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	58
ANEXO.....	60
A.1. Conceitos da Teoria de Grafos .....	60
A.2. Algoritmo de Prim .....	61

## LISTA DE TABELAS

5.1: Pressões da Rede sem ciclo .....	44
5.2: Custos das estações de compressão .....	44
5.3: Pressões refinadas da Rede sem ciclo .....	44
5.4: Custo mínimo das estações de compressão .....	44
5.5: Fontes da Rede – exemplo 2 .....	45
5.6: Dados dos dutos – exemplo 2 (WU et al., 2000) .....	46
5.7: Possíveis configurações de fluxos para $v_4$ e $v_6$ .....	47
5.8: Primeira iteração do Algoritmo 4, ponto inicial ( $v_4 = 83$ e $v_6 = 87$ ) .....	49
5.9: Segunda iteração do Algoritmo 4, ponto inicial ( $v_4 = 92$ e $v_6 = 78$ ) .....	50
5.10: Terceira iteração do Algoritmo 4, ponto inicial ( $v_4 = 89$ e $v_6 = 81$ ) .....	51
5.11: Quarta iteração do Algoritmo 4, ponto inicial ( $v_4 = 86$ e $v_6 = 84$ ) .....	52
5.12: Quinta iteração do Algoritmo 4, ponto inicial ( $v_4 = 98$ e $v_6 = 72$ ) .....	53
5.13: Sexta iteração do Algoritmo 4, ponto inicial ( $v_4 = 65$ e $v_6 = 105$ ) .....	54
5.14: Melhor escolha de configuração de fluxo com as pressões refinadas .....	54

## LISTA DE FIGURAS

2.1: Equilíbrio de fluxo para um nó .....	7
2.2: Um exemplo de uma rede simples .....	9
2.3: Estação de compressão com $k$ compressores .....	14
2.4: Balanço de taxa de fluxo de massa em cada nó a .....	15
3.1: Relação entre $Q$ , $S$ e $H$ em um compressor .....	18
3.2: Perfil dos domínios unitários de dois tipos de compressores diferentes ( $p_s = 500$ (psia)) .....	21
3.3: Aproximação linear externa para os perfis dos domínios unitários dos compressores do tipo A e tipo B .....	22
4.1(a): Exemplo de rede de distribuição de gás e sua respectiva rede reduzida .....	29
4.1(b): Rede reduzida do exemplo acima .....	29
4.2: Eficiência $\eta$ para os compressores de tipo A e tipo B .....	33
5.1: Aproximação linear externa do contorno (arco ACBD) .....	35
5.2: Exemplo de rede sem ciclo .....	43
5.3: Exemplo de rede com ciclo – Exemplo 2 .....	45
5.4: Rede reduzida – Exemplo 2 .....	46



## RESUMO

O problema de minimizar o consumo de combustível realizado por estações de compressão para movimentar gás natural ao longo de gasodutos é complexo, os modelos são não-lineares, não-convexos, de grande porte e não diferenciáveis, dificultando ainda mais a sua resolução. O problema que envolve a movimentação do gás natural utilizando uma rede complexa de dutos é NP-Completo, (grosso modo, o número de operações que exige para chegarmos a uma solução exata do problema aumenta exponencialmente com o tamanho do problema). Neste trabalho, considerando o bom comportamento de técnicas GRASP para casos particulares do problema aqui apresentado (IAMASHITA, 2006), baseado no modelo introduzido por Jubini (2008), que generaliza o modelo apresentado por Rios-Mercado et al. (2004), ao considerar estações de compressão compostas por equipamentos não necessariamente idênticos. Formula-se uma heurística, usando a técnica GRASP, para determinar uma configuração de compressores das estações de compressão de forma a minimizar o consumo de combustível para movimentar o gás natural dos pontos de injeção aos pontos de distribuição ao longo de um gasoduto. Ao final apresentam-se alguns exemplos de aplicação a dados existentes na literatura, mostrando-se os excelentes resultados desta abordagem.

## **ABSTRACT**

The problem of minimizing the fuel cost incurred by compression stations for transmitting natural gas in a pipeline network is complex. The models are non-linear, non-convex, large size and not differentiables making it hard to be solved. The problem is NP-complete, i.e., the number of operations required to reach an exact solution increases exponentially with the size of the problem. In this work, considering the good behavior of GRASP techniques for particular cases of the problem here involved (IAMASHITA, 2006), based on the model introduced by Jubini (2008), which generalize the one introduced by Ríos-Mercado et al (2004), by considering compressor stations composed by equipments not necessarily identical. It is introduced a heuristic, using GRASP technique, to find a compressors configuration of compressor stations to minimize the fuel consumption for transmitting natural gas from injection to delivery points along the pipeline. Some numerical examples found in the literature were treated with this approach and the excellent results are shown at the end of this work.

## CAPÍTULO 1

### INTRODUÇÃO

A utilização do gás natural como fonte primária de energia oferece um custo de geração mais baixo que o de outros combustíveis e uma emissão menor de poluentes, trazendo à sociedade inúmeros benefícios. Seu uso, entretanto, supõe sua movimentação de centros produtores para centros consumidores, em particular, através de gasodutos. Neste caso, para se movimentar, o gás natural é impulsionado por pressão e transportado através de um sistema complexo de dutos e outros equipamentos, constituindo um problema complexo, cujo modelo matemático é de grande porte, não-convexo e não diferenciável (RÍOS-MERCADO et al., 2000).

Desde que o transporte se dá através de um sistema de tubulações, ocorre perda de pressão e de energia devido à fricção com a parede interna dessas tubulações e à transferência de calor entre o gás e seu ambiente. Para superar essa perda de energia e manter o movimento do gás, estações de compressão estão instaladas na rede. Estas estações consomem parte do gás transportado, tendo por resultado um custo do consumo de combustível.

As estações de compressão são entidades complexas que envolvem um número de unidades de compressores organizados em paralelo ou em série com diferentes configurações e características. Os compressores são os equipamentos responsáveis pelo aumento de pressão para que o gás possa ser transportado.

Cada compressor pode ser ligado ou desligado e seu comportamento, quanto ao consumo de combustível, é não-linear, dependendo da pressão de entrada (sucção), da pressão de saída (descarga) e da vazão massa de gás natural através do compressor. Além disso, esse custo é dado implicitamente, via uma função que é não convexa e às vezes, resulta descontínuo.

O modelo matemático tem como objetivo minimizar a soma dos custos de combustível das estações de compressão na rede. Sendo que no problema se definem variáveis como vazão massa em cada estação de compressão e em cada duto, pressões em cada nó e como restrições, o balanço de vazões massa em cada nó e balanço entre as pressões dos extremos e a vazão de gás escoando em cada duto, além de limites de pressão nos nós e limites de operação em cada estação de compressão.

Para calcular o valor minimizante do custo da movimentação de gás natural, neste trabalho serão utilizadas técnicas de otimização, a partir de um modelo introduzido por Jubini (2008) e de aproximações da função custo e dos domínios das estações de compressão desenvolvidas por Azeredo (2008), que fizeram parte do desenvolvimento deste trabalho generalizando os trabalhos de Ríos-Mercado et al. (2000) e Wu et al. (2000), respectivamente.

Este trabalho parte do problema abordado em Ríos-Mercado et al. (2000), que para representar gasodutos utilizam conceitos de teoria de grafos e introduzindo uma metodologia para reduzir significativamente o tamanho das redes sem modificar sua estrutura. A metodologia consiste na idéia de que se removendo os compressores da rede, desconecta-se o sistema, originando-se sub-redes desconexas; em seguida contraindo-se essas sub-redes em nós e substituindo-se as estações de compressão por arcos, obtêm-se uma nova rede que consiste somente de nós e arcos. Esta nova rede é chamada de *REDE REDUZIDA*, onde as variáveis são as vazões massa escoando pelas estações de compressão e as respectivas pressões de sucção e descarga como será visto em 4.2 na Figura 4.1 (b).

A partir da rede reduzida, segundo proposto em Ríos-Mercado et al. (2000), aplica-se um algoritmo de descida, usando uma heurística para fixar as vazões massa das estações, de forma que as variáveis de decisão sejam reduzidas unicamente às variáveis de pressão de sucção e descarga das estações.

Inicia-se com uma distribuição inicial das vazões massa a serem comprimidas pelas diversas estações (esta distribuição de vazões não é única se a rede reduzida apresentar ciclos), para logo distribuir vazões massa entre os gasodutos de cada

sub-rede e então trabalhar o problema de buscar o menor custo com um modelo dependente unicamente das pressões. Nesta parte o algoritmo resolverá um modelo de Programação Dinâmica.

Desta forma, consegue-se um ponto viável de operação do sistema. Aplica-se um critério de otimalidade nesse ponto, que se não for satisfeito, deve ser modificado em função de uma busca linear do tipo Cauchy (ver BAZARAA et al., 1993) em relação à função custo de combustível, no que diz respeito à vazão massa pelos compressores. Assim, determina-se um novo ponto de distribuição de vazões massa pelas estações e continua-se até ser atingido o critério de otimalidade.

Reporta-se em Ríos-Mercado et al. (2000) bom comportamento do algoritmo acima descrito. Entretanto, as hipóteses para sua aplicação são de alguma forma, restritivas. As principais restrições associadas a essa proposta se originam no fato de aplicar a Programação Dinâmica. Devido ao efeito da dimensionalidade, o problema deve ser relativamente pequeno.

Pode-se citar também o fato de que se deve assumir que as sub-redes só podem contar com um compressor de entrada ou um compressor de saída (i.e., casos em que se têm vários compressores de entrada e saída numa sub-rede, complicam demais o algoritmo e devem ser eliminados, por hipótese).

E, finalmente, não menos importante, o fato de supor que as estações de compressão estão compostas por compressores idênticos, de forma a dividir por igual a vazão total a ser comprimida pela estação.

Portanto, o modelo e algoritmo que são apresentados em Ríos-Mercado et al. (2000) e Ríos-Mercado et al. (2004) simplificam o problema, para determinar quantos compressores (e não quais, pois estes são idênticos) devem ser ligados para minimizar o consumo de combustível.

A partir destas observações Jubini (2008) apresenta um modelo onde as estações não estão compostas necessariamente por compressores idênticos, tendo a necessidade de introduzir variáveis binárias para representar o funcionamento ou

não de cada compressor do sistema. Este modelo obriga a modificar a proposta de Ríos-Mercado et al. (2004), de forma a obter um modelo semelhante, mas misto-inteiro, que representa um problema que consiste em determinar quais compressores (e, conseqüentemente, quantos) devem ser ligados.

Estas modificações implicam outras, por exemplo, a não necessidade de iguais vazões para a compressão nos compressores de uma mesma estação e, ainda, a possibilidade de contar com sub-redes em que os compressores de entrada e saída do gás podem ser múltiplos. Adicionalmente, determinam que o algoritmo proposto por Ríos-Mercado et al. (2004) não possa ser aplicado ao novo modelo.

Alguns métodos heurísticos têm se mostrado eficientes para resolver o modelo matemático aqui abordado. Em particular, técnicas GRASP apresentadas em Iamashita et al. (2005) e Iamashita (2006), que estudam o problema de movimentação de gás entre plataformas *off-shore* (um caso particular do problema aqui estudado) têm mostrado excelentes resultados. A partir disso e das observações anteriores é que neste trabalho desenvolveu-se um algoritmo baseado nesse tipo de técnicas para o problema abordado.

No Capítulo 2, apresenta-se o modelo Ríos-Mercado et al. (2000) e o modelo modificado de Jubini (2008), que como em Azeredo (2008) denominaremos clássico e modificado (ou generalizado), respectivamente.

O domínio viável e a função de custo estudada por Azeredo (2008) serão apresentados no Capítulo 3, onde buscou-se aproveitar os conceitos aplicados em Wu et al. (2000) para serem aproveitados no modelo modificado, o qual se trata neste trabalho.

No Capítulo 4 formula-se a heurística que é utilizada para abordar o problema. Os pseudocódigos são mostrados no Capítulo 5, onde se discutem alguns testes numéricos com seus resultados.

No Capítulo 6 estão as principais conclusões e nos anexos estão contidos alguns Conceitos da Teoria de Grafos e o Algoritmo de Prim, ambos utilizados para colaborar com parte da solução do problema.

## CAPÍTULO 2

### MODELO DE MINIMIZAÇÃO DO CUSTO DE COMBUSTÍVEL

Neste capítulo apresenta-se o modelo clássico (RÍOS-MERCADO et al., 2000), para posteriormente aplicar as particularidades que o modelo de Jubini (2008) acrescenta na tentativa de buscar uma generalização do problema abordado. A diferença é que, o modelo de Jubini (2008) utiliza compressores não-idênticos e considera a possibilidade de que os compressores de uma estação que estejam ativados na operação não necessariamente necessitam comprimir vazões iguais.

#### 2.1. MODELO CLÁSSICO

Suponha que as redes consideradas consistem apenas de nós, dutos e estações de compressão. Ríos-Mercado et al. (2002) estabeleceram a função objetivo do problema como a soma dos custos de combustível sobre todas as estações de compressão na rede. Considerando o sistema em estado estacionário, as restrições deste problema são:

- (i) balanço de vazões massa em cada nó;
- (ii) balanço de vazões massa e pressões de gás através de cada duto;
- (iii) restrições dos limites de pressão em cada nó; e,
- (iv) limites operacionais em cada estação de compressão.

Segundo Ríos-Mercado et al. (2002), as restrições (i) e (ii) são chamadas equações de estado de vazões e pressões da rede. As equações (i), balanço das vazões massa, são lineares, já as equações (ii), balanço de vazões massa e pressões, são não-lineares.

Para cada nó da rede estabelece-se um escalar  $S_i$ , chamado vazão massa líquida do nó. Se  $S_i$  é positivo, o nó é uma fonte; se  $S_i$  é negativo, o nó é um nó de



demanda; e se  $s_i$  é igual à zero, o nó se diz nó de passagem. Neste caso, a soma das  $s_i$  é zero; i.e., para o caso de  $n$  nós se satisfaz a condição de soma zero:

$$\sum_{j=1}^n s_i = 0 \quad (2.1)$$

A equação do balanço de vazões massa em cada nó  $j$  determina que a vazão que entra num nó é igual a que sai. Se  $u_{ij}$  é a vazão massa de gás no arco  $(i,j)$ , o duto que vai do nó  $i$  ao nó  $j$ , a equação está dada como segue abaixo e representada na Figura (2.1).

$$\sum_{k:(i,k)=\text{arco}} u_{ik} - \sum_{j:(j,i)=\text{arco}} u_{ji} = s_i \quad (2.2)$$

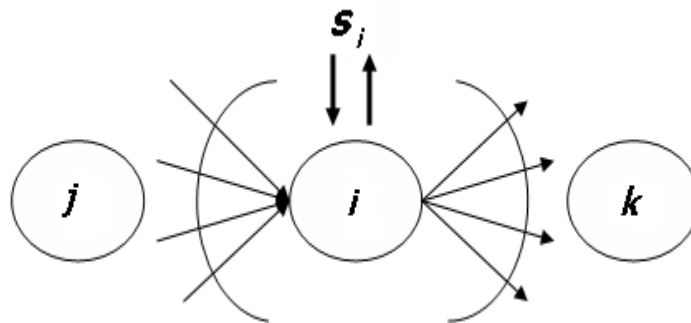


Figura 2.1: Equilíbrio de fluxo para um nó (Fonte: JUBINI, 2008)

Deve-se considerar que o fluxo de gás num duto pode mudar de sentido, dependendo das pressões nos extremos do mesmo, Assim, o balanço de vazões massa e pressões de gás através dos dutos, conforme a restrição (ii) está representada por:

$$p_1^2 - p_2^2 = cu|u|^\alpha, \quad (2.3)$$

onde  $p_1$  e  $p_2$  são pressões dos nós nas extremidades do duto,  $u$  é a vazão massa através do mesmo,  $\alpha$  é uma constante (que se assume  $\alpha \approx 1$ ), e  $c$  é a resistência da tubulação sendo uma quantidade positiva dependendo dos atributos físicos da tubulação, (conforme WU et al., 2000), dada por:

$$c = K \frac{fL}{d^5}, \quad (2.4)$$

Com  $K = (1,3305 \times 10^5) ZS_g T$ , onde:

$Z$  – fator de compressibilidade,  
 $S_g$  – gravidade específica do gás,  
 $T$  – temperatura ( $^{\circ}\text{R}$ ), assumida constante,  
 $f$  – fator de fricção,  
 $L$  – comprimento do gasoduto (milhas) e  
 $d$  – diâmetro do duto (pés).

Considere uma rede com  $n$  nós,  $l$  tubulações, e  $m$  estações de compressão. Para cada duto é atribuído um sentido que, pode ou não, coincidir com o sentido do fluxo de gás através da tubulação. Define-se  $A_l$  uma matriz de dimensão  $n \times l$  cujos elementos são dados por:

$$a_{ij}^l = \begin{cases} 1, & \text{se a tubulação } j \text{ sair do nó } i; \\ -1, & \text{se a tubulação } j \text{ entrar no nó } i; \text{ e} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$A_l$  é chamada matriz de incidência nó-tubulação. Similarmente, define-se  $A_m$ , uma matriz de dimensão  $n \times m$ , cujos elementos são dados por:

$$a_{ik}^m = \begin{cases} 1, & \text{se o nó } i \text{ for o nó de descarga da estação } k; \\ -1, & \text{se o nó } i \text{ for o nó de sucção da estação } k; \text{ e} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$A_m$  é chamada matriz de incidência nó-estação. A matriz formada colocando  $A_m$  ao lado direito de  $A_l$  é denotada por  $A$ , isto é,  $A = (A_l \ A_m)$ , a qual é uma matriz  $n \times (l + m)$ .

