# Zwei-Ebenen-Optimierung mit diskreter unterer und stetiger oberer Ebene

Von der Fakultät für Mathematik und Informatik

der Technischen Universität Bergakademie Freiberg

genehmigte

## Dissertation

zur Erlangung des akademischen Grades

doctor rerum naturalium

Dr. rer. nat.,

vorgelegt


von Diplom–Mathematikerin Diana Fanghänel

geboren am 24.07.1976 in Lichtenstein


Gutachter: Prof. Dr. Stephan Dempe, TU Bergakademie Freiberg
Prof. Dr. Andreas Fischer, TU Dresden
Prof. Dr. Ingo Althöfer, Friedrich-Schiller-Universität Jena


Tag der Verleihung: 09.11.2006

# Zwei–Ebenen–Optimierung mit diskreter unterer Ebene und stetiger oberer Ebene

Diana Fanghänel

15. November 2006

## Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei Herrn Prof. Stephan Dempe für die Betreuung dieser Arbeit bedanken. Insbesondere sein Zuspruch und sein sorgfältiges Korrekturlesen meiner Ausarbeitungen haben sehr zum Entstehen dieser Arbeit beigetragen.

Mein besonderer Dank gilt desweiteren Herrn Prof. Peter Recht von der Universität Dortmund, welcher mein Augenmerk auf das Assortment Pricing Problem gelenkt hat. Die Untersuchung dieses Problems hat mich maßgebend bei der Entwicklung der theoretischen Grundlagen inspiriert.

Weiter möchte ich mich bei Herrn Dr. Heiner Schreier und allen anderen Mitarbeitern und Professoren der TU Bergakademie Freiberg bedanken, welche bei Fragen immer ein offenes Ohr für mich hatten.

# Inhaltsverzeichnis

**1 Einführung** **5**

**2 Theoretische Betrachtungen** **10**

2.1 Aufgabenstellung . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 10

2.2 Stabilitätsbereiche . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 12

2.3 Eigenschaften der Lösungsmengen . . . . . . . . . . . . . . . . . . 14

2.4 Die erweiterten Lösungsmengen . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 15

2.5 Lösungsfunktionen . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 16

2.6 Schwache Lösungsfunktionen . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 19

2.7 Optimalitätsbedingungen . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 22

2.8 Die Berechnung von schwach lokal optimistischen bzw. pessimistischen Lösungen . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 28

**3 Auswahlfunktionen** **31**

3.1 Grundlagen . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 31

3.2 Lösungsfunktionen . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 33

3.3 Optimalitätsbedingungen . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 36

3.4 Berechnung einer schwachen lokalen Lösung . . . . . . . . . . . . 39

3.5 Optimistische und pessimistische Auswahlfunktionen . . . . . . . 40

3.6 Global optimale Lösungen . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 44

**4 Diskrete konvexe Probleme in der unteren Ebene** **47**

4.1 Aufgabenstellung . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 47

4.2 Stabilitätsbereiche . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 48

4.3 Lösungsmengen . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 50
4.4 Lösungsfunktionen . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 51
4.5 Optimalitätsbedingungen . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 52
4.6 Lösungsverfahren . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 54

**5 Zwei-Ebenen-Optimierung mit 0-1–Knapsack-Problemen in der unteren Ebene 59**

5.1 Aufgabenstellung . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 59
5.2 Stabilitätsbereiche . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 60
5.3 Die Lösungsmengen . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 65
5.4 Die erweiterten Lösungsmengen . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 66
5.5 Lösungsfunktionen . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 68
5.6 Die Mengen $\widehat{\Psi}_o(y)$ und $\widehat{\Psi}_p(y)$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 71
5.7 Optimistische und pessimistische Auswahlfunktionen . . . . . . . 75
5.8 Optimalitätsbedingungen . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 80
5.8.1 Der Fall $f > 0$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 80
5.8.2 Der Fall $f < 0$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 81
5.8.3 Der Fall $f = 0$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 83
5.9 Global optimale Lösungen . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 84
5.9.1 Der Fall $f > 0$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 84
5.9.2 Der Fall $f < 0$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 85
5.9.3 Der Fall $f = 0$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 88

**6 Das Assortment Pricing Problem 91**

6.1 Problemstellung . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 91
6.2 Stabilitätsbereiche . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 92
6.3 Eigenschaften der Stabilitätsbereiche . . . . . . . . . . . . . . . . 98
6.4 Die Lösungsmengen $\Psi(p)$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 102
6.5 Die erweiterten Lösungsmengen $\bar{\Psi}(p)$ . . . . . . . . . . . . . . . . 106
6.6 Lösungsfunktionen . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 112
6.7 Die schwachen Lösungsfunktionen . . . . . . . . . . . . . . . . . . 114