A rede da Figura 2.2 ilustra esses conceitos. A rede possui  $n = 10$  nós,  $l = 6$  tubulações e  $m = 3$  estações como mostrado na abaixo:

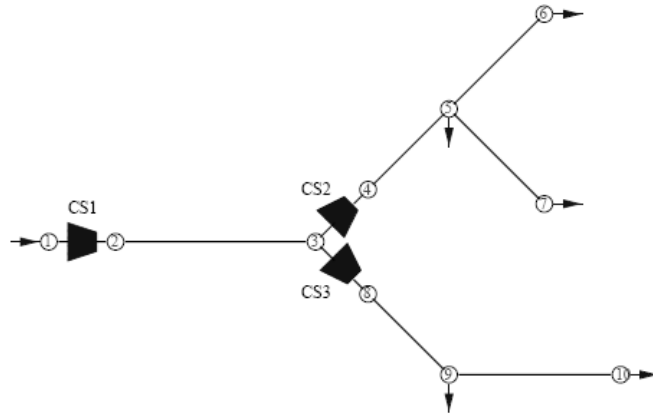


Figura 2.2: Um exemplo de uma rede simples (Fonte: RÍOS-MERCADO et al., 2000)

Assim as matrizes  $A_l$  e  $A_m$  para o exemplo de rede utilizado, são como seguem abaixo:

$$A_l = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad A_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

As equações de equilíbrio de fluxo total nos nós são escritas matricialmente como:

$$Aw = s, \quad (2.5)$$

onde:  $w^T = (u^T, v^T)$  é um vetor, sendo uma componente  $u_j$  ou  $v_k$  positiva se o sentido do fluxo coincidir com o sentido atribuído à tubulação ou à estação, ou negativa, caso contrário. Os vetores  $u^T = (u_1, \dots, u_l)$  e  $v^T = (v_1, \dots, v_m)$  representam as vazões massa através dos dutos e das estações, respectivamente, e  $s^T = (s_1, \dots, s_n)$  é o vetor fonte.

Escrevendo matricialmente a equação (2.3) obtém-se:

$$A_l^T p^2 = \phi(u), \quad (2.6)$$

onde  $(p^2)^T = (p_1^2, \dots, p_n^2)$ , sendo  $p_i$  a pressão no  $i$ -ésimo nó e  $\phi(u)^T = (\phi_1(u_1), \dots, \phi_l(u_l))$ , com  $\phi_j(u_j) = c_j u_j |u_j|^\alpha$ . Desta forma o conjunto de restrições de igualdade do problema pode ser representado pelo sistema:

$$\begin{cases} Aw = s \\ A_l^T p^2 = \phi(u) \end{cases}$$

Supomos que o vetor  $s$  satisfaça à condição de soma zero, e que os limites  $p^L$  e  $p^U$  das pressões em cada nó estão especificados. O problema consiste em determinar o vetor de pressões  $p$  e o vetor de vazões massa  $w$  de modo que o consumo de combustível total seja minimizado. O modelo é indicado como segue:

$$\text{Minimize } F(w, p) = \sum_{k=1}^m g_k(v_k, p_{ks}, p_{kd}), \quad (2.7)$$

$$\text{Sujeito a } Aw = s \quad (2.8)$$

$$A_l^T p^2 = \phi(u) \quad (2.9)$$

$$p \in [p^L, p^U] \text{ e} \quad (2.10)$$

$$(v_k, p_{ks}, p_{kd}) \in D_k \quad k = 1, 2, \dots, m. \quad (2.11)$$

Onde  $v_k, p_{ks}$  e  $p_{kd}$  são: vazão massa, a pressão de sucção e a pressão da descarga na estação  $k$ , respectivamente. A função  $g_k$  corresponde à função de custo, e  $D_k$  é o domínio viável da estação  $k$ .

É conveniente comentar que se sabe o seguinte (WU et al., 2000):

1. Os domínios viáveis  $D_k$  são tipicamente não-convexos e não são dados algebricamente.
2. As funções de minimização do combustível  $g_k$  são não-lineares e descontínuas.
3. As equações de balanço (2.9) definem um conjunto não-convexo e não-diferenciável.
4. Trata-se de um problema de grande porte.

Assim, o problema resulta ser complexo e Ríos-Mercado et al. (2000) apresentaram aproximações da função custo e do conjunto viável dos compressores de forma a torná-lo mais tratável.

## 2.2. MODELO MODIFICADO

A seguir apresenta-se o modelo em estado contínuo de Jubini (2008), que generaliza a proposta de Ríos-Mercado et al. (2000). Estas modificações, na medida em que generalizam o modelo, o tornam mais complexo.

Como em Ríos-Mercado et al. (2004), representa-se aqui um gasoduto por um grafo dirigido. Considere um grafo dirigido representando um gasoduto de transmissão de gás natural, onde  $G = (N, L, M)$ , com  $N$  sendo um conjunto de  $n$  nós,  $L$  um conjunto de  $l$  dutos e  $M$  um conjunto de  $m$  estações de compressão. Considera-se ainda, que o conjunto de arcos associado a  $G$  é o conjunto  $A = L \cup M$ , com  $L \cap M = \phi$ .

Como variáveis de decisão para o problema, têm-se  $W_{ab}$ , vazão massa em cada arco  $(a, b) \in A$ , e  $p_a$ , pressão do gás em cada nó  $a \in N$ . Além disso, considera-se que para cada nó  $a \in N$ , existe um parâmetro conhecido  $S_a$  chamado de vazão massa líquido do nó, que indica se o nó é fonte ( $S_a \geq 0$ ), entrega ( $S_a < 0$ ) ou passagem ( $S_a = 0$ ).

Para cada  $a \in N$  existe um limite de pressão inferior  $p_a^L$  e superior  $p_a^U$ , a resistência do duto denotada por  $t_{ab}$  está determinada pelas propriedades físicas do duto e é conhecida.

Para cada estação  $(a, b) \in M$ , com  $K_{ab}$  compressores, dado um  $k = 1, 2, \dots, K_{ab}$  existem as seguintes variáveis:

- $w_{abk}$  : taxa fluxo de massa no compressor;
- $p_{ab}^S$  : pressão de sucção no compressor;
- $p_{ab}^D$  : pressão de descarga no compressor;
- $x_{abk}$  : variável binária (0, 1) de decisão de operacionalidade do compressor

$$x_{abk} = \begin{cases} 0, & \text{indica que o compressor } k \text{ está desligado.} \\ 1, & \text{indica que o compressor } k \text{ está ligado.} \end{cases}$$

- $g_{abk}(w_{abk}, p_{ab}^S, p_{ab}^D)$  : função de custo de operacionalidade do compressor.

As variáveis associadas a cada estação de compressão  $(a, b) \in M$  da rede  $G$  são:

- $W_{ab}$  : taxa fluxo de massa da estação;
- $p_{ab}^S$  : pressão de sucção na estação;
- $p_{ab}^D$  : pressão de sucção na estação de compressão.

Note que as pressões de sucção e descarga dos compressores são iguais às da estação.

A vazão massa da estação  $(a, b)$  é igual à soma das vazões massa dos compressores em operação na estação.  $W_{ab}$  também representa a vazão massa no duto  $(a, b)$ . Em particular para cada  $(a, b) \in M$ , cumpre-se que:

$$W_{ab} = \sum_{k=1}^{K_{ab}} w_{abk} x_{abk} \quad (2.12)$$

O objetivo é minimizar o consumo de combustível que as estações de compressão da rede de transporte de gás natural utilizam, certificando-se de cumprir as exigências de entrega estabelecidas ao longo de todo o sistema, em cada estação, só pode ser comprimida a vazão massa que for possível, mantendo-se dentro dos limites de pressões e objetivando o menor custo. Quanto ao transporte de gás nas tubulações, considera-se que não existe nenhum custo associado e que a rede está em estado estacionário.

O custo operacional de uma estação de compressão  $(a,b) \in M$ , com  $K_{ab}$  compressores, é dado por:

$$g_{ab}(w_{ab}, p_{ab}^S, p_{ab}^D) = \sum_{k=1}^{K_{ab}} g_{abk}(w_{abk}, p_{ab}^S, p_{ab}^D) \quad (2.13)$$

O custo operacional de uma rede de transmissão de gás natural é dado pela soma dos custos das estações de compressão de G. Assim, a função objetivo da rede de transmissão é dada por:

$$\sum_{(a,b) \in M} g_{ab}(W_{ab}, P_{ab}^S, P_{ab}^D) \quad (2.14)$$

A Figura (2.3) representa uma estação de compressão  $(a,b) \in M$ , com  $K_{ab}$  compressores:

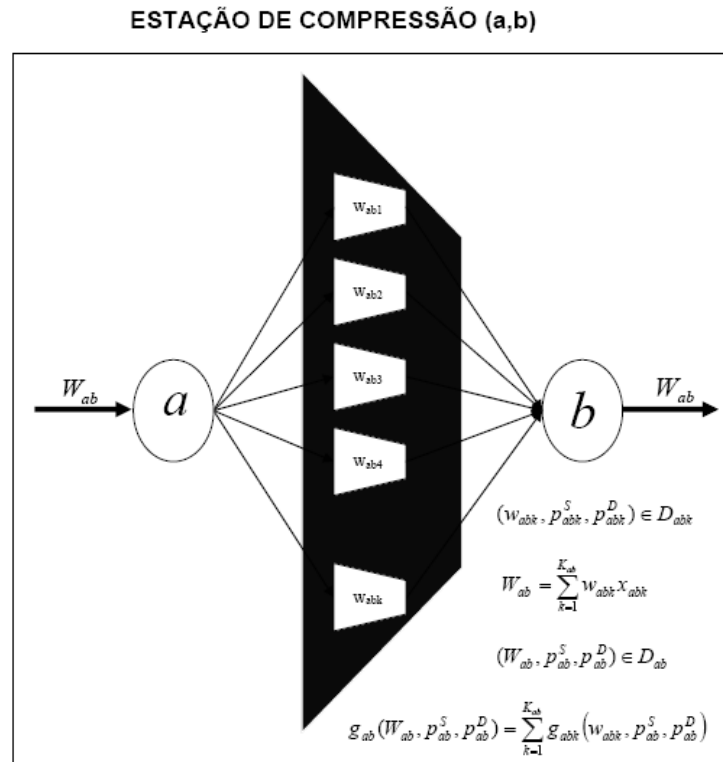


Figura 2.3: Estação de compressão com  $k$  compressores (Fonte: JUBINI, 2008)

Para minimizar os custos operacionais globais de uma rede de transporte de gás natural, o modelo matemático é apresentado a seguir:

$$\text{Minimizar} \quad \sum_{(a,b) \in M} g_{ab}(W_{ab}, p_{ab}^S, p_{ab}^D) \quad (2.15)$$

$$\text{Sujeito a} \quad \sum_{b:(a,b) \in A} W_{ab} - \sum_{b:(b,a) \in A} W_{ab} = S_{ab}, a \in N \quad (2.16)$$

$$W_{abk} = \sum_{k=1}^{K_{ab}} w_{abk} x_{abk}, (a,b) \in M \quad (2.17)$$

$$p_a^2 - p_b^2 = t_{ab} W_{ab} |W_{ab}|, (a,b) \in L \quad (2.18)$$

$$p_a \in [p_a^L, p_a^U], a \in N \quad (2.19)$$

$$(W_{ab}, p_{ab}^S, p_{ab}^D) \in D_{ab} \subset \mathbb{R}^3, (a,b) \in M, \quad (2.20)$$

onde  $D_{ab}$  é o domínio viável operacional da estação de compressão  $(a,b) \in M$  definida em função dos domínios  $D_{abk}$  que correspondem aos domínios dos compressores  $k$  da respectiva estação  $(a,b)$ . Esta formulação matemática foi elaborada para ser aplicada em uma rede de transmissão com topologia cíclica, podendo também, ser aplicada a uma rede acíclica.



A equação (2.17) é a que representa a taxa de fluxo de massa através da estação de compressão  $(a, b) \in M$ , que é igual à vazão de gás comprimido pelos  $k$  compressores que estão em operação, onde  $k = 1, \dots, K_{ab}$ .

A Figura (2.4) representa a restrição (2.18) que é o balanço de pressões em cada duto  $(a, b) \in L$ .

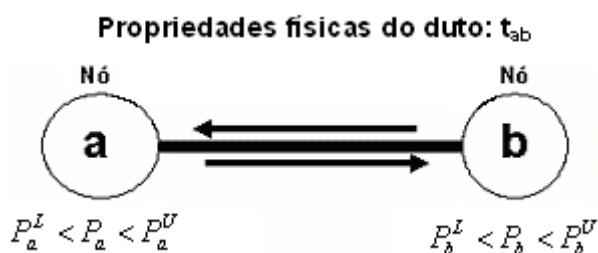


Figura 2.4: Balanço de taxa de fluxo de massa em cada nó a (Fonte: JUBINI, 2008)

Os limites de pressões em cada nó  $a \in N$  estão dados na relação (2.19) e a restrição (2.20) representa o conjunto do domínio viável de operacionalidade de cada estação de compressão  $(a, b) \in M$ .

## CAPÍTULO 3

### DOMÍNIO VIÁVEL DE UMA ESTAÇÃO DE COMPRESSÃO E FUNÇÃO CUSTO DE COMPRESSÃO

O domínio viável de uma estação e a função custo de combustível (considere somente o custo de compressão) para o caso generalizado foram estudados por Azeredo (2008), que utilizou conceitos desenvolvidos em Wu et al. (2000), onde se trata de estações que possuem compressores idênticos dispostos em paralelo. Azeredo (2008) estendeu os conceitos para o caso de uma estação de compressão que possui  $k$  compressores não necessariamente iguais, como no modelo de Jubini (2008) do qual trata este trabalho. Como em Azeredo (2008), quando se fizer referência ao domínio e a função custo introduzidos por Wu et al. (2000) será usado o adjetivo *clássico* (*a*). Já quando se mencionar domínio e função custo introduzido em Jubini (2008), usar-se-á o adjetivo *modificado* ou *generalizado*.

#### 3.1. DOMÍNIO VIÁVEL DO MODELO CLÁSSICO

##### 3.1.1. DOMÍNIO VIÁVEL PARA UM ÚNICO COMPRESSOR

Para introduzir o domínio de uma estação, primeiramente é conveniente apresentar as variáveis que estão relacionadas a um único compressor (WU et al., 2000):

$Q$ : vazão volume de entrada no compressor;

$S$ : velocidade de rotação do compressor;

$H$ : carga adiabática de energia do compressor (“adiabatic head”);

$\eta$ : eficiência do compressor.

Essas variáveis se relacionam da seguinte forma:

$$\frac{H}{S^2} = A_H + B_H \left( \frac{Q}{S} \right) + C_H \left( \frac{Q}{S} \right)^2 + D_H \left( \frac{Q}{S} \right)^3, \quad (3.1)$$

$$\eta = A_E + B_E \left( \frac{Q}{S} \right) + C_E \left( \frac{Q}{S} \right)^2 + D_E \left( \frac{Q}{S} \right)^3, \quad (3.2)$$

onde  $A_H, B_H, C_H, D_H, A_E, B_E, C_E$  e  $D_E$  são constantes do compressor, estimadas pelo método de mínimos quadrados. A velocidade  $S$  varia dentro de um intervalo  $S_{\min}$  e  $S_{\max}$ :

$$S_{\min} \leq S \leq S_{\max} \quad (3.3)$$

e a razão  $\frac{Q}{S}$  também está limitada a um intervalo:

$$surge \leq \frac{Q}{S} \leq stonewall \quad (3.4)$$

As variáveis de vazão do gasoduto ( $v$ ), pressão de sucção ( $P_s$ ) e pressão de descarga ( $P_d$ ) se relacionam com as variáveis do compressor da seguinte forma:

$$H = \frac{ZRT_s}{m} \left[ \left( \frac{P_d}{P_s} \right)^m - 1 \right], \quad (3.5)$$

$$Q = ZRT_s \frac{v}{P_s}, \quad (3.6)$$

onde  $m = \frac{k-1}{k}$ ,  $k$  é a taxa de calor específico,  $Z$  é o fator de compressibilidade do gás,  $R$  é a constante do gás e  $T_s$  é a temperatura de sucção, assumida constante. Por (3.3) e (3.4), resulta que a taxa de fluxo volumétrico  $Q$  deve satisfazer:

$$Q^L \leq Q \leq Q^U, \quad (3.7)$$

onde  $Q^L = S_{\min} * surge$  e  $Q^U = S_{\max} * stonewall$ .