6.7.1 Die schwache optimistische Lösungsfunktion . . . . . . . . 115
6.7.2 Die schwache pessimistische Lösungsfunktion . . . . . . . 116
6.8 Die Mengen $\bar{L}(x)$ und $L_p(x)$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 124
6.8.1 Die Mengen $\bar{L}(x)$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 124
6.8.2 Die Mengen $L_p(x)$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 126
6.9 Optimalitätsbedingungen . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 127
6.9.1 Der optimistische Fall . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 128
6.9.2 Der pessimistische Fall . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 129
6.9.3 Einige Beispiele . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 130
6.10 Lösungsverfahren . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 132

**7 Schlussbemerkungen** **141**

# Kapitel 1

# Einführung

Das mathematische Gebiet der Optimierung spielt in unserer heutigen Gesellschaft eine bedeutende Rolle. In der Industrie können eine optimale Ausnutzung von Energie, Rohstoffen, Arbeitskraft, finanziellen Mitteln usw. existenzentscheidend sein. Viele Zusammenhänge in Industrie, Wissenschaft und Technik können mit Hilfe von Optimierungsaufgaben beschrieben werden.

Ein wichtiges Teilgebiet der Optimierung ist die sogenannte Zwei-Ebenen–Optimierung. Aufgaben der Zwei-Ebenen–Optimierung sind hierarchische Optimierungsprobleme, welche Situationen mit den folgenden Eigenschaften beschreiben:

1. Es gibt zwei Entscheidungsträger, den sogenannten Leader und den sogenannten Follower. Beide sind an der Optimierung ihrer jeweiligen Zielfunktion interessiert.

2. Der Follower trifft seine Entscheidung, nachdem er die Entscheidung des Leaders kennt.

3. Der Leader beeinflusst mit seiner Entscheidung die Wahlmöglichkeiten und den Zielfunktionswert des Followers.

4. Der Follower beeinflusst mit seiner Wahl das Ergebnis des Leaders.

5. Der Leader kennt Zielfunktion und Entscheidungsmöglichkeiten des Followers. Er muss die möglichen Entscheidungen des Followers berücksichtigen, wenn er seine eigene Zielfunktion optimiert.

Wie kann man also diese Situation mit Hilfe von Formeln wiedergeben? Angenommen, eine die Entscheidung des Leaders lässt sich mit einem Vektor $y \in \mathbb{R}^k$ beschreiben. Dann können die Entscheidungsmöglichkeiten des Followers mit Hilfe eine Entscheidungsmenge $X \subseteq \mathbb{R}^n$ und einer Funktion $h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$

angegeben werden. Wenn $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ die Zielfunktion des Followers ist, so löst er also eine parametrische Optimierungsaufgabe

$$\min_x \{f(x,y) : \; h(x,y) \leq \mathbf{0}, \; x \in X\}. \tag{1.1}$$

Diese Aufgabe heißt Aufgabe des Followers bzw. Aufgabe der unteren Ebene.

Der Leader kann bei seiner Entscheidung also davon ausgehen, dass der Follower eine Entscheidung $x \in \Psi(y)$ trifft, wobei $\Psi(y)$ im folgenden die Menge aller optimalen Lösungen der Aufgabe (1.1) bezeichnet in Abhängigkeit vom Vektor $y \in \mathbb{R}^k$. Wenn $Y \subseteq \mathbb{R}^k$ die Entscheidungsmenge des Leaders ist und $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ seine Zielfunktion, so löst der Leader also die Optimierungsaufgabe

$$„\min_x\text{“}\{g(x,y) : \; x \in \Psi(y), \; y \in Y\}. \tag{1.2}$$

Diese Aufgabe heißt Aufgabe des Leaders bzw. Aufgabe der oberen Ebene.

Die Anführungsstriche in (1.2) verdeutlichen dabei die Unsicherheit in der Entscheidung des Leaders, welche daraus resultiert, dass i.a. $\operatorname{card} \Psi(y) \neq 1$ gilt. Bei geeigneter Wahl der Menge $Y$ kann davon ausgegangen werden, dass stets $\Psi(y) \neq \emptyset$ für alle $y \in Y$ gilt. Somit stellt sich die Frage, wie der Leader mit der Situation $\operatorname{card} \Psi(y) > 1$ umgeht. Für diese Situation werden in der Literatur meist zwei Lösungszugänge angegeben.