Como mostrado em Wu et al. (2000), para cada valor fixo de  $S$ ,  $H$  é limitada pela relação (3.1), sendo que quando  $S = S_{\min}$  ou  $\frac{Q}{S} = surge$ , temos os limites inferiores e quando  $S = S_{\max}$  ou  $\frac{Q}{S} = stonewall$ , temos os limites superiores, definindo, assim, limites inferiores e superiores  $H^L(Q)$  e  $H^U(Q)$ . Portanto, para  $Q^L \leq Q \leq Q^U$ , tem-se que:

$$H^L(Q) \leq H \leq H^U(Q) \quad (3.8)$$

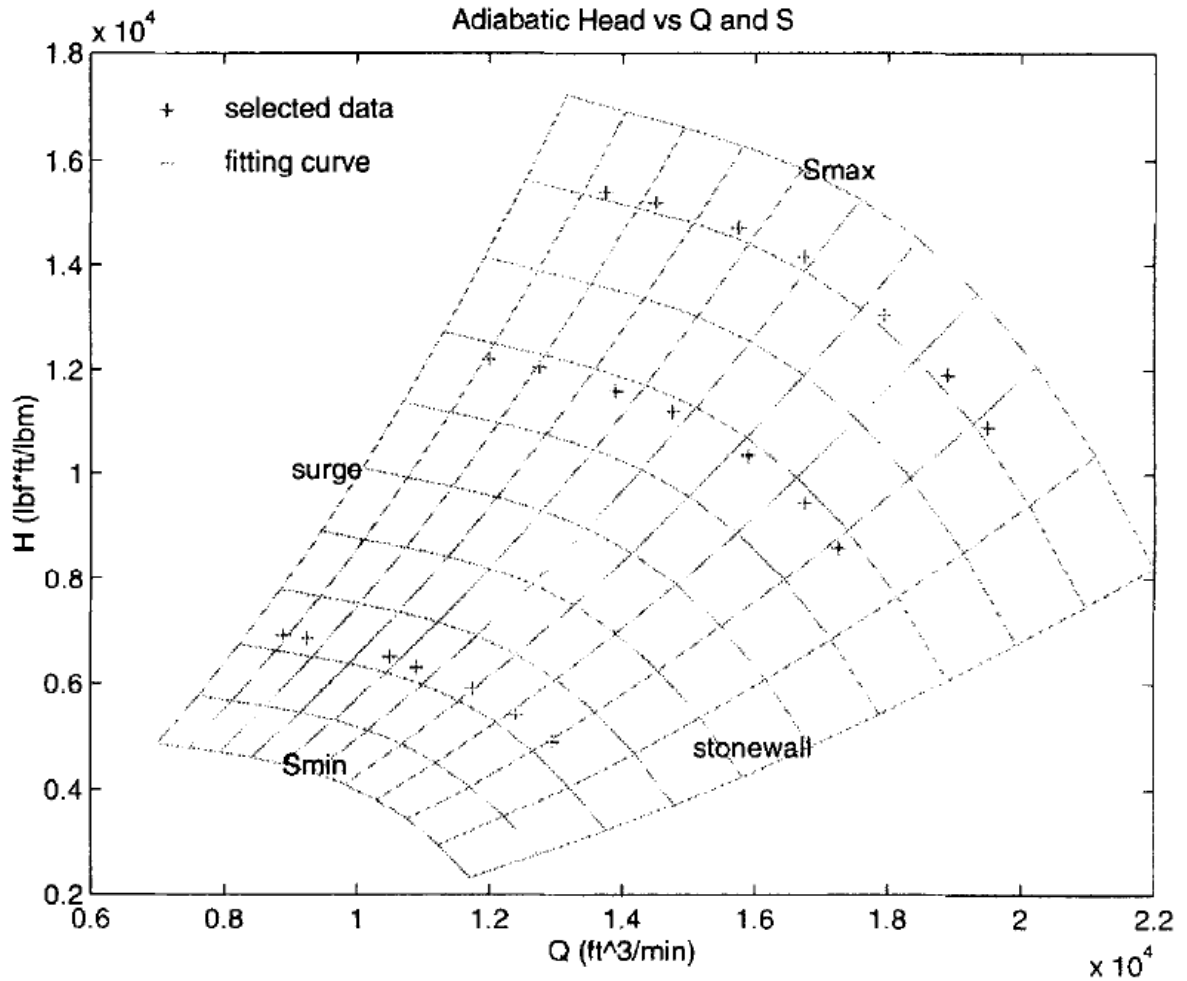


Figura 3.1: Relação entre  $Q$ ,  $S$  e  $H$  em um compressor (Fonte: WU et al., 2008)

O domínio viável para um único compressor denotado por  $D^{unit}$  está, portanto, definido por:

$$D^{unit} = \left\{ (v, p_s, p_d) : p_s^L \leq p_s \leq p_s^U, V^L \leq \frac{v}{p_s} \leq V^U, G^L\left(\frac{v}{p_s}\right) \leq \frac{p_d}{p_s} \leq G^U\left(\frac{v}{p_s}\right) \right\} \quad (3.9)$$

Onde:

$$V^L = \frac{Q^L}{ZRT_s} \quad (3.10)$$

$$V^U = \frac{Q^U}{ZRT_s} \quad (3.11)$$

$$G^L(q) = \left[ 1 + \frac{m}{ZRT_s} H^L(ZRT_s q) \right]^{\frac{1}{m}} \quad (3.12)$$

$$G^U(q) = \left[ 1 + \frac{m}{ZRT_s} H^U(ZRT_s, q) \right]^{\frac{1}{m}} \quad (3.13)$$

De forma a fixar as variáveis introduzidas no gasoduto, indicam-se a seguir as unidades utilizadas para cada uma:

- Vazão massa: libras massa/minuto (lbm/min).
- Vazão volume: MMSFCD (*million of standard cubic feet per day*).
- Pressão: psia (*pounds-force per square inch absolute*).

### 3.1.2. DOMÍNIO VIÁVEL PARA UMA ESTAÇÃO DE COMPRESSÃO CLÁSSICA

Considerar, agora, uma estação de compressão com  $K$  compressores idênticos e em paralelo. As pressões de sucção e descarga são as mesmas para os compressores da estação, porém a vazão massa  $v$  será dividida igualmente entre os compressores ativos, desta forma, se apenas um compressor estiver ativo o domínio da estação será o domínio unitário  $D^1$  daquele compressor. Caso sejam selecionados  $r$  compressores o domínio será  $D^r$  dado por:

$$D^r = \left\{ (v, p_s, p_d) : \left( \frac{v}{r}, p_s, p_d \right) \in D^1 \right\} \quad (3.14)$$

O que indica que passará um fluxo  $\frac{v}{r}$  em cada compressor que estiver ativo.

Desta forma o domínio viável da estação será dado por:

$$D = \bigcup_{r=1}^K D^r \quad (3.15)$$

### 3.2. DOMÍNIO VIÁVEL MODELO MODIFICADO

Considerar uma estação de compressão com  $K$  compressores não necessariamente iguais. Tem-se que para cada compressor  $i \in \{1, \dots, K\}$ , como antes, cumprem-se as seguintes relações:

$$\frac{H}{S^2} = A_{H_i} + B_{H_i} \left( \frac{Q}{S} \right) + C_{H_i} \left( \frac{Q}{S} \right)^2 + D_{H_i} \left( \frac{Q}{S} \right)^3, \quad (3.16)$$

$$\eta = A_{E_i} + B_{E_i} \left( \frac{Q}{S} \right) + C_{E_i} \left( \frac{Q}{S} \right)^2 + D_{E_i} \left( \frac{Q}{S} \right)^3, \quad (3.17)$$

onde as constantes  $A_{H_i}, B_{H_i}, C_{H_i}, D_{H_i}, A_{E_i}, B_{E_i}, C_{E_i}$  e  $D_{E_i}$  dependem do respectivo compressor. Como anteriormente, tem-se que:

$$(S_i)_{\min} \leq S \leq (S_i)_{\max}, \quad (3.18)$$

$$surge_i \leq \frac{Q}{S} \leq stonewall_i, \quad (3.19)$$

$$Q^{L_i} \leq Q \leq Q^{U_i}, \quad (3.20)$$

$$H^{L_i}(Q) \leq H \leq H^{U_i}(Q), \quad (3.21)$$

Sendo  $Q^{L_i} = (S_i)_{\min} * surge_i$  e  $Q^{U_i} = (S_i)_{\max} * stonewall_i$ .

Assim, o domínio do compressor  $i$  está dado por:

$$D_i = \left\{ (v, p_s, p_d) : p_s^{L_i} \leq p_s \leq p_s^{U_i}, V^{L_i} \leq \frac{v}{p_s} \leq V^{U_i}, G^{L_i} \left( \frac{v}{p_s} \right) \leq \frac{p_d}{p_s} \leq G^{U_i} \left( \frac{v}{p_s} \right) \right\}, \quad (3.22)$$

Onde:

$$V^{L_i} = \frac{Q^{L_i}}{ZRT_s} \quad (3.23)$$

$$V^{U_i} = \frac{Q^{U_i}}{ZRT_s} \quad (3.24)$$

$$G^{L_i}(q) = \left[ 1 + \frac{m}{ZRT_s} H^{L_i}(ZRT_s q) \right]^{\frac{1}{m}} \quad (3.25)$$

$$G^{U_i}(q) = \left[ 1 + \frac{m}{ZRT_s} H^{U_i}(ZRT_s q) \right]^{\frac{1}{m}} \quad (3.26)$$

Se uma vazão massa  $v$  chega a uma estação com  $K$  compressores com determinada pressão de sucção para ser comprimido para certa pressão de descarga, ela pode ser comprimida pela estação utilizando quaisquer  $r \in \{1, \dots, K\}$  compressores, desde que:

$$v = v_1 + \dots + v_k, \quad (3.27)$$

onde  $v_r$  é a vazão massa no compressor  $r$ , lembrando que a condição  $(v_r, p_s, p_d) \in D_r$  deve ser satisfeita,  $\forall v_r > 0, r = 1, \dots, k$ .

Assim, temos que o domínio viável de uma estação com  $K$  compressores não necessariamente iguais está dado pela relação:

$$D = \{(v, p_s, p_d) : v = v_1 + \dots + v_k, \text{ com } (v_k, p_s, p_d) \in D_r, \text{ se } v_r > 0, v \in \{1, \dots, K\}\} \quad (3.28)$$

### 3.2.1. APROXIMAÇÃO DO DOMÍNIO VIÁVEL DO MODELO MODIFICADO

Azeredo (2008) trabalhando com dois tipos de compressores não idênticos, tipo A e tipo B e fixando a pressão de sucção, obteve uma figura que mostra os domínios de cada compressor como na Figura 3.1.

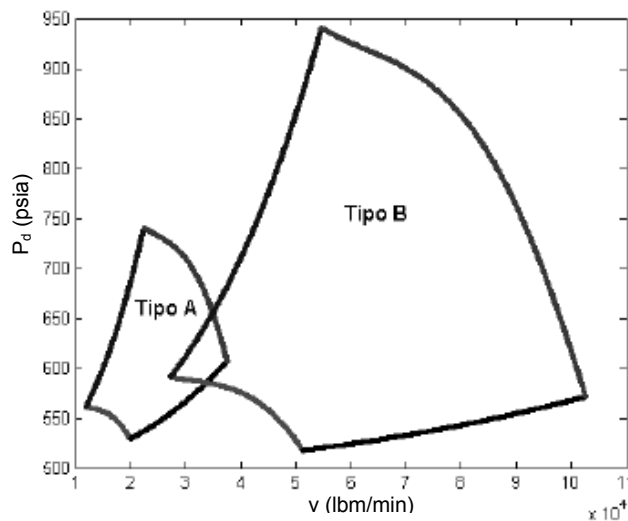


Figura 3.2: Perfil dos domínios unitários de dois tipos de compressores diferentes ( $p_s = 500$  (psia))

(Fonte: AZEREDO, 2008)

A Figura 3.2 mostra a não convexidade dos conjuntos, o que dificulta o uso de métodos de otimização. Portanto, Azeredo (2008) faz uma aproximação do domínio D, para encontrar uma solução aproximada, seguindo as idéias apresentadas em Wu et al. (2000).

Desde que repetindo a proposta de Wu et al. (2000) para o caso clássico, é possível gerar uma envoltória não convexa para o domínio de um compressor com compressores não idênticos, Azeredo (2008) opta por realizar apenas aproximações poliedrais para cada compressor, como mostra a Figura 3.3.

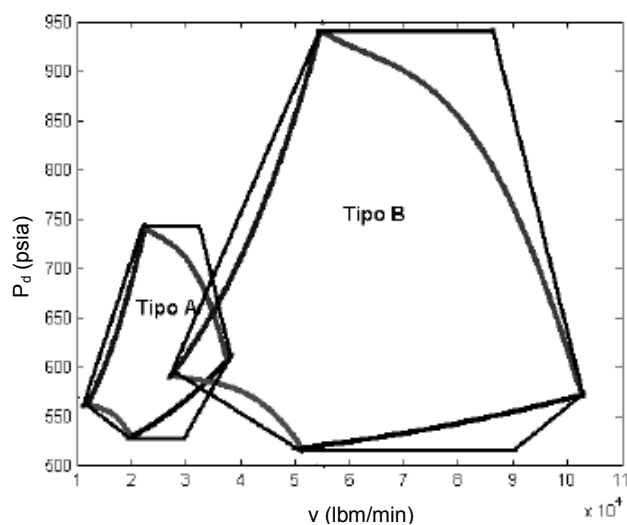


Figura 3.3: Aproximação linear externa para os perfis dos domínios unitários dos compressores do tipo A e tipo B (Fonte: AZEREDO, 2008)

### 3.3. FUNÇÃO DE CUSTO MODELO CLÁSSICO

Para determinar o custo de uma estação de compressão, primeiramente será apresentado o cálculo do custo de um único compressor.

#### 3.3.1. FUNÇÃO DE CUSTO DE UM COMPRESSOR CLÁSSICO

A função de custo de um compressor, denotada por  $g^{unit}$ , depende das características do compressor, entretanto, sabe-se que ela aumenta quando a razão

$\frac{p_d}{p_s}$  e a taxa de fluxo volumétrica  $Q$  (ou  $\frac{v}{p_s}$ ) aumentam e diminui, quando a pressão



de sucção  $p_s$  diminui. A função custo de combustível para um único compressor está dada por (WU et al., 2000):

$$g^{unit}(v, p_s, p_d) = \alpha \frac{vH}{\eta}, \forall (v, p_s, p_d) \in D^{unit}, \quad (3.29)$$

Onde  $\alpha$  é uma constante positiva considerada igual a 1.

Em Azeredo (2008) são utilizadas algumas funções que procuram aproximar a função  $g^{unit}$ , dentre as várias formas de aproximação a que apresenta menor percentual de erro é a função  $g_6$  dada abaixo:

$$g_6(v, P_s, P_d) = v \left( A_6 \left( \frac{v}{P_s} \right)^2 + B_6 \left( \frac{P_d}{P_s} \right)^2 + C_6 \frac{v}{P_s} \frac{P_d}{P_s} + D_6 \frac{v}{P_s} + E_6 \frac{P_d}{P_s} + F_6 \right), \quad (3.30)$$

onde  $A_6, B_6, C_6, D_6, E_6, F_6$  são constantes do compressor estimadas pelo método de mínimos quadrados.

### 3.3.2. FUNÇÃO DE CUSTO DE UMA ESTAÇÃO DE COMPRESSÃO

Uma estação de compressão pode não funcionar ou funcionar com um ou mais compressores, porém o custo de combustível varia de acordo com o número de compressores ativos, caso altere o número de compressores a vazão de entrada e a eficiência também se alteram. De qualquer forma, o procedimento para o cálculo do custo consiste em verificar se um ponto  $(v, p_s, p_d)$  é viável para uma estação de compressão, e, de acordo com (3-29), calcular  $H$  e  $Q$ , equações (3.5) e (3.6), para em seguida calcular  $S$ , da equação (3.1), e  $\eta$ , da equação (3.2). É claro que se forem usadas as aproximações da Figura (3.2) para o domínio e a aproximação da relação (3.30) para a função custo, os cálculos resultam computacionalmente mais baratos.

Assim, em qualquer caso, para uma estação com  $H$  compressores, processando  $(v, p_s, p_d) \in D$  e operando com  $r$  compressores ativos, como já foi visto, tem-se que  $(v, p_s, p_d) \in D^r$  e  $\left( \frac{v}{r}, p_s, p_d \right) \in D^1$ , o custo total então está dado por  $rg^{unit}$ , onde  $r$  pode assumir diferentes valores no intervalo inteiro  $1 \leq r \leq K$ .

O custo mínimo total da estação de compressão, então está dado por:

$$g(v, p_s, p_d) = \min_{r \in R} \left\{ r g^{unit} \left( \frac{v}{r}, p_s, p_d \right) \right\} \quad (3.31)$$

Onde  $R$  é o conjunto de valores viáveis de  $r$  para um dado  $(v, p_s, p_d)$  isto é:

$$R_{(v, p_s, p_d)} = \left\{ r : r \text{ inteiro}, 1 \leq r \leq K, (v, p_s, p_d) \in D^r \right\} \quad (3.32)$$

**Proposição 3.1.** (RÍOS-MERCADO et al., 2000) Dado  $(v, p_s, p_d) \in D$ , se  $r_1, r_2 \in R$ , então, para qualquer  $r$  inteiro, com  $r_1 \leq r \leq r_2$ , tem-se que  $r \in R_{(v, p_s, p_d)}$ , i.e., para qualquer  $(v, p_s, p_d) \in D$ , o conjunto  $R$  é um intervalo de inteiros.

### 3.4. FUNÇÃO DE CUSTO MODELO MODIFICADO

No modelo de Jubini (2008), abordado neste trabalho, as estações de compressão utilizam compressores não necessariamente idênticos e vazão massa  $v$  que chega a essas estações pode ser comprimida por quaisquer  $r \in \{1, \dots, k\}$  compressores da estação, desde que  $v = v_{i_1} + \dots + v_{i_r}$ , onde  $v_{i_k}$  é a vazão massa no compressor  $i_k, \forall i_k \in \{1, \dots, k\}$  e  $k = 1, \dots, r$ .

Para estabelecer a função custo correspondente para um dado  $(v, p_s, p_d)$ , Azeredo (2008) introduziu o conjunto  $R$  de combinações viáveis de compressores como dado abaixo:

$$R_v = \left\{ (v_1, \dots, v_k) : v = v_1 + \dots + v_k, (v, p_s, p_d) \in D \right\} \quad (3.33)$$

Temos que para determinados valores de  $(v, p_s, p_d) \in D$ , podem ser utilizadas diferentes configurações de compressores, o que interfere diretamente no custo. De modo que o custo mínimo de combustível para  $(v, p_s, p_d) \in D$  é dado por:

$$g(v, p_s, p_d) = \min_{v \in R_v} \left\{ \sum_{i=1}^k g_i^{unit}(v_i, p_s, p_d) \right\}, \quad (3.34)$$

onde  $g_i^{unit}(v_i, p_s, p_d)$  é o custo para comprimir  $(v_i, p_s, p_d)$  no compressor  $i$ .

Para um exemplo em que uma estação de compressão que possui dois tipos de compressores não idênticos dados por  $rA$  (número de compressores do tipo A que poderão ser ativados) e  $rB$  (número de compressores do tipo B que poderão ser ativados), devem-se definir as parcelas de  $v$  que serão divididas entre esses compressores, definindo um vetor  $v_{parcial}^{(a,b)}$  que representa a distribuição da vazão massa  $v$  nos compressores de tipo A e de tipo B da estação, onde  $a+b(\leq rA+rB)$  é o número de compressores a ser ativado na estação.

O vetor  $v_{parcial}^{(a,b)}$  estará no domínio  $D$  da estação se  $(v_{parcial}_i^{(a,b)}, p_s, p_d) \in D_i$ , onde  $D_i$  é o domínio do compressor  $i$ ,  $i \in \{1, \dots, K\}$ , então se  $v_{parcial}^{(a,b)} \in D$  o custo de compressão da configuração adotada pode ser calculado.

Se considerar que o número de compressores da estação seja  $K = 5$ , logo  $rA + rB = 5$  então:

$$g_{(a,b)}(v, p_s, p_d) = \left\{ \sum_{i=1}^5 g_i(v_{parcial}_i^{(a,b)}, p_s, p_d) \right\} \quad (3.35)$$

Porém, como em Azeredo (2008), deve-se calcular o custo correspondente a todas as configurações que são possíveis, para em seguida pegar o menor custo.

O custo de compressão de  $v$  na estação é dado por:

$$g(v, p_s, p_d) = \min_{v_{parcial}^{(a,b)} \in D} g_{(a,b)}(v, p_s, p_d) \quad (3.36)$$

Em Azeredo (2008), observa-se que na função custo de combustível  $g(v, p_s, p_d)$  dada por (3.34),  $g_{i_k}^{unit}(v_{i_k}, p_s, p_d)$  é cara de ser calculada. Portanto, pode ser aproximada pela função (3.30).

## CAPÍTULO 4

### METAHEURÍSTICA GRASP PROPOSTA

Neste capítulo são desenvolvidos métodos aproximativos, usando técnicas metaheurísticas do tipo GRASP que auxiliam na resolução do problema proposto. Os modelos utilizados são baseados em Ríos-Mercado et al. (2000), Ríos-Mercado et al. (2004) e Wu et al. (2000), com as adaptações de Jubini (2008) e Azeredo (2008), visando alcançar um resultado mais geral.

Para validar as idéias desenvolvidas nos capítulos anteriores, foram implementados programas, utilizando o software MATLAB, tanto para a determinação da viabilidade de um ponto  $(v, p_s, p_d)$  em relação a uma dada estação de compressão, como para o cálculo do seu respectivo custo  $g(v, p_s, p_d)$ . Os pseudocódigos dessas rotinas se apresentam mais adiante.

O principal motivo para o uso de técnicas GRASP é o resultado alcançado em lamashita (2006), que estuda um caso particular do problema tratado neste trabalho, onde a técnica mostrou-se muito eficiente. Em continuação introduzem-se alguns conceitos necessários para a apresentação da heurística desenvolvida.

#### 4.1. GRASP - *GREEDY RANDOMIZED ADAPTIVE SEARCH PROCEDURE*

Desenvolvido por Tom Feo e Maurício Resende no final da década de 80, o GRASP (Procedimento de Busca Adaptativa Aleatória Gulosa) é um método de múltiplos reinícios, onde as soluções iniciais são posteriormente melhoradas através de um algoritmo de busca local (FEO E RESENDE, 1995).

O método GRASP possui uma fase de construção e uma fase de melhoria caracterizada por uma busca local. A cada iteração da fase construtiva, uma função gulosa avalia o conjunto de elementos candidatos a serem incorporados na solução parcial. A partir desta avaliação constrói-se uma lista restrita de candidatos (LRC) e um dos candidatos é escolhido probabilisticamente (CHRISTOFOLETTI, 2002).

A função adaptativa gulosa é dada por  $g : C \rightarrow \mathbb{R}$  e um parâmetro  $\alpha$  controla o nível de *gulosidade* e aleatoriedade do procedimento de Construção, onde

$\alpha = 0$  gera soluções puramente gulosas

$\alpha = 1$  gera soluções aleatórias em sua totalidade

O procedimento de construção interfere na busca local. O GRASP procura unir procedimentos aleatórios de construção de solução a bons aspectos dos algoritmos puramente gulosos.

#### 4.1.1 LISTA RESTRITA DE CANDIDATOS (LRC)

O parâmetro  $\alpha$  determina o tamanho da Lista Restrita de Candidatos, ele é praticamente o único parâmetro a ser ajustado. Valores de  $\alpha$  que geram uma lista restrita de tamanho muito limitado ( $\alpha$  próximo da escolha gulosa) implicam em soluções pouco diversificadas e, valores de  $\alpha$  próximos da seleção puramente aleatória geram uma grande diversidade de soluções, mas com qualidade inferior tornando o processo lento.

A seleção das soluções na LRC é feita de forma probabilística, pode-se adotar uma distribuição uniforme ou não. A ordem de prioridade pode ser baseada em um *rank*  $r(\sigma)$  atribuído a cada elemento, ordenando do melhor (menor *rank*) para o pior (maior *rank*).

#### 4.1.2 BUSCA LOCAL

As soluções iniciais obtidas na fase de construção do GRASP (que não são as soluções procuradas) são submetidas a uma busca local, a qual objetiva melhorar

a solução construída. Uma construção de soluções de boa qualidade acelera a busca local.

## 4.2. HEURÍSTICA GRASP PARA O MODELO MODIFICADO

Antes de formular a heurística, passaremos a descrevê-la. Descrever-se-á, primeiramente, a etapa de construção da solução e da lista de candidatos restrita e sua hierarquização, para finalmente descrever a busca local e o critério de parada.

Para a geração da lista de candidatos restrita, parte-se da seguinte observação: quando a rede reduzida é acíclica (i.e., uma árvore) existe uma única possível forma de distribuir o vetor  $v$  entre os compressores (essa única forma é obtida da solução do sistema  $Av = s$ , onde  $A$  é a matriz de incidência do grafo que corresponde à rede reduzida - dado que, neste caso o grafo é uma árvore, o sistema tem solução única); já quando a rede reduzida possui ciclos, existem infinitas soluções  $v$  para o sistema  $Av = s$ .

Neste caso, cada uma dessas soluções é uma possível distribuição  $v^T = (v_1, \dots, v_m)$  das vazões massa entre as  $m$  estações de compressão do gasoduto.

Note que dada uma solução  $v$  do sistema anterior ( $Av = s$ ), essa solução induzirá uma distribuição de vazões massa  $u_h$  para cada sub-rede  $h$  da rede reduzida. Dessa forma, dado um vetor  $v$  de vazões massa nos compressores, determina-se um vetor  $u^T = (u_1^T, \dots, u_r^T)$  de distribuições de vazão massa no interior de cada sub-rede  $h = 1, \dots, r$ .

Naturalmente, o vetor  $(v^T, u^T)$  satisfaz o sistema  $A_l u + A_m v = s$ , onde  $A_l$  e  $A_m$  são as matrizes de incidência nó-duto e de incidência estação-duto da rede original, respectivamente. Logo, determinada dessa forma uma distribuição de

vazões massa na rede, bastará determinar se existe um vetor de pressões  $p$  que permita escoar essas vazões pela rede.

Assim sendo, ter-se-á uma solução viável  $(v^T, u^T, p^T)$  para atender as demandas da rede. Observe, ainda, que a diferença entre a rede reduzida cíclica e a acíclica, é que o vetor  $v$  é único ou não é único.

A Figura 4.1(a) ilustra uma rede de distribuição de gás natural e a Figura 4.1(b), a sua respectiva rede reduzida.

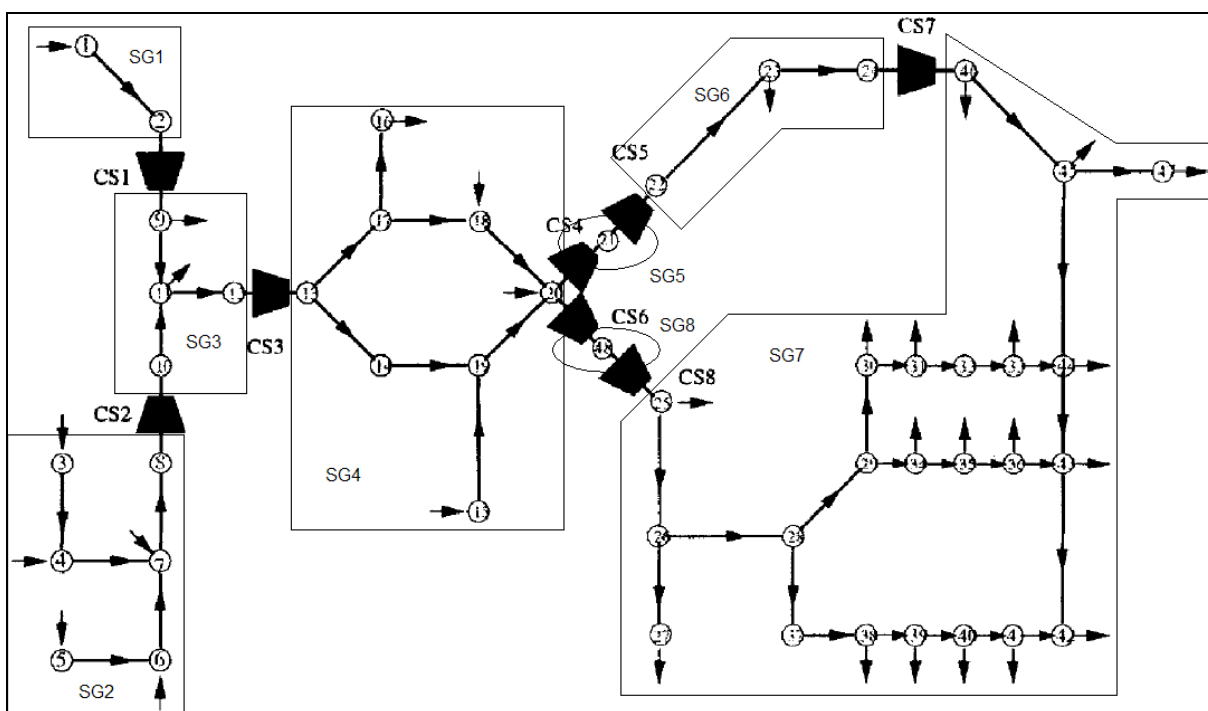


Figura 4.1(a). Exemplo de rede de distribuição de gás e sua respectiva rede reduzida (Fonte: WU, 2000 com modificações)

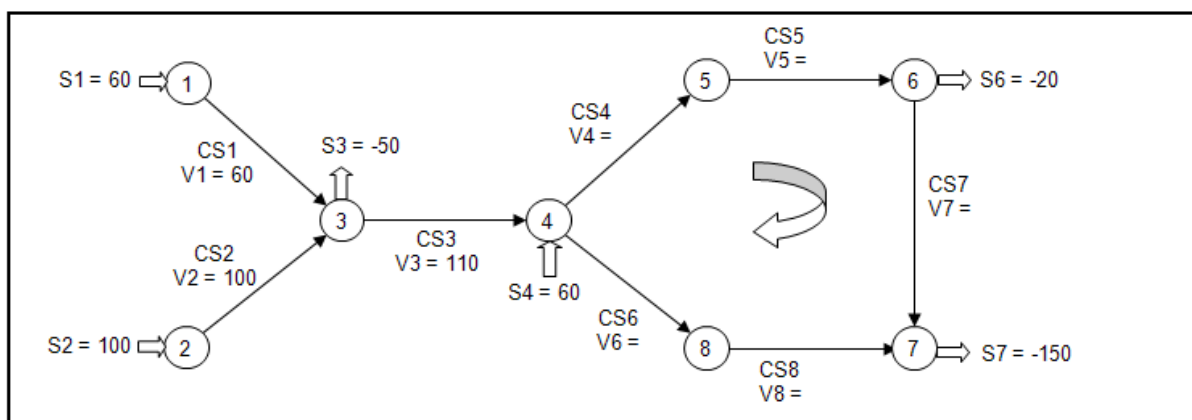


Figura 4.1(b). Rede reduzida do exemplo acima

Note que as sub-redes SG4, SG5, SG6, SG7 e SG8 (percorridas nesse sentido) constituem um ciclo da rede reduzida. Observe que o vetor  $v$ , neste caso, está composto de oito componentes  $v = (v_1, \dots, v_8)$ , onde  $v_i$  é a vazão massa a ser comprimida pela estação de compressão  $i = 1, \dots, 8$ . Além disso, observe que para cada possível par de vazões massa  $(v_4, v_6)$  o vetor  $v$  fica completamente determinado.

De forma que, fixando todos os possíveis pares  $(v_4, v_6)$  que satisfaçam o sistema  $Av = s$ , onde  $A$ , é a matriz de incidência do grafo que corresponde à rede reduzida, determinam-se as soluções do respectivo sistema; i.e., basta fixar o par  $(v_4, v_6)$  nesse sistema, para definir o vetor  $v = (v_1, \dots, v_8)$ .

Portanto, a estratégia para construir a lista de candidatos (restrita) é montar todos os pares  $(v_4, v_6)$  que satisfazem  $Av = s$ . Desde que existem infinitos pares desse tipo (para o caso cíclico), discretizar-se-á o espaço  $(v_4, v_6)$ , convenientemente, de forma a obter um número finito de tais pares.

Determinados esses pares, irá a associar-se um custo a cada par considerando a mesma pressão de sucção e qualquer pressão de descarga (preferivelmente, pressões de descarga próximas), de forma que se possa formar uma lista de candidatos hierarquizada crescente para os mencionados pares. A partir disso, fazendo uso do parâmetro de gulosidade  $\alpha$ , montar-se-á a lista de candidatos restrita, donde se escolherão os candidatos da fase de construção do GRASP.

Portanto, escolhido um ponto  $(v_4, v_6)$  da LCR, se determina o vetor  $v = (v_1, \dots, v_8)$  completamente. Logo se distribuem as vazões  $u^T = (u_1^T, \dots, u_r^T)$  entre todas as sub-redes e se tenta encontrar o vetor de pressões  $p$ , a partir de uma sub-rede de referência (onde existe um vértice com uma pressão de referência



fixada). Assim, determinam-se nessa sub-rede as pressões correspondentes a todos os vértices (inclusive nos vértices de descarga e/ou de sucção desta sub-rede).

Logo, a partir de uma pressão de descarga (ou sucção) conhecida numa sub-rede (e a respectiva estação de compressão), tem-se a vazão da estação e a pressão de descarga (ou sucção), donde se pode tentar procurar uma pressão de sucção (ou descarga) que permita comprimir a respectiva vazão com as pressões especificadas (com custo mínimo).

Se tais pressões existirem, dentre os limites estabelecidos, o vetor  $(v^T, u^T)$  estará viabilizado, constituindo a solução  $(v^T, u^T, p^T)$ . Caso contrário o vetor de vazões  $(v^T, u^T)$  não será possível de ser escoado. Note que ao encontrar o vetor  $(v^T, u^T, p^T)$ , encontra-se simultaneamente o menor custo para comprimir  $v = (v_1, \dots, v_8)$  e as respectivas configurações de compressores das estações.

Portanto, encontra-se, ao mesmo tempo, um custo associado ao ponto  $(v^T, u^T, p^T)$ .

Uma vez determinado o ponto  $(v^T, u^T, p^T)$ , seu custo (e as respectivas configurações das estações de compressão), passa-se a busca local, que consiste em variar o vetor  $v = (v_1, \dots, v_8)$ , considerando variações de  $(v_4, v_6)$ , da seguinte forma:  $(\hat{v}_4, \hat{v}_6) = (v_4 + \Delta, v_6 - \Delta)$  e  $(\tilde{v}_4, \tilde{v}_6) = (v_4 - \Delta, v_6 + \Delta)$ , para logo gerar os vizinhos associados  $\hat{v} = (\hat{v}_1, \dots, \hat{v}_8)$  e  $\tilde{v} = (\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_8)$ .

Logo, determinam-se as respectivas distribuições de vazão  $\hat{u}^T = (\hat{u}_1^T, \dots, \hat{u}_r^T)$  e  $\tilde{u}^T = (\tilde{u}_1^T, \dots, \tilde{u}_r^T)$  e como anteriormente, se determina a existência dos correspondentes vetores de pressão (considerando as mesmas configurações de compressores já estabelecidas para a solução  $(v^T, u^T, p^T)$ ), de forma a encontrar

os vizinhos viáveis  $(\hat{v}^T, \hat{u}^T, \hat{p}^T)$  e  $(\tilde{v}^T, \tilde{u}^T, \tilde{p}^T)$  - que possuem as mesmas configurações de compressores.

Assim, provavelmente, conta-se agora, com três pontos viáveis (com as mesmas configurações de compressores) e seus respectivos custos. Considera-se a solução de menor custo e se volta à lista de candidatos restrita, para “construir” uma nova solução aleatória.

O critério de parada aqui considerado consiste na não mudança de ponto viável durante três iterações consecutivas. O pseudocódigo correspondente ao algoritmo descrito se mostra no próximo capítulo.

Como exemplos de aplicação, temos as redes que Wu et al. (2000) utilizaram, acrescentando as modificações de Jubini (2008) e adaptando a essas redes os conceitos de Azeredo (2008), onde se considera que as estações de compressão possuem dois tipos de compressores, tipo A com menor capacidade e tipo B com maior capacidade, devendo-se dividir entre eles uma vazão massa  $\nu$  sujeita aos limites de pressões de sucção  $p_s$  e descarga  $p_d$ .

É claro que existem infinitas formas de dividir a vazão entre esses compressores, porém os compressores do tipo B podem possuir uma melhor eficiência em relação ao tipo A.

Deve-se observar que a curva de eficiência (Figura 4.2) de um compressor começa a cair a partir da utilização de certo valor da variável  $\frac{Q}{S}$ , o que faz com que aumente o custo, mas, eventualmente, a perda da eficiência do compressor com maior capacidade causa menos impacto no custo do que o de menor capacidade, note que a maior curva é do compressor tipo B.

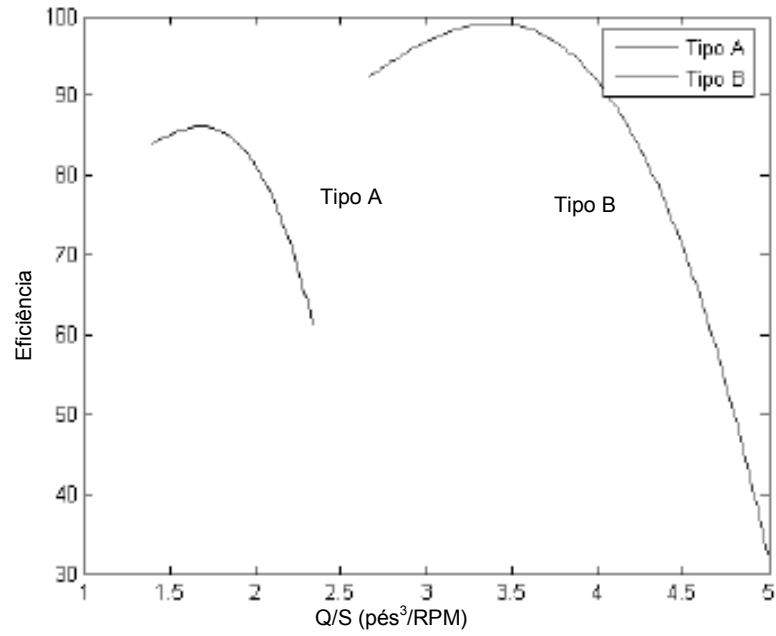


Figura 4.2: Eficiência  $\eta$  para os compressores de tipo A e tipo B (Fonte: AZEREDO, 2008)

## CAPÍTULO 5

### PSEUDOCÓDIGO GRASP - EXEMPLOS E RESULTADOS

Neste capítulo se apresentam os pseudocódigos que foram utilizados para a implementação do algoritmo descrito no Capítulo 4, os exemplos que foram testados e os resultados obtidos.