1. **optimistischer Lösungszugang:** Wenn der Leader den Follower zur Kooperation überreden kann, so wird der Follower diejenige seiner optimalen Lösungen wählen, welche am günstigsten für den Leader ist. Die hieraus resultierende Zielfunktion $\phi_o : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ kann somit durch

$$\phi_o(y) := \min_{x \in \Psi(y)} g(x,y) \tag{1.3}$$

   angegeben werden. Die Funktion $\phi_o : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ heißt optimistische Lösungsfunktion. Der Leader löst in diesem Fall die Ersatzaufgabe

$$\min_y \{\phi_o(y) : \; y \in Y\}. \tag{1.4}$$

2. **pessimistischer Lösungszugang:** Wenn der Leader den Follower nicht zur Kooperation überreden kann, so wird er versuchen den Schaden zu begrenzen, welcher ihm durch eine ungünstige Wahl des Followers entsteht. Der Leader geht bei diesem Lösungszugang also davon aus, dass der Follower die für ihn ungünstigste Wahl trifft, und minimiert die Funktion $\phi_p : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ mit

$$\phi_p(y) := \max_{x \in \Psi(y)} g(x,y). \tag{1.5}$$

   Die Funktion $\phi_p : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ heißt pessimistische Lösungsfunktion. Der Leader löst in diesem Fall die Ersatzaufgabe

$$\min_y \{\phi_p(y) : \; y \in Y\}. \tag{1.6}$$

Die spezielle Struktur von Zwei-Ebenen–Problemen ermöglicht ein Anwendung auf eine Vielzahl von praktischen Situationen, bei welchen eine hierarchische Entscheidungssituation vorliegt. Dazu gehören zum Beispiel das Management von hierarchisch strukturierten Firmen, die Planung von Straßennetzen, Produktionsplanung, Umweltschutz oder Steuerpolitik. Umfangreiche Übersichten über existierende Anwendungen sind in den kommentierten Bibliografien [7, 28] zu finden sowie in den Büchern von J.F. Bard [2] und S. Dempe [6].

Auf Grund der vielen Anwendungsmöglichkeiten existiert eine große Anzahl von Arbeiten zur Zwei-Ebenen–Optimierung. Dabei liegt der Schwerpunkt auf den sogenannten stetigen Zwei-Ebenen–Problemen. Damit sind i.a. Aufgaben gemeint, bei welchen $X = \mathbb{R}^n$ und $Y = \mathbb{R}^k$ gilt. Für diese Zwei-Ebenen–Probleme wurde eine Vielzahl von Optimalitätsbedingungen und Lösungsverfahren entwickelt (siehe z.B. [2, 6, 7, 28]).

Zwei-Ebenen–Probleme, bei denen einige Variable diskret sind, wurden bisher nur sehr selten betrachtet. Eine der am häufigsten zitierten Arbeiten zu derartigen Problemen stammt von Vicente, Savard und Judice. In diesem Artikel werden für diskrete lineare Zwei-Ebenen–Probleme die sogenannten induzierten Mengen und äquivalente Drei-Ebenen–Probleme [2, 29] untersucht. Dabei wird insbesondere aufgezeigt, dass es eine sehr große Rolle spielt, ob eine Variable in der unteren oder ob eine Variable in der oberen Ebene diskret ist.

Zwei-Ebenen–Probleme mit einer diskreten oberen Ebene und mit einer stetigen unteren Ebene, d.h. mit $X = \mathbb{R}^n$ und $Y = \mathbb{Z}^k$, werden in [11, 16, 30] untersucht. In diesen Arbeiten sind die Nebenbedingungen stets linear und die Zielfunktionen linear [16, 30] oder konvex bzw. quadratisch konvex [11]. Als Lösungsverfahren wird in [11, 30] ein Branch & Bound–Verfahren vorgeschlagen.

Für lineare gemischt-ganzzahlige Zwei-Ebenen–Probleme wird in [2, 19] ebenfalls ein Branch & Bound–Algorithmus betrachtet. Die Korrektheit des Algorithmus wurde jedoch nur für die Fälle gezeigt, bei denen alle Variablen in der oberen Ebene diskret sind oder bei denen alle Variablen in der unteren Ebene stetig sind.