#### 5.1. PSEUDOCÓDIGOS

A seguir apresenta-se o pseudocódigo utilizado para determinar a viabilidade de um ponto  $(v, p_s, p_d)$  em relação a um dado compressor (AZEREDO, 2008).

#### **Pseudocódigo 1** - Viabilidade de $(v, p_s, p_d)$ para um compressor

Passo 1. Determinar os dados de entrada:

- Características do compressor (definindo os coeficientes das relações (3.1)-(3.4) para o compressor, como na Seção 3.1) e limites  $[p_s^L, p_s^U]$  para a pressão de sucção;
- Vazão massa e pressões de sucção e descarga a serem processadas,  $(v, p_s, p_d)$ .

Passo 2. Se  $p \notin [p_s^L, p_s^U]$ , Parar! O ponto  $(v, p_s, p_d)$  não é viável para o compressor. Caso contrário, em função das relações (3.1)-(3.8), definir as funções  $H^L(Q)$  e  $H^U(Q)$  (limites inferior e superior para  $H$  como função de  $Q$ , para  $S$  fixo) e definir as relações (3.10)-(3.13) que determinam  $D^{unit}$ , encontrando  $V^L, V^U, G^L(v/p_s)$  e  $G^U(v/p_s)$ .

Passo 3. Se  $V^L \leq \frac{v}{p_s} \leq V^U$  e  $G^L\left(\frac{v}{p_s}\right) \leq \frac{p_d}{p_s} \leq G^U\left(\frac{v}{p_s}\right)$ , então o ponto  $(v, p_s, p_d)$  é viável para o compressor. Caso contrário,  $(v, p_s, p_d)$  não é viável para o compressor. Parar!

Substituindo, o Passo 2 e o Passo 3 do Algoritmo 1, este pode ser usado para o cálculo de viabilidade de um ponto  $(v, p_s, p_d)$  em relação ao domínio aproximado poliedralmente (ver Figura 5.1).

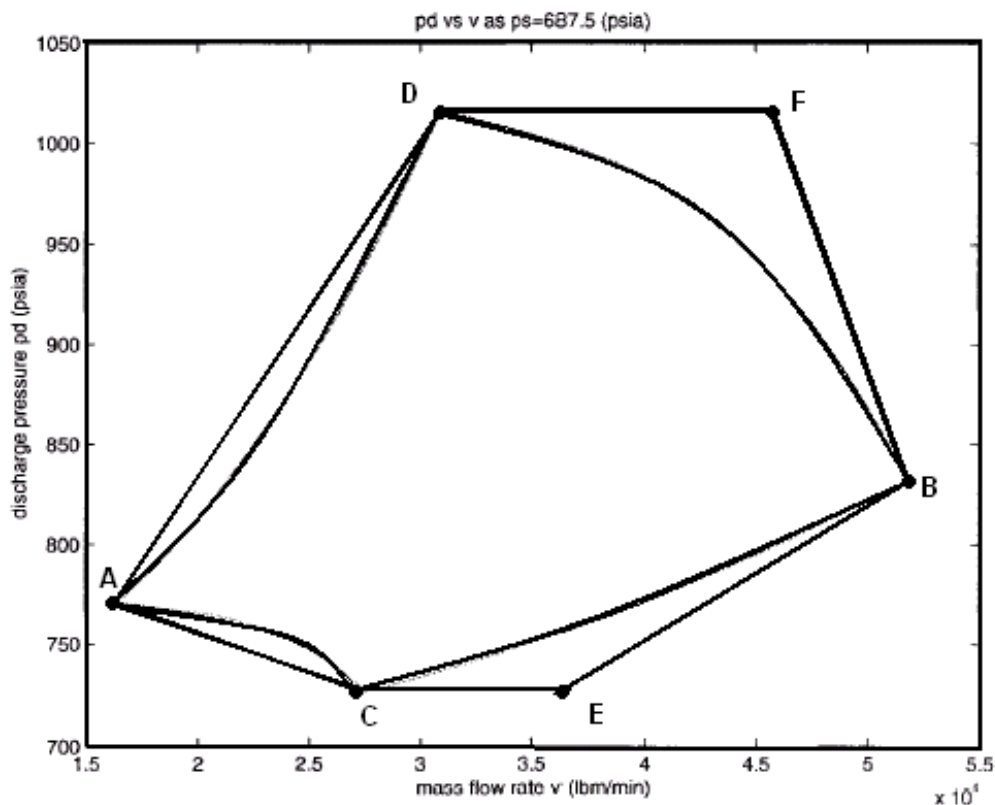


Figura 5.1: Aproximação linear externa do contorno (arco ACBD) (Fonte: AZEREDO, 2008)

Note que, na Figura 5.1, as curvas AC e CB correspondem ao gráfico da função  $G^L(q)$  (diga-se,  $G_1^L(q)$  e  $G_2^L(q)$ , respectivamente). Analogamente, as curvas AD e DB correspondem ao gráfico da função  $G^U(q)$  (diga-se,  $G_1^U(q)$  e  $G_2^U(q)$ , respectivamente). Assim, os pontos A, B, C, D e F, na Figura 5.1, podem ser encontrados determinando às interseções das respectivas curvas.

**Pseudocódigo 1.1** - Viabilidade de  $(v, p_s, p_d)$  para um compressor aproximado

Passo 1. Determinar os dados de entrada:

- Características do compressor (definindo os coeficientes das relações (3.1)-(3.4) para o compressor, como na Seção 3.1) e limites  $[p_s^L, p_s^U]$  para a pressão de sucção;
- Vazão massa e pressões de sucção e descarga a serem processadas,  $(v, p_s, p_d)$ .

Passo 2. Se  $p \notin [p_s^L, p_s^U]$ , Parar! O ponto  $(v, p_s, p_d)$  não é viável para o compressor. Caso contrário, em função das relações (3.1)-(3.8), definir as funções  $H^L(Q)$  e  $H^U(Q)$  (limites inferior e superior para  $H$ , função de  $Q$ , para  $S$  fixo) e definir as relações (3.10)-(3.13) que determinam  $D^{unit}$ , encontrando  $V^L$ ,  $V^U$ ,  $G^L(v/p_s)$  e  $G^U(v/p_s)$ .

Passo 3. Determinar os pontos de corte  $A = Graf_{G_1^L(q)} \cap Graf_{G_1^U(q)}$ ,  $B = Graf_{G_2^L(q)} \cap Graf_{G_2^U(q)}$ ,  $C = Graf_{G_1^L(q)} \cap Graf_{G_1^U(q)}$  e  $D = Graf_{G_1^U(q)} \cap Graf_{G_2^U(q)}$  (onde  $Graf_{G(q)}$  denota o gráfico da função  $G$ ). Determine as derivadas de  $G_2^U(q)$  e  $G_2^L(q)$  no ponto B e determine os segmentos BF e BE.

Passo 4. Determine os coeficientes dos planos e verifique se  $(v, p_s, p_d)$  satisfaz essas desigualdades. Caso positivo, o ponto  $(v, p_s, p_d)$  é viável para o compressor aproximado. Caso contrário,  $(v, p_s, p_d)$  não é viável para o compressor aproximado. Parar!

Em continuação, apresenta-se o pseudocódigo para a determinação da viabilidade de um ponto  $(v, p_s, p_d)$  em relação a uma estação. Os cálculos do

domínio apresentam-se para o caso de uma estação com dois tipos de compressores, três compressores Tipo A e dois Tipo B.

**Pseudocódigo 2** - Viabilidade de  $(v, p_s, p_d)$  para uma estação de compressão

Passo 1. Determinar os dados de entrada:

- Características dos dois tipos de compressor (definindo os coeficientes das relações (3.16)-(3.19) para os compressores Tipo A e Tipo B, como na Seção 3.2) e limites  $[p_s^L, p_s^U]$  para a pressão de sucção;
- Número de compressores,  $K=5$  (Tipo A=3, Tipo B=2);
- Vazão massa e pressões de sucção e descarga a serem processadas,  $(v, p_s, p_d)$ ;

Passo 2. Se  $p \notin [p_s^L, p_s^U]$ , Parar! O ponto  $(v, p_s, p_d)$  não é viável para o compressor. Caso contrário, estabelecer, em função das matrizes de alocação, uma lista L de possíveis distribuições de  $v = (v_1, \dots, v_k)$ , a serem testadas; e, definir a lista  $L_{viáveis} = \phi$ ;

Passo 3. Encontrar, em função das características dos compressores de cada tipo, os domínios unitários  $D_A^{unit}$  e  $D_B^{unit}$ , domínios de um compressor Tipo A e Tipo B, respectivamente, usando o Algoritmo 1. Definir o domínio da estação,  $D_{estação}$ , de acordo com a relação (3.28);

Passo 4. Enquanto  $L \neq \phi$ ,

Escolher  $(v_1, \dots, v_k) \in L$  e verificar se  $((v_1, \dots, v_k) p_s, p_d) \in D_{estação}$ ;

Caso positivo,  $L_{viáveis} = L_{viáveis} \cup \{(v_1, \dots, v_k)\}$ ;

Fazer  $L = L \setminus \{(v_1, \dots, v_k)\}$ ;

Fim do Enquanto;

Passo 5. Se  $L_{viáveis} \neq \emptyset$ , então  $(v, p_s, p_d)$  é viável para estação; caso contrário,  $(v, p_s, p_d)$  não é viável para estação.

**Observação:**

Note que no Passo 4 se está verificando a viabilidade do ponto  $(v, p_s, p_d)$  para todas as configurações  $(v_1, \dots, v_k)$  definidas pela lista  $L$  de possíveis distribuições de  $v$  (Passo 2). É simples reformular o algoritmo anterior para determinar se um ponto  $(v, p_s, p_d)$  é viável para uma estação, dada certa configuração  $r \in \{0,1\}^5$ .

Para se calcular o mínimo custo de processar  $(v, p_s, p_d) \in D_{estação}$ , formule-se o seguinte algoritmo, para o caso de uma estação de compressão com cinco compressores, três de Tipo A e dois de Tipo B:

**Pseudocódigo 3 – Custo de compressão de uma estação generalizada**

Passo 1. Determinar os dados de entrada:

- Características dos dois tipos de compressor (definindo os coeficientes das relações (3.16)-(3.19) para os compressores Tipo A e Tipo B, como na Seção 3.2) e limites  $[p_s^L, p_s^U]$  para a pressão de sucção;
- Número de compressores,  $k = 5$  (Tipo A=3, Tipo B=2);
- Vazão massa e pressões de sucção e descarga a serem processadas,  $(v, p_s, p_d)$ ;
- Informar as matrizes de alocação.
- Fazer  $g = \infty$ .

Passo 2. Se  $p \notin [p_s^L, p_s^U]$ ,  $g(v, p_s, p_d) = g$  (o ponto  $(v, p_s, p_d)$  não é viável para o compressor). Parar!

Passo 3. Quer determinar o custo para uma configuração  $r \in \{0,1\}^5$  definida pelo usuário? Caso positivo, estabelecer, em função das matrizes de alocação, uma lista  $L$  de possíveis distribuições de  $v = (v_1, \dots, v_k)$ , a serem testadas onde os



compressores marcados com  $r_i = 0$  na configuração, não poderão ser usados i.e., recebem  $v_i = 0$ . Caso negativo (quando se precisa determinar o menor custo correspondente a todas as possíveis alocações de  $v$ ) estabelecer, em função das matrizes de alocação, uma lista  $L$  de possíveis distribuições de  $v$ ,  $(v_1, \dots, v_k)$ , a serem testadas;

Passo 4. Encontrar, em função das características dos compressores de cada tipo, os domínios unitários  $D_A^{unit}$  e  $D_B^{unit}$ , domínios de um compressor Tipo A e Tipo B, respectivamente, usando o Algoritmo 1. Definir o domínio da estação,  $D_{estação}$ , de acordo com a relação (3.28);

Passo 5. Enquanto  $L \neq \phi$ ,

Escolher  $(v_1, \dots, v_k) \in L$  e verificar se  $((v_1, \dots, v_k) p_s, p_d) \in D_{estação}$ ;

Caso positivo, calcular  $g1 = \sum_{i=1}^k g_i^{unit}(v_i, p_s, p_d)$ ;

Se  $g1 < g$ , fazer  $g = g1$ ;

Fazer  $L = L \setminus \{(v_1, \dots, v_k)\}$ ;

Fim do Caso positivo;

Fim do Enquanto;

Passo 6. Fazer  $g(v, p_s, p_d) = g$ .

(Se  $g(v, p_s, p_d) = \infty$ , o ponto  $(v, p_s, p_d) \notin D_{estação}$ ; i.e., não pode ser processado pelas estações de compressão). Parar!

### Observação:

O Algoritmo 3 pode ser considerado com a seguinte modificação: ao invés da função  $g_i^{unit}(v_i, p_s, p_d)$ , determinada pela relação (3.29), trabalhar com a função  $g_i^6(v_i, p_s, p_d)$ , definida pela relação (3.30). Nesse caso, ter-se-ia um algoritmo providenciando o valor da função custo aproximado da estação de compressão.

O pseudocódigo GRASP para estações de compressão com dois tipos de compressor, três Tipo A e dois Tipo B, pode ser formulado como segue:

#### **Pseudocódigo 4 – Minimização de custos em um gasoduto**

Passo 1. Determinar os dados de entrada do gasoduto:

- Matrizes de incidência  $A_l$  e  $A_m$ ;
- Características dos dutos e limites de pressão  $[p_s^L, p_s^U]$  nos nós;
- Características das estações de compressão: dois tipos de compressor (coeficientes das relações (3.16)-(3.19) para os compressores Tipo A e Tipo B, como na Seção 3.2);
- Informar dados necessários para rodar o Algoritmo 3 e um parâmetro  $\alpha \in (0,1)$  para determinação da lista de candidatos restrita com que os algoritmos GRASP trabalham.
- Fazer custo =  $\infty$ .

Passo 2. Pré-processamento do gasoduto:

- Montar a rede reduzida do gasoduto e determinar uma discretização de possíveis vetores  $v^T = (v_1, \dots, v_m)$ , distribuições de vazão massa, a serem, comprimidas pelas estações de compressão; construir uma lista  $L_{\text{candidatos}}$ , conformada por todos os vetores  $v$  assim determinados;
- Aplicar o Algoritmo 3 para determinar, se possível, pressões de sucção e custos de compressão para cada estação  $k = 1, \dots, m$ , processando a  $k$ -ésima parcela de  $v$ ; i.e, calcular

$$(p_s^k, p_d^k) \text{ e } g_k(v_k, p_s^k, p_d^k).$$

Os vetores  $v$  para os quais não seja possível encontrar as pressões  $(p_s^k, p_d^k)$ , necessárias para a compressão, serão declarados inviáveis e retirados da lista  $L_{\text{candidatos}}$ .

- Definir o custo total de compressor para cada vetor  $v$  determinado no Passo 2, como:

$$g(v, p_s, p_d) = \sum_{k=1}^m g_k(v_k, p_s^k, p_d^k),$$

onde  $(p_s^T, p_d^T) = (p_s^1, \dots, p_s^m, p_d^1, \dots, p_d^m)$  e ordenar a lista  $L_{\text{candidatos}}$  de forma crescente em relação a esses custos e considerar, mediante o parâmetro  $\alpha \in (0,1)$ , a lista de candidatos restrita  $L_{\text{restrita}}$ .

Passo 3. Escolher aleatoriamente  $v \in L_{\text{restrita}}$  e determinar o vetor  $(u, p)$ , com  $u$  vazões massa escoando pelos dutos depois da compressão e  $p$  vetor das correspondentes pressões:

3.1 Se  $L_{\text{restrita}} \neq \emptyset$

3.2 Encontrar um vetor  $u$ , solucionando o sistema (2.5) como explicado em Jubini (2008):

$$A_l u = s - A_m v;$$

Se o vetor  $u$  não existir, ir para a sentença 3.7;

3.3 Determinar o vetor de pressões  $p_m$  na sub-rede correspondente à pressão de referência, solucionando:

$$A_l^T p_m^2 = \phi(u_m),$$

onde  $u_m$  é o vetor de vazão massa escoando na respectiva rede (se o vetor  $p_m$  não existir, ir para a sentença 3.7); fazer  $k = m$ ;

3.4 Calcular, usando o Algoritmo 3, pressões de sucção para as estações associadas à sub-rede  $k$ , calcular o custo de compressão correspondente e a respectiva configuração da estação;

3.5 Calcular  $A_l^T p_k^2 = \phi(u_k)$ , e voltar para 3.5 até esgotar as sub-redes do gasoduto.

3.6 Calcular o custo de processar no gasoduto o ponto viável  $(v, u, p)$ :

$$g(v, u, p) = \sum_{k=1}^m g_k(v_k, p_s^k, p_d^k); \quad \text{Ir}$$

para 3.8;

3.7 Não existe um vetor  $(v, u, p)$  viável para o gasoduto, fazer:

$$L_{restrita} = L_{restrita} - \{\gamma\}.$$

Ir para 3.1;

3.8 Fim do Se, 3.1.

3.9 Se  $L_{restrita} = \phi$ , Parar! O gasoduto não pode atender as especificações demandadas.

Passo 4. Busca de custos menores na vizinhança do ponto  $(v, u, p)$  :

- Construir uma vizinhança Viz de  $(v, u, p)$  considerando variações de  $v$  e  $p$ , com as configurações fixas, determinadas no Passo 3, e calcular os respectivos custos dos pontos vizinhos:  $g(v_{viz}, u_{viz}, p_{viz})$ , onde  $(v_{viz}, u_{viz}, p_{viz}) \in Viz$ ;

- Fazer

$$g(\hat{v}, \hat{u}, \hat{p}) = \min_{(v_{viz}, u_{viz}, p_{viz}) \in Viz} \{g(v, u, p), g(v_{viz}, u_{viz}, p_{viz})\};$$

- Se não foi atingido o critério de parada do algoritmo, voltar ao Passo 3. Caso contrário, ir ao Passo 5.

Passo 5. Busca de melhores pressões para o melhor ponto atual ponto  $(\hat{v}, \hat{u}, \hat{p})$  :

- Mantendo fixo o vetor  $(\hat{v}, \hat{u})$  e as correspondentes configurações, gerar uma vizinhança de  $(\hat{v}, \hat{u}, \hat{p})$ , mudando as pressões em passos pequenos (adequados), a partir de  $\hat{p}$ , a fim de tentar encontrar um vetor  $(\hat{v}, \hat{u}, \tilde{p})$  tal que  $g(\hat{v}, \hat{u}, \tilde{p}) < g(\hat{v}, \hat{u}, \hat{p})$ .
- Parar! O ponto  $(\hat{v}, \hat{u}, \tilde{p})$  e o custo  $g(\hat{v}, \hat{u}, \tilde{p})$  associado são o melhor ponto e o melhor custo encontrados para o gasoduto, respectivamente. A melhor configuração encontrada para o gasoduto corresponde ao ponto  $(\hat{v}, \hat{u}, \tilde{p})$ .
- Fim.

O Algoritmo 4 foi testado nos dois exemplos que seguem com seus dados e resultados.

## 5.2. EXEMPLO 1

Este exemplo corresponde a uma rede em árvore, com 10 nós, seis dutos e três estações de compressão, como descrito na Figura 5.2.

A rede inclui um nó de fornecimento (nó 1)  $s_1 = 800$  e cinco nós de entrega (nós 5, 6, 7, 9 e 10), com  $s_5 = s_9 = -100$ ,  $s_6 = s_7 = -50$  e  $s_{10} = -300$  MMSCFD (Million Standard Cubic Feet per Day of gás - Milhões de pés cúbicos de gás por dia).

Os limites inferiores de pressão estão dados por,  $p_1^L = p_2^L = p_3^L = p_6^L = p_7^L = p_9^L = 450$ ,  $p_4^L = 500$ ,  $p_5^L = p_{10}^L = 400$  e  $p_8^L = 550$  psia (pounds-force per square inch absolute - libras-força por polegada quadrada absoluta). As vazões que serão comprimidas pelos compressores serão: CS1 = 800 e CS2 = CS3 = 400.

Os limites superiores de pressão estão dados por  $p_1^U = 550$  e  $p_i^U = 800$ , para todo  $i > 1$ . O conjunto de dutos é  $\{(2,3), (4,5), (5,6), (5,7), (8,9), (9,10)\}$  com comprimento de 50 milhas, diâmetro interno de 3 pés e fator de atrito 0.0085, para todos os dutos. Todas as estações de compressão  $\{(1,2), (3,4), (3,8)\}$  possuem cinco compressores centrífugos, três do Tipo A e dois do Tipo B, dispostos em paralelo (Figura 5.1).

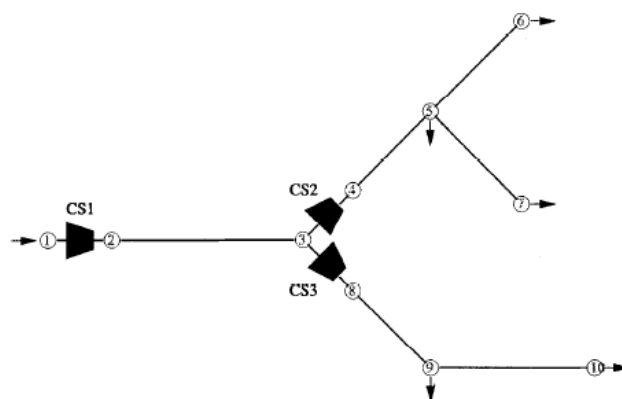


Figura 5.2: Exemplo de rede sem ciclo (Fonte: WU et al., 2000)

Como não se podem variar os fluxos dados como é feito no exemplo de rede com ciclo (seguinte exemplo) e o objetivo é minimizar o custo, buscou-se então refinar as pressões dessa rede, de modo que se obtenha um custo melhorado.

Porém, só foi viável uma pequena variação na pressão  $p_1$ . Os resultados obtidos seguem abaixo:

$p_1$	455	$p_6$	565,9601
$p_2$	505,7931	$p_7$	565,9601
$p_3$	505	$p_8$	566,162
$p_4$	566,162	$p_9$	565,985
$p_5$	565,9850	$p_{10}$	565,8854

Tabela 5.1: Pressões da Rede sem ciclo

Estação	CS1	CS2	CS3	Custo Total
Configuração	1 0 0 0 0	1 0 0 0 0	1 0 0 0 0	
Custos	1,7368	0,70364	0,70364	<b>3,14408 * 10<sup>6</sup></b>

Tabela 5.2: Custos das estações de compressão

### Refinando as Pressões para encontrar um custo menor:

$p_1$	459	$p_6$	565,9601
$p_2$	505,7931	$p_7$	565,9601
$p_3$	505	$p_8$	566,162
$p_4$	566,162	$p_9$	565,985
$p_5$	565,9850	$p_{10}$	565,8854

Tabela 5.3: Pressões refinadas da Rede sem ciclo

Estação	CS1	CS2	CS3	Custo Total
Configuração	1 0 0 0 0	1 0 0 0 0	1 0 0 0 0	
Custos	1,6342	0,70364	0,70364	<b>3,0415 * 10<sup>6</sup></b>

Tabela 5.4: Custo mínimo das estações de compressão

### 5.3. EXEMPLO 2

Este exemplo corresponde a uma rede mais complexa, com 48 nós, 43 dutos e 8 estações, como descrito na Figura 5.3. A rede inclui vários ciclos, de forma que

as vazões não podem ser determinadas de maneira única, porém só há um ciclo que representa um problema. Quando é feita a rede reduzida esse ciclo fica mais visível, pois ele está envolvido nas estações de compressão.

A seguir têm-se a rede com ciclo, sua divisão em sub-grafos e a rede reduzida desse exemplo, os dados correspondentes às fontes podem ser vistos na tabela 5.5 e as configuração dos dutos, na Tabela 5.6. Os limites de pressões para todos os nós são  $[50, 1500]$ , exceto para os nós 1  $[850, 1250]$  e 3  $[950, 1100]$ .

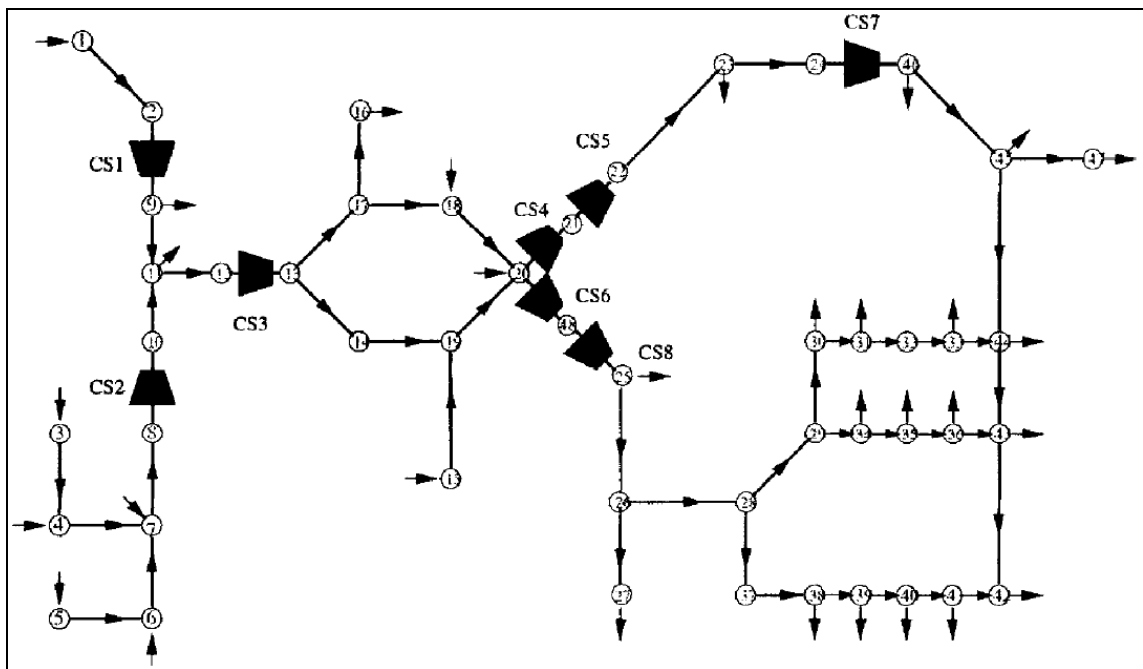


Figura 5.3: Exemplo de rede com ciclo – Exemplo 2 (Fonte: WU et al., 2000)

$i$	$S_i$	$i$	$S_i$	$i$	$S_i$	$i$	$S_i$
1	+ 60	13	0	25	- 55	37	0
2	0	14	0	26	0	38	- 3
3	+ 20	15	+ 10	27	- 5	39	- 3
4	+ 20	16	- 5	28	0	40	- 3
5	+ 20	17	0	29	0	41	- 3
6	+ 20	18	+ 10	30	- 3	42	- 4
7	+ 20	19	0	31	- 3	43	- 4
8	0	20	+ 45	32	0	44	- 4
9	- 40	21	0	33	- 3	45	- 10
10	0	22	0	34	- 3	46	- 20
11	- 10	23	- 20	35	- 3	47	- 18
12	0	24	0	36	- 3	48	0

Tabela 5.5: Fontes da Rede – exemplo 2

Pipe	$L$	$d$	$f$	Pipe	$L$	$d$	$f$
(1, 2)	10.1015	1.5	0.0108	(30, 31)	5.0507	1.0	0.0130
(3, 4)	4.5175	1.5	0.0108	(31, 32)	4.5175	1.0	0.0130
(4, 7)	5.1508	1.5	0.0108	(32, 33)	4.5175	1.0	0.0130
(5, 6)	5.1508	1.0	0.0130	(33, 34)	4.5175	1.0	0.0130
(6, 7)	5.1508	1.5	0.0108	(29, 34)	5.0507	1.0	0.0130
(7, 8)	5.1508	2.0	0.0090	(34, 35)	4.5175	1.0	0.0130
(9, 11)	10.1015	1.5	0.0108	(35, 36)	4.5175	1.0	0.0130
(10, 11)	5.1508	2.0	0.0090	(36, 43)	4.5175	1.0	0.0130
(11, 12)	10.1015	3.0	0.0085	(28, 37)	5.0507	1.0	0.0130
(13, 14)	10.1015	1.5	0.0108	(37, 38)	5.0507	1.0	0.0130
(14, 19)	10.1015	1.5	0.0108	(38, 39)	5.0507	1.0	0.0130
(15, 19)	10.1015	1.5	0.0108	(39, 40)	5.0507	1.0	0.0130
(19, 20)	10.1015	1.5	0.0108	(40, 41)	5.0507	1.0	0.0130
(13, 17)	10.1015	2.0	0.0095	(41, 42)	5.0507	1.0	0.0130
(17, 16)	10.1015	1.5	0.0108	(43, 42)	4.5175	1.0	0.0130
(17, 18)	10.1015	2.0	0.0095	(44, 43)	4.5175	1.0	0.0130
(18, 20)	10.1015	2.0	0.0095	(45, 44)	8.3299	1.5	0.0108
(25, 26)	10.1015	1.5	0.0108	(45, 47)	5.7143	2.0	0.0090
(26, 27)	7.1429	1.5	0.0108	(46, 45)	11.5175	2.0	0.0090
(26, 28)	10.1015	1.5	0.0108	(22,23)	11.5175	2.0	0.0090
(28, 29)	5.0507	1.0	0.0130	(23, 24)	11.4286	2.0	0.0090
(29, 30)	4.5175	1.0	0.0130				

Tabela 5.6: Dados dos dutos – exemplo 2 (Fonte: WU et al., 2000)

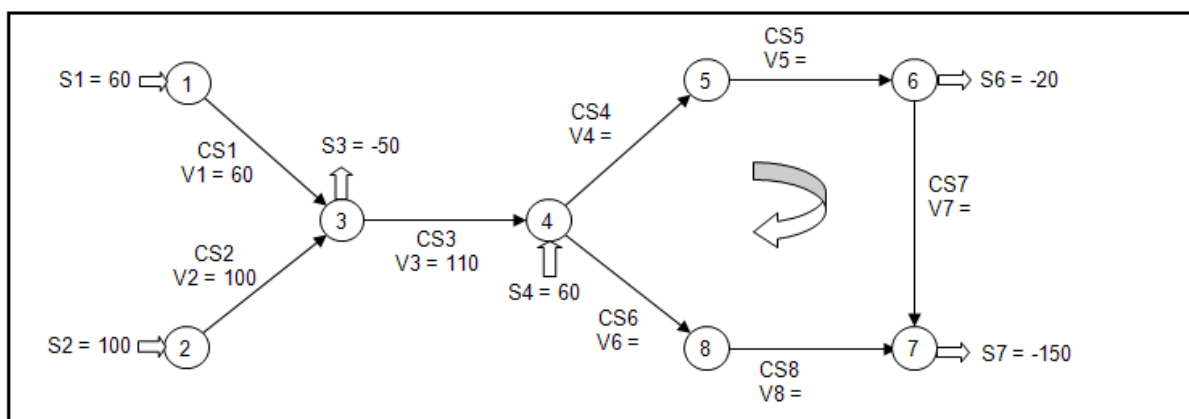


Figura 5.4: Rede reduzida – Exemplo 2

Onde  $v_1$ ,  $v_2$  e  $v_3$  estão fixados e os demais  $v$ 's seguem as seguintes restrições com esses determinados  $S$ :  $20 \leq v_4 \leq 170$ ,  $0 \leq v_6 \leq 150$ ,  $v_4 = v_5$ ,  $v_6 = v_8$ ,  $v_4 + v_6 = 170$ ,  $v_8 + v_7 = 150$ .

A partir desses dados, formula-se uma tabela com as possíveis configurações de fluxos para a divisão do ciclo em  $v_4$  e  $v_6$ , depois de viabilizar os fluxos com



pressões de sucção e descarga arbitrárias, calcula-se o custo e coloca-se em ordem crescente.

Essa tabela é o ponto de partida para o método GRASP, pois a partir dela escolhe-se aleatoriamente uma configuração de fluxo que determinará as demais configurações das estações.

Entre todas as possibilidades de se dividir os fluxos entre  $v_4$  e  $v_6$ , define-se um  $\alpha$  de opções da lista, no caso em questão adotou-se um  $\alpha = 0,3$ , também testou-se com  $\alpha = 0,5$  e  $\alpha = 07$ .

Nº	$v_4$	$p_s(20)$	$p_d(21)$	Custo	$v_6$	$p_s(20)$	$p_d(48)$	Custo	Total	Iter.
1	<b>86</b>	1010	1200	2,8009	<b>84</b>	1010	1200	2,6997	5,5006	<b>4</b>
2	<b>83</b>	1010	1200	2,6508	<b>87</b>	1010	1200	2,8533	5,5041	<b>1</b>
3	<b>89</b>	1010	1200	2,9616	<b>81</b>	1010	1200	2,5567	5,5183	<b>3</b>
4	<b>80</b>	1010	1200	2,5114	<b>90</b>	1010	1200	3,0175	5,5289	
5	<b>92</b>	1010	1200	3,1328	<b>78</b>	1010	1200	2,42450	5,5573	<b>2</b>
6	<b>77</b>	1010	1200	2,3828	<b>93</b>	1010	1200	3,19220	5,5750	
7	<b>95</b>	1010	1200	3,3143	<b>75</b>	1010	1200	2,30300	5,6173	
8	<b>74</b>	1010	1200	2,2648	<b>96</b>	1010	1200	3,37700	5,6418	
9	<b>98</b>	1010	1200	3,5059	<b>72</b>	1010	1200	2,19190	5,6978	<b>5</b>
10	<b>71</b>	1010	1200	2,1571	<b>99</b>	1010	1200	3,57190	5,7290	
11	<b>101</b>	1010	1200	3,7073	<b>69</b>	1010	1200	2,0907	5,7980	
12	<b>68</b>	1010	1200	2,059	<b>102</b>	1010	1200	3,77670	5,8357	
13	<b>104</b>	1010	1200	3,9185	<b>66</b>	1010	1200	1,9987	5,9172	
14	<b>65</b>	1010	1200	1,9698	<b>105</b>	1010	1200	3,98960	5,9594	<b>6</b>
<b>15</b>	<b>107</b>	<b>1010</b>	<b>1200</b>	<b>4,1264</b>	<b>63</b>	<b>1010</b>	<b>1200</b>	<b>1,9019</b>	<b>6,0283</b>	<b>Alfa 0,3</b>
16	<b>62</b>	1010	1200	1,8656	<b>108</b>	1010	1200	4,19610	6,0617	
17	<b>110</b>	1010	1200	4,3379	<b>60</b>	1010	1200	1,7969	6,1348	
18	<b>59</b>	1010	1200	1,7645	<b>111</b>	1010	1200	4,41000	6,1745	
19	<b>113</b>	1010	1200	4,5567	<b>57</b>	1010	1200	1,7032	6,2599	
20	<b>56</b>	1010	1200	1,6742	<b>114</b>	1010	1200	4,69050	6,3647	
21	<b>116</b>	1010	1200	4,8571	<b>54</b>	1010	1200	1,6062	6,4633	
22	<b>53</b>	1010	1200	1,5693	<b>117</b>	1010	1200	4,94190	6,5112	
23	<b>119</b>	1010	1200	5,1143	<b>51</b>	1010	1200	1,50040	6,6147	
24	<b>50</b>	1010	1200	1,4684	<b>120</b>	1010	1200	5,20200	6,6704	

25	<b>122</b>	1010	1200	5,3803	<b>48</b>	1010	1200	1,4089	6,7892	Alfa 0,5
26	<b>47</b>	1010	1200	1,3813	<b>123</b>	1010	1200	5,47090	6,8522	
27	<b>125</b>	1010	1200	5,6549	<b>45</b>	1010	1200	1,3185	6,9734	
28	<b>44</b>	1010	1200	1,2784	<b>126</b>	1010	1200	5,74830	7,0267	
29	<b>128</b>	1010	1200	5,9378	<b>42</b>	1010	1200	1,2049	7,1427	
30	<b>41</b>	1010	1200	1,1715	<b>129</b>	1010	1200	6,03400	7,2055	
31	<b>131</b>	1010	1200	6,2291	<b>39</b>	1010	1200	1,1109	7,3400	
32	<b>38</b>	1010	1200	1,0835	<b>132</b>	1010	1200	6,32800	7,4115	
33	<b>134</b>	1010	1200	6,5285	<b>36</b>	1010	1200	1,0338	7,5623	
34	<b>35</b>	1010	1200	1,0112	<b>135</b>	1010	1200	6,63010	7,6413	
35	<b>20</b>	1010	1200	0,5700	<b>150</b>	1010	1200	9,33260	9,9026	Alfa 0,7

Tabela 5.7: Possíveis configurações de fluxos para  $\nu_4$  e  $\nu_6$ .

Com  $\alpha = 0,3$  as opções de configurações de fluxo que foram selecionadas aleatoriamente foram às alternativas 2, 5 3, 1, 9 e 14, respectivamente; com  $\alpha = 0,5$  foram 23, 20, 9, 14, 5, 3, 16, 1 e 4, respectivamente; quando se utilizou  $\alpha = 0,7$  as opções começaram a se repetir, em ambos os  $\alpha$  adotados, o resultado convergiu para a mesma solução, porém, quando se utilizou  $\alpha = 0,3$  a solução foi encontrada de maneira mais rápida.

Foi comprovado pelos resultados obtidos que selecionando aleatoriamente as configurações da lista com  $\alpha = 0,3$ ,  $\alpha = 0,5$  e  $\alpha = 0,7$ , as configurações que se encontram em  $\alpha = 0,3$  ou próximas a este intervalo são melhores que as opções que estão dentro do intervalo dos outros  $\alpha$ , ou seja, apresentam menores custos.

Portanto adotou-se  $\alpha = 0,3$  encontrando assim, resultados bons e de maneira mais rápida. Os resultados obtidos para o exemplo 2 com  $\alpha = 0,3$  estão tabelados em seguida.

## Resultados

		TESTE LISTA RESTRITA ALFA			ITERAÇÃO 1			
<b>Alternativa 2 (lista rest)</b>								
$v_1 = 60$	$v_2 = 100$	$v_3 = 110$	$v_4 = 83$	$v_5 = 83$	$v_6 = 87$	$v_7 = 63$	$v_8 = 87$	
$p_s(2) = 935$	$p_s(8) = 915$	$p_s(12) = 980$	$p_s(20) = 1050$	$p_s(21) = 1130$	$p_s(20) = 1050$	$p_s(24) = 1205$	$p_s(48) = 1135$	
$p_d(9) = 980,5272$	$p_d(10) = 980,9867$	$p_d(13) = 1052,9$	$p_d(21) = 1130$	$p_d(22) = 1206,5$	$p_d(48) = 1135$	$p_d(46) = 1280$	$p_d(25) = 1281,4$	
0 0 0 1 1	1 1 1 1 1	1 1 1 1 1	1 1 0 1 1	0 0 0 1 1	1 1 0 1 1	0 0 0 1 1	1 1 1 1 1	Custo
1,4387	2,9424	3,3738	1,8542	2,666	2,1031	1,2921	2,0822	17,7525*10 <sup>6</sup>
		<b>VIZINHOS <math>v_4</math></b>						
<b>Alternativa 2 (<math>v_4 - 1</math>)</b>								
$v_1 = 60$	$v_2 = 100$	$v_3 = 110$	$v_4 = 82$	$v_5 = 82$	$v_6 = 88$	$v_7 = 62$	$v_8 = 88$	
$p_s(2) = 940$	$p_s(8) = 920$	$p_s(12) = 985$	$p_s(20) = 1055$	$p_s(21) = 1130$	$p_s(20) = 1055$	$p_s(24) = 1200$	$p_s(48) = 1145$	
$p_d(9) = 985,5245$	$p_d(10) = 985,9817$	$p_d(13) = 1057,9$	$p_d(21) = 1130$	$p_d(22) = 1201,5$	$p_d(48) = 1145$	$p_d(46) = 1280$	$p_d(25) = 1281,6$	
0 0 0 1 1	1 1 1 1 1	1 1 1 1 1	1 1 0 1 1	0 0 0 1 1	1 1 0 1 1	0 0 0 1 1	1 1 1 1 1	Custo
1,4267	2,9179	3,3517	1,7455	2,5258	2,191	1,2838	2,2251	17,6675*10 <sup>6</sup>
<b>Alternativa 2 (<math>v_4 + 1</math>)</b>								
$v_1 = 60$	$v_2 = 100$	$v_3 = 110$	$v_4 = 84$	$v_5 = 84$	$v_6 = 86$	$v_7 = 64$	$v_8 = 86$	
$p_s(2) = 945$	$p_s(8) = 925$	$p_s(12) = 990$	$p_s(20) = 1060$	$p_s(21) = 1140$	$p_s(20) = 1060$	$p_s(24) = 1215$	$p_s(48) = 1145$	
$p_d(9) = 990,5219$	$p_d(10) = 990,9768$	$p_d(13) = 1062,8$	$p_d(21) = 1140$	$p_d(22) = 1216,5$	$p_d(48) = 1145$	$p_d(46) = 1280$	$p_d(25) = 1281,2$	
0 0 0 1 1	1 1 1 1 1	1 1 1 1 1	1 1 0 1 1	0 0 0 1 1	1 1 0 1 1	0 0 0 1 1	1 1 1 1 1	Custo*
1,4149	2,8937	3,3238	1,8744	2,6982	2,0218	1,2545	2,1285	17,6098*10 <sup>6</sup>

Tabela 5.8: Primeira iteração do Algoritmo 4, ponto inicial ( $v_4 = 83$  e  $v_6 = 87$ )

**Melhor resultado: Custo atual = custo alternativa 2 ( $v_4 + 1$ )**

		TESTE LISTA RESTRITA ALFA			ITERAÇÃO 2			
<b>Alternativa 5 (lista rest)</b>								
$v_1 = 60$	$v_2 = 100$	$v_3 = 110$	$v_4 = 92$	$v_5 = 92$	$v_6 = 78$	$v_7 = 72$	$v_8 = 78$	
$p_s(2) = 955$	$p_s(8) = 935$	$p_s(12) = 1000$	$p_s(20) = 1070$	$p_s(21) = 1145$	$p_s(20) = 1070$	$p_s(24) = 1230$	$p_s(48) = 1140$	
$p_d(9) = 1000,5$	$p_d(10) = 1000,1$	$p_d(13) = 1072,8$	$p_d(21) = 1145$	$p_d(22) = 1231,8$	$p_d(48) = 1140$	$p_d(46) = 1280,1$	$p_d(25) = 1279,7$	
0 0 0 1 1	1 1 1 1 1	1 1 1 1 1	1 1 1 1 1	1 1 0 1 1	0 0 0 1 1	0 0 0 1 1	1 1 1 1 1	<b>Custo*</b>
1,3914	2,8295	3,2732	1,816	2,0893	2,4488	1,4416	1,8283	<b>17,1181*10<sup>6</sup></b>
		<b>VIZINHOS <math>v_4</math></b>						
<b>Alternativa 5 (<math>v_4 - 1</math>)</b>								
$v_1 = 60$	$v_2 = 100$	$v_3 = 110$	$v_4 = 91$	$v_5 = 91$	$v_6 = 79$	$v_7 = 71$	$v_8 = 79$	
$p_s(2) = 950$	$p_s(8) = 930$	$p_s(12) = 995$	$p_s(20) = 1065$	$p_s(21) = 1145$	$p_s(20) = 1065$	$p_s(24) = 1230$	$p_s(48) = 1135$	
$p_d(9) = 995,5192$	$p_d(10) = 995,9718$	$p_d(13) = 1067,8$	$p_d(21) = 1145$	$p_d(22) = 1231,8$	$p_d(48) = 1135$	$p_d(46) = 1280,1$	$p_d(25) = 1279,9$	
0 0 0 1 1	1 1 1 1 1	1 1 1 1 1	1 1 1 1 1	1 1 0 1 1	0 0 0 1 1	0 0 0 1 1	1 1 1 1 1	<b>Custo</b>
1,4032	2,8698	3,2983	1,8404	2,0411	2,5353	1,3989	1,9224	<b>17,3094*10<sup>6</sup></b>
<b>Alternativa 5 (<math>v_4 + 1</math>)</b>								
$v_1 = 60$	$v_2 = 100$	$v_3 = 110$	$v_4 = 93$	$v_5 = 93$	$v_6 = 77$	$v_7 = 73$	$v_8 = 77$	
$p_s(2) = 940$	$p_s(8) = 920$	$p_s(12) = 985$	$p_s(20) = 1055$	$p_s(21) = 1135$	$p_s(20) = 1055$	$p_s(24) = 1225$	$p_s(48) = 1125$	
$p_d(9) = 985,5245$	$p_d(10) = 985,9817$	$p_d(13) = 1057,9$	$p_d(21) = 1135$	$p_d(22) = 1226,9$	$p_d(48) = 1125$	$p_d(46) = 1280,1$	$p_d(25) = 1279,5$	
0 0 0 1 1	1 1 1 1 1	1 1 1 1 1	1 1 1 1 1	1 1 0 1 1	0 0 0 1 1	0 0 0 1 1	1 1 1 1 1	<b>Custo</b>
1,4267	2,9179	3,3517	1,9534	2,22	2,4349	1,5549	1,9427	<b>17,8022*10<sup>6</sup></b>

Tabela 5.9: Segunda iteração do Algoritmo 4, ponto inicial ( $v_4 = 92$  e  $v_6 = 78$ )

**Melhor resultado: Custo atual = custo alternativa 5**

		TESTE LISTA RESTRITA ALFA				ITERAÇÃO 3			
<b>Alternativa 3 (lista rest)</b>									
$v_1 = 60$	$v_2 = 100$	$v_3 = 110$	$v_4 = 89$	$v_5 = 89$	$v_6 = 81$	$v_7 = 69$	$v_8 = 81$		
$p_s(2) = 945$	$p_s(8) = 925$	$p_s(12) = 990$	$p_s(20) = 1060$	$p_s(21) = 1150$	$p_s(20) = 1060$	$p_s(24) = 1230$	$p_s(48) = 1135$		
$p_d(9) = 990,5219$	$p_d(10) = 990,9768$	$p_d(13) = 1062,8$	$p_d(21) = 1150$	$p_d(22) = 1231,7$	$p_d(48) = 1135$	$p_d(46) = 1280$	$p_d(25) = 1280,2$		
0 0 0 1 1	1 1 1 1 1	1 1 1 1 1	1 1 1 1 1	1 1 0 1 1	1 1 0 1 1	0 0 0 1 1	1 1 1 1 1	Custo	
1,4149	2,8937	3,3238	1,8678	1,8847	1,6878	1,314	2,0088	16,3955*10 <sup>6</sup>	
		<b>VIZINHOS <math>v_4</math></b>							
<b>Alternativa 3 (<math>v_4 - 1</math>)</b>									
$v_1 = 60$	$v_2 = 100$	$v_3 = 110$	$v_4 = 88$	$v_5 = 88$	$v_6 = 82$	$v_7 = 68$	$v_8 = 82$		
$p_s(2) = 955$	$p_s(8) = 935$	$p_s(12) = 1000$	$p_s(20) = 1070$	$p_s(21) = 1155$	$p_s(20) = 1070$	$p_s(24) = 1235$	$p_s(48) = 1145$		
$p_d(9) = 1000,5$	$p_d(10) = 1000,1$	$p_d(13) = 1072,8$	$p_d(21) = 1155$	$p_d(22) = 1236,7$	$p_d(48) = 1145$	$p_d(46) = 1280$	$p_d(25) = 1280,4$		
0 0 0 1 1	1 1 1 1 1	1 1 1 1 1	1 1 0 1 1	1 1 0 1 1	1 1 0 1 1	0 0 0 1 1	1 1 1 1 1	Custo*	
1,3914	2,8295	3,2732	2,0927	1,8274	1,7075	1,2112	1,9456	16,2785*10 <sup>6</sup>	
<b>Alternativa 3 (<math>v_4 + 1</math>)</b>									
$v_1 = 60$	$v_2 = 100$	$v_3 = 110$	$v_4 = 90$	$v_5 = 90$	$v_6 = 80$	$v_7 = 70$	$v_8 = 80$		
$p_s(2) = 940$	$p_s(8) = 920$	$p_s(12) = 985$	$p_s(20) = 1055$	$p_s(21) = 1145$	$p_s(20) = 1055$	$p_s(24) = 1230$	$p_s(48) = 1130$		
$p_d(9) = 985,5245$	$p_d(10) = 985,9817$	$p_d(13) = 1057,9$	$p_d(21) = 1145$	$p_d(22) = 1231,8$	$p_d(48) = 1130$	$p_d(46) = 1280$	$p_d(25) = 1280$		
0 0 0 1 1	1 1 1 1 1	1 1 1 1 1	1 1 0 1 1	1 1 0 1 1	1 1 0 1 1	0 0 0 1 1	1 1 1 1 1	Custo	
1,4267	2,9179	3,3517	2,2988	1,9935	1,6558	1,3556	2,0183	17,0183*10 <sup>6</sup>	

Tabela 5.10: Terceira iteração do Algoritmo 4, ponto inicial ( $v_4 = 89$  e  $v_6 = 81$ )

**Melhor resultado: Custo atual = custo alternativa 3 ( $v_4 - 1$ )**

		TESTE LISTA RESTRITA ALFA				ITERAÇÃO 4			
<b>Alternativa 1 (lista rest)</b>									
$v_1 = 60$	$v_2 = 100$	$v_3 = 110$	$v_4 = 86$	$v_5 = 86$	$v_6 = 84$	$v_7 = 66$	$v_8 = 84$		
$p_s(2) = 955$	$p_s(8) = 935$	$p_s(12) = 1000$	$p_s(20) = 1070$	$p_s(21) = 1155$	$p_s(20) = 1070$	$p_s(24) = 1230$	$p_s(48) = 1150$		
$p_d(9) = 1000,5$	$p_d(10) = 1001$	$p_d(13) = 1072,8$	$p_d(21) = 1155$	$p_d(22) = 1231,6$	$p_d(48) = 1150$	$p_d(46) = 1280$	$p_d(25) = 1280,8$		
0 0 0 1 1	1 1 1 1 1	1 1 1 1 1	1 1 0 1 1	1 1 0 1 1	1 1 0 1 1	0 0 0 1 1	1 1 0 1 1	Custo	
1,3914	2,8468	3,2732	1,9924	1,6932	2,4488	1,1925	2,0528	16,8911*10 <sup>6</sup>	
		<b>VIZINHOS <math>v_4</math></b>							
<b>Alternativa 1 (<math>v_4 - 1</math>)</b>									
$v_1 = 60$	$v_2 = 100$	$v_3 = 110$	$v_4 = 85$	$v_5 = 85$	$v_6 = 85$	$v_7 = 65$	$v_8 = 85$		
$p_s(2) = 950$	$p_s(8) = 930$	$p_s(12) = 995$	$p_s(20) = 1065$	$p_s(21) = 1145$	$p_s(20) = 1065$	$p_s(24) = 1220$	$p_s(48) = 1145$		
$p_d(9) = 995,5192$	$p_d(10) = 995,9718$	$p_d(13) = 1067,8$	$p_d(21) = 1145$	$p_d(22) = 1221,6$	$p_d(48) = 1145$	$p_d(46) = 1280$	$p_d(25) = 1281$		
0 0 0 1 1	1 1 1 1 1	1 1 1 1 1	1 1 0 1 1	1 1 0 1 1	1 1 0 1 1	0 0 0 1 1	1 1 0 1 1	Custo*	
1,4032	2,8698	3,2983	1,9083	1,674	1,9083	1,2528	2,1554	16,4701*10 <sup>6</sup>	
<b>Alternativa 1 (<math>v_4 + 1</math>)</b>									
$v_1 = 60$	$v_2 = 100$	$v_3 = 110$	$v_4 = 87$	$v_5 = 87$	$v_6 = 83$	$v_7 = 67$	$v_8 = 83$		
$p_s(2) = 935$	$p_s(8) = 920$	$p_s(12) = 985$	$p_s(20) = 1055$	$p_s(21) = 1140$	$p_s(20) = 1055$	$p_s(24) = 1220$	$p_s(48) = 1135$		
$p_d(9) = 985,5245$	$p_d(10) = 985,9817$	$p_d(13) = 1057,9$	$p_d(21) = 1140$	$p_d(22) = 1221,6$	$p_d(48) = 1135$	$p_d(46) = 1280$	$p_d(25) = 1280,6$		
0 0 0 1 1	1 1 1 1 1	1 1 1 1 1	1 1 0 1 1	1 1 0 1 1	1 1 0 1 1	0 0 0 1 1	1 1 0 1 1	Custo	
1,4647	2,9179	3,3517	2,0876	1,819	1,8405	1,2528	2,1545	16,8887*10 <sup>6</sup>	

Tabela 5.11: Quarta iteração do Algoritmo 4, ponto inicial ( $v_4 = 86$  e  $v_6 = 84$ )

**Melhor resultado: Custo atual = custo alternativa 1 ( $v_4 - 1$ )**

		TESTE LISTA RESTRITA ALFA				ITERAÇÃO 5			
<b>Alternativa 9 (lista rest)</b>									
$v_1 = 60$	$v_2 = 100$	$v_3 = 110$	$v_4 = 98$	$v_5 = 98$	$v_6 = 72$	$v_7 = 78$	$v_8 = 72$		
$p_s(2) = 940$	$p_s(8) = 920$	$p_s(12) = 985$	$p_s(20) = 1055$	$p_s(21) = 1140$	$p_s(20) = 1055$	$p_s(24) = 1220$	$p_s(48) = 1115$		
$p_d(9) = 985,5245$	$p_d(10) = 985,9817$	$p_d(13) = 1057,9$	$p_d(21) = 1140$	$p_d(22) = 1222,1$	$p_d(48) = 1115$	$p_d(46) = 1280,2$	$p_d(25) = 1278,4$		
0 0 0 1 1	1 1 1 1 1	1 1 1 1 1	1 1 1 1 1	1 1 1 1 1	0 0 0 1 1	0 0 0 1 1	1 1 0 1 1	<b>Custo*</b>	
1,4267	2,9179	3,3517	2,2381	1,9576	1,977	1,8728	1,8304	<b>17,5722*10<sup>6</sup></b>	
		<b>VIZINHOS <math>v_4</math></b>							
<b>Alternativa 9 (<math>v_4 - 1</math>)</b>									
$v_1 = 60$	$v_2 = 100$	$v_3 = 110$	$v_4 = 97$	$v_5 = 97$	$v_6 = 73$	$v_7 = 77$	$v_8 = 73$		
$p_s(2) = 935$	$p_s(8) = 915$	$p_s(12) = 980$	$p_s(20) = 1050$	$p_s(21) = 1135$	$p_s(20) = 1050$	$p_s(24) = 1220$	$p_s(48) = 1115$		
$p_d(9) = 980,5272$	$p_d(10) = 980,9867$	$p_d(13) = 1052,9$	$p_d(21) = 1135$	$p_d(22) = 1222,1$	$p_d(48) = 1115$	$p_d(46) = 1280,1$	$p_d(25) = 1278,6$		
0 0 0 1 1	1 1 1 1 1	1 1 1 1 1	1 1 1 1 1	1 1 1 1 1	0 0 0 1 1	0 0 0 1 1	1 1 0 1 1	<b>Custo</b>	
1,4387	2,9424	3,3778	2,2068	1,9812	2,1207	1,8202	1,8732	<b>17,761*10<sup>6</sup></b>	
<b>Alternativa 9 (<math>v_4 + 1</math>)</b>									
$v_1 = 60$	$v_2 = 100$	$v_3 = 110$	$v_4 = 99$	$v_5 = 99$	$v_6 = 71$	$v_7 = 79$	$v_8 = 71$		
$p_s(2) = 925$	$p_s(8) = 910$	$p_s(12) = 975$	$p_s(20) = 1045$	$p_s(21) = 1135$	$p_s(20) = 1045$	$p_s(24) = 1215$	$p_s(48) = 1105$		
$p_d(9) = 975,5299$	$p_d(10) = 975,9918$	$p_d(13) = 1047,9$	$p_d(21) = 1135$	$p_d(22) = 1217,2$	$p_d(48) = 1105$	$p_d(46) = 1280,2$	$p_d(25) = 1278,2$		
0 0 0 1 1	1 1 1 1 1	1 1 1 1 1	1 1 1 1 1	1 1 1 1 1	0 0 0 1 1	0 0 0 1 1	1 1 0 1 1	<b>Custo</b>	
1,5276	2,9672	3,4043	2,3792	2,014	1,9472	2,0024	1,8845	<b>18,1264*10<sup>6</sup></b>	

Tabela 5.12: Quinta iteração do Algoritmo 4, ponto inicial ( $v_4 = 98$  e  $v_6 = 72$ )

**Melhor resultado: Custo atual = custo alternativa 9**

		TESTE LISTA RESTRITA ALFA		ITERAÇÃO 6			
<b>Alternativa 14 (lista rest)</b>							
$v_1 = 60$	$v_2 = 100$	$v_3 = 110$	$v_4 = 65$	$v_5 = 65$	$v_6 = 105$	$v_7 = 45$	$v_8 = 105$
			$p_s(20) = 1110$	$p_s(21) = 1155$	$p_s(20) = 1110$	$p_s(24) = 1200$	$p_s(48) = 1205$
			$p_d(21) = 1155$	$p_d(22) = 1200,9$	$p_d(48) = 1205$	$p_d(46) = 1279,8$	$p_d(25) = 1285,4$
			0 0 0 1 1	0 0 0 1 1	1 1 1 1 1	1 0 0 1 0	
			1,2995	1,231	2,5123	0,8943	
							<b>Custo</b>

Tabela 5.13: Sexta iteração do Algoritmo 4, ponto inicial ( $v_4 = 65$  e  $v_6 = 105$ )

**Melhor resultado: Custo atual = custo alternativa 14**

**A Sexta iteração resultou em um fluxo não-viável.**

REFINANDO AS PRESSÕES DA MELHOR ESCOLHA (mudança de pressões com passo menor, mantendo fixos os fluxos V)							
<b>Alternativa 3 (V4 - 1)</b>							
$v_1 = 60$	$v_2 = 100$	$v_3 = 110$	$v_4 = 88$	$v_5 = 88$	$v_6 = 82$	$v_7 = 68$	$v_8 = 82$
$p_s(2) = 963$	$p_s(8) = 946$	$p_s(12) = 1007$	$p_s(20) = 1075$	$p_s(21) = 1160$	$p_s(20) = 1075$	$p_s(24) = 1236$	$p_s(48) = 1148$
$p_d(9) = 1007,5$	$p_d(10) = 1008$	$p_d(13) = 1077,8$	$p_d(21) = 1160$	$p_d(22) = 1237,7$	$p_d(48) = 1148$	$p_d(46) = 1280$	$p_d(25) = 1280,4$
0 0 0 1 1	1 1 1 1 1	1 1 1 1 1	1 1 0 1 1	1 1 0 1 1	1 1 0 1 1	0 0 0 1 1	1 1 1 1 1
1,3607	2,7192	3,1983	2,0776	1,7772	1,676	1,1982	1,9734
							<b>Custo*</b>
							<b>15,9806*10<sup>6</sup></b>

Tabela 5.14: Melhor escolha de configuração de fluxo com as pressões refinadas

**Melhor resultado: Custo atual = custo alternativa 3**



Observando-se as tabelas anteriores, percebe-se como o procedimento do GRASP funciona, utilizando a Lista Restrita de Candidatos seleciona-se uma opção de configuração de vazão  $(v_4, v_6)$  de maneira aleatória, que irá configurar o restante do vetor  $v = (v_1, \dots, v_8)$ , viabilizam-se as pressões, encontrando uma configuração de compressores que seja a de menor custo e calcula o custo de cada estação, ao final somam-se os custos das estações e obtêm-se o custo total.

A busca local é realizada nas vizinhanças de  $(v_4, v_6)$  onde a configuração de compressores já estará fixada, calculam-se os custos das estações e se obtêm o custo total, compara-se com o anterior e fica-se com o menor, retorna-se para a lista restrita para verificar uma outra possibilidade de configuração de  $(v_4, v_6)$ .

Caso o resultado não seja modificado durante três iterações é acionado o critério de parada permanecendo então o menor custo encontrado.

Como se pode ver nas tabelas dos resultados a cada iteração têm-se três valores de custos, permanecendo o menor resultado como o custo atual. A melhor configuração de fluxo foi encontrada na vizinhança da iteração 3 que é a Alternativa 3 da lista restrita com a variação  $v_4 - 1$ .

Após esse processo, é feito um refinamento das pressões da opção de menor custo, mantendo os fluxos e as configurações dos compressores, visando alcançar um resultado ainda melhor, com um custo mais baixo, como podemos ver na tabela 5.14.

## CAPÍTULO 6

### CONCLUSÕES

Nesta dissertação o problema abordado consiste em minimizar o consumo de combustível incorrido por estações de compressão durante o transporte gás natural. Para isso, propõe-se uma heurística adaptando-a a técnica GRASP. Adotou-se, para tanto, o modelo *generalizado* de Jubini (2008), baseado no modelo *clássico* de Ríos-Mercado et al (2000), Ríos-Mercado et al (2004) e Wu et al. (2000), no que as estações de compressão estão compostas por compressores não necessariamente idênticos.

No modelo generalizado, a vazão a ser comprimida numa estação não é necessariamente dividida em parcelas iguais entre os compressores ativados como é feito no modelo clássico. Resultando, assim, que no modelo clássico busca-se determinar *quantos* compressores devem ser ligados em cada estação, enquanto no modelo generalizado busca-se determinar *quais* destes devem ser ativados, aumentando a complexidade do problema.

Para a abordagem algorítmica do modelo, adotou-se o domínio viável de uma estação e a função custo de combustível, estudados por Azeredo (2008), que utilizou conceitos desenvolvidos em Wu et al. (2000) adaptando-os, de acordo com a necessidade, para se aplicar ao caso do modelo de Jubini (2008), tratado neste trabalho.

Como em outros trabalhos estudados sobre o assunto (ver IAMASHITA, 2006) as técnicas do método GRASP se comportaram muito bem, como se podem ver nos bons resultados demonstrados desta abordagem.

Note que a lista restrita de candidatos nesta proposta algorítmica se obtém a partir das diferentes vazões massa passíveis de serem comprimidas nos compressores onde se iniciam ciclos na rede reduzida.

Uma sugestão para trabalhos futuros seria obter a lista restrita, considerando as diferentes configurações de compressores para cada estação, para logo determinar sua viabilidade (em função da existência dos vetores  $(v, u, p)$ ), como considerado em lamashita (2006).

Note-se, entretanto, que nesse trabalho não é tratado o problema da viabilidade das vazões a serem comprimidas nas estações, donde poderia ser conjecturado que o comportamento do algoritmo GRASP aqui proposto poderia piorar quanto ao seu desempenho. Porém, seria conveniente realizar os testes correspondentes em trabalhos posteriores.

Ao mesmo tempo, na implementação da proposta algorítmica aqui apresentada, não foram usadas técnicas sugeridas para redução das variáveis de pressão nas sub-redes. Ou seja, quando dadas às vazões massa entrando (pelas correspondentes estações de compressão) e a distribuição destas nos dutos da sub-rede, se determinam às pressões através de árvores geradoras e caminhos direcionados unindo os vértices de entrada aos vértices de saída na sub-rede (conforme JUBINI, 2008).

Essas técnicas supostamente iriam reduzir o custo computacional. Porém, devem ser aplicadas a sub-redes com uma única entrada ou uma única saída. No algoritmo aqui proposto, esta última restrição não existe, podendo ser aplicado a sub-redes com múltiplas entradas e múltiplas saídas. Isto parece aumentar o custo computacional, embora também deve ser testado em trabalhos futuros.

Finalmente, é conveniente indicar que embora não exista um conjunto de testes onde a eficiência dos algoritmos possa ser comprovada, a proposta aqui apresentada foi testada em dois exemplos que se encontram na literatura (ver WU et al., 2000). Usou-se para efeitos de teste, a mesma topologia das redes e os mesmos dados dos dutos e vazões, modificando adequadamente as estações de compressão para comportar compressores não idênticos. Nos exemplos rodados o comportamento do algoritmo apresentado foi muito satisfatório.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Azeredo, M. M. (2008) *Aproximações do Domínio e a Função Custo de uma Estação de Compressão no Transporte de Gás Natural*. Tese (Mestrado em Engenharia de Produção) – Campos dos Goytacazes – RJ, Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro – UENF, 77p.

BAZARAA, M., SHERALI, H., SHETTY, C., (1993) *Nonlinear Programming: Theory and Algorithms* (Second Edition), John Wiley & Sons, New York, Singapore.

Christofoletti, L. M. (2002) *Métodos de Reinício Aplicados ao Sequenciamento em Uma Máquina com Tempos de Preparação e Datas de Entrega*. Tese (Mestrado em Engenharia Elétrica) – Campinas – SP, Universidade Estadual de Campinas Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação – UNICAMP, 62p.

Feo T. A. e Resende M. G. C. (1995) Greedy Randomized Adaptive Search Procedures. *Journal of Global Optimization*, 6, 109–134.

Iamashita, E. K. (2006) – *Sistema de Planejamento de Movimentação de Gás Utilizando Metaheurísticas*. Tese (Doutorado em Engenharia de Reservatório e da Exploração) – Macaé – RJ, Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro – UENF, 112p.

Iamashita, E. K., Galaxe, F., Arica, J., (2005) Um Novo Modelo de Planejamento Integrado de Compressão e Escoamento de Gás para uma Rede Complexa. *Rio Pipeline Conference & Exposition*. Rio de Janeiro, p. 3-7.

Jubini, G. M. (2008) *Um Modelo para a Otimização da Operação de Gasodutos e uma Proposta Heurística para sua Solução*. Tese (Mestrado em Engenharia de Produção) – Campos dos Goytacazes – RJ, Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro – UENF.

Ríos-Mercado, R. Z., Wu, S., Scott, L. R. e Boyd, E. A. (2002) A reduction technique for natural gas transmission network optimization problems. *Annals of Operations Research*, 117(1–18), 217–234.

Ríos-Mercado, R. Z., Kim, S. e Boyd, E. A. (2004) *Efficient Operation of Natural Gas Transmission Systems: A Network-Based Heuristic for Cyclic Structures*. Universidad Autónoma de Nuevo León - UANL, San Nicolás de los Garza, México.

Ríos-Mercado, R. Z., Wu, S., Scott, L. R. e Boyd, E. A. (2000) Preprocessing on Natural Gas Transmission Networks. *Technical Report PISIS-2000-01*, Universidad Autónoma de Nuevo Leon - UANL, San Nicolás de los Garza, México.

Wu, S., Ríos-Mercado, R. Z., Boyd, E. A. e Scott, L. R. (2000). Model Relaxations for the Fuel Cost Minimization of Steady-State Gas Pipeline Networks. *Mathematical and Computer Modelling*: 197 – 220.

[www.professeurs.polymtl.ca/michel.gagnon/Disciplinas/Bac/Grafos/Arvores/arvores.html](http://www.professeurs.polymtl.ca/michel.gagnon/Disciplinas/Bac/Grafos/Arvores/arvores.html) - Acessado em 22/01/08 às 14h30min.

[www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/loadFile.do?objectId=8569&objectType=FILE](http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/loadFile.do?objectId=8569&objectType=FILE) - Acessado em 22/01/08 às 13h15min.

## ANEXO

### A.1. CONCEITOS DA TEORIA DE GRAFOS

Um grafo  $G = (V, E)$  é uma estrutura que consiste em um conjunto finito de elementos  $V$  chamados vértices ou nós e um conjunto  $E$  de pares não ordenados de nós chamados arestas.

Grafo direcionado ou dígrafo é definido de forma similar, exceto pelo fato de que cada aresta, chamado de arco, é um par ordenado que possui sentido de um nó a outro. Para grafos e dígrafos, uma aresta ou arco do nó  $i$  ao nó  $j$  é denotado por  $(i, j)$ .

Caminho de um grafo  $G$  é definido por uma seqüência finita alternada dos vértices e dos limites, começando e terminando com vértices, tais que cada limite é incidente com os dois vértices imediatamente antes e depois dela.

Um caminho em que um vértice não aparece mais do que uma vez é chamada de trajeto. Um trajeto iniciando e terminando com o mesmo vértice é chamado de ciclo.

Da mesma forma, em um dígrafo, um caminho direcionado é uma seqüência alternada dos vértices e arcos, onde  $v_{i-1}$ ,  $e_i$ ,  $v_i$  estando na seqüência implica que o arco  $e_i = (v_{i-1}, v_i)$ .

Trajeto direcionado é um caminho direcionado em que nenhum vértice aparece mais de uma vez e um ciclo ou um circuito dirigido são um começo e um término dirigidos do trajeto com o mesmo vértice.

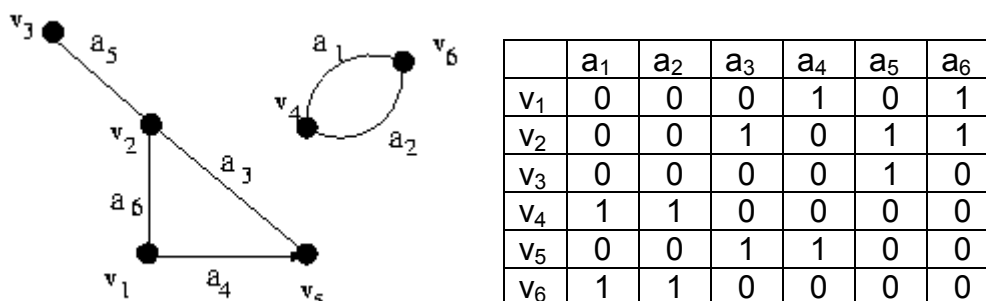
Um grafo  $G$  diz-se conectado se houver pelo menos um trajeto entre cada par dos vértices em  $G$ . Quando um grafo é conectado sem ciclos, temos uma árvore.

Uma árvore  $T$  gera um grafo  $G$ , se é uma árvore que consiste de todos os vértices de  $G$ . Para uma árvore  $T$  geradora de um grafo  $G$ , toda aresta em  $G$  que não está na árvore  $T$  é chamada corda.

Sabe-se, da Teoria de Grafos, que adicionando uma corda  $c$  a uma árvore geradora  $T$  se gera um ciclo. Este ciclo formado é chamado ciclo fundamental.

Por outro lado, a matriz de incidência possui algumas propriedades interessantes que devem ser observadas, temos que, como cada aresta é incidente a exatamente dois vértices, cada coluna contém dois números 1, o número de 1 em cada linha é igual ao grau do vértice correspondente. Uma linha que contém somente 0 representa um vértice isolado, arestas paralelas resultam em duas colunas idênticas.

Demonstrando como se representa um grafo em uma matriz de incidência, observar o exemplo abaixo:



## A.2. ALGORITMO DE PRIM

É importante lembrar que se a rede não possuir ciclos ela é uma árvore, caso a rede possua ciclos deve-se de montar a matriz  $B$ , que é chamada de matriz de ciclos, para isso precisa-se criar a árvore geradora dessa rede, utilizando o Algoritmo de Prim.

Além desse algoritmo também foi estudado o algoritmo de Kruskal, que seleciona a melhor aresta sem se preocupar com as conexões selecionadas

anteriormente e o resultado é uma proliferação de árvores que eventualmente se juntam para formar uma árvore.

Para o caso que este trabalho aborda considera-se que os caminhos ou arcos possuem custos iguais e precisa-se encontrar apenas uma árvore geradora.

O algoritmo de Prim é um algoritmo “guloso” cuja idéia básica é: Escolhendo um nó arbitrário inicialmente, visite todos os nós do grafo escolhendo como próximo a ser visitado o nó mais perto de um dos vértices já visitados.

Pseudocódigo do Algoritmo de Prim:

- 1º - Começar com uma árvore formada apenas por um nó (vértice) arbitrário;
- 2º - A cada iteração adicionar uma aresta conectando o nó (vértice) já conectado a outro nó (vértice) não conectado, mantendo-a acíclica;
- 3º - Repetir o 2º Passo até conectar todos os nós (vértices);
- 4º - Parar quando todos os nós (vértices) estiverem conectados.

No site da fabricante do software Matlab, o qual foi utilizado para implementação deste trabalho, encontra-se uma sub-rotina que utiliza o Algoritmo de Prim, fornecendo como resultado a Árvore Geradora da rede, o código está no seguinte endereço:

[www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/loadFile.do?objectId=8569&objectType=FILE](http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/loadFile.do?objectId=8569&objectType=FILE).

O programa é fácil de manusear, basta entrar com a matriz como um arquivo com a extensão txt para que seja lido, neste exemplo o nome dado ao arquivo foi testfile1, porém a matriz dada nesse exemplo considerou os caminhos com os custos diferentes, em nosso caso os valores que essa matriz terá, serão somente 1 e 0. Os resultados serão apresentados em outro arquivo txt que será gerado na pasta de origem que no caso abaixo teve o nome Result, mas que pode ser alterado para poder nomear os resultados.