Weiter gibt es Arbeiten, welche sich mit Zwei-Ebenen–Problemen beschäftigen, in denen alle Variablen diskret sind [3, 14, 27]. In diesen Artikeln werden Enumerations- bzw. k-th–best Algorithmen zur Lösung der Aufgaben vorgeschlagen.

Desweiteren existieren einige wenige Arbeiten zu Zwei-Ebenen–Problemen mit einer stetigen oberen Ebene und einigen diskreten Variablen in der unteren Ebene [6, 8, 9, 15]. In [6] werden diskrete lineare Zwei-Ebenen–Probleme untersucht, bei denen der Leader nur die Zielfunktion des Followers beeinflusst. Die Artikel [8, 15] beschäftigen sich mit einem Zwei-Ebenen–Problem aus dem Erdgas-Transport, bei welchem eine boolesche Variable in der Aufgabe der unteren Ebene auftritt. Der Artikel [9] kann auch in [6] nachgelesen werden. In ihm entspricht die Aufgabe der unteren Ebene einem 0-1–Knapsack-Problem.

Von [9] abgesehen wird in allen in diesem Abschnitt angegebenen Artikeln ausschließlich der optimistische Lösungsfall betrachtet oder die Eindeutigkeit der Lösungsmengen gefordert. Desweiteren fehlen bisher allgemeine Betrachtungen zu Optimalitätsbedingungen.

Es stellt sich also für uns die Aufgabe, eine allgemeine Theorie zur Betrachtung von Zwei-Ebenen–Problemen mit diskreter unterer Ebene und Optimalitätsbedingungen zu entwickeln.

Die vorliegende Arbeit ist unterteilt in einen theoretischen Teil (Kapitel 2 und Kapitel 3) und in einen Teil mit Anwendungen (Kapitel 4, Kapitel 5 und Kapitel 6). Dabei werden wir uns intensiv mit Zwei-Ebenen–Aufgaben der Form

$$\left\{\begin{array}{l} \text{„}\min_y\text{“}\{g(x,y):\ y \in Y,\ x \in \Psi(y)\} \\ \text{mit} \\ \Psi(y) = \operatorname*{argmin}_x\{f(x,y):\ h(x,y) \leq \mathbf{0},\ x \in X\}. \end{array}\right. \tag{1.7}$$

beschäftigen, bei welchen die Menge $X$ in der unteren Ebene diskret ist.

In Kapitel 2 werden wir zunächst einige grundlegende Begriffe definieren wie z.B. Stabilitätsbereich, Lösungsmenge und erweiterte Lösungsmenge. Weiter sollen wichtige Eigenschaften der optimistischen bzw. pessimistischen Lösungsfunktion $\phi_o(\cdot)$ bzw. $\phi_p(\cdot)$ untersucht werden. Da diese Funktionen i.a. nicht unterhalbstetig sind und somit die Aufgaben (1.4) bzw. (1.6) i.a. keine global optimale Lösung besitzen, führen wir in Kapitel 2.6 den Begriff der schwachen Lösungsfunktion ein. Danach untersuchen wir Optimalitätsbedingungen sowohl für die (schwache) optimistische als auch die (schwache) pessimistische Lösungsfunktion. Zum Schluss diskutieren wir eine Berechnungsmöglichkeit für schwach lokal optimistische bzw. pessimistische Lösungen.

In Anwendungen ist es nicht immer sinnvoll, den optimistischen bzw. pessimistischen Lösungszugang zu verwenden. Deshalb führen wir in Kapitel 3 den Begriff der Auswahlfunktion ein. Mit Hilfe dieser Auswahlfunktionen können wir wiederum Lösungsfunktionen bzw. schwache Lösungsfunktionen für die Aufgabe der oberen Ebene konstruieren. Auch für diese Lösungsfunktionen werden wir Optimalitätsbedingungen und eine Berechnungsmöglichkeit für schwach lokale Lösungen diskutieren. Anschließend zeigen wir den Zusammenhang zwischen optimistischem bzw. pessimistischem Lösungszugang und den sogenannten optimistischen bzw. pessimistischen Auswahlfunktionen. Zum Schluss untersuchen wir global optimale und $\varepsilon$-optimale Lösungen.

In den Kapiteln 4, 5 und 6 werden wir die Erkenntnisse aus den Kapiteln 2 und 3 auf einige konkrete Aufgabenklassen anwenden.

In Kapitel 4 betrachten wir ein Zwei-Ebenen–Problem mit einer stetigen linearen Aufgabe in der oberen Ebene und einer diskreten konvexen Aufgabe in der unteren Ebene. Für dieses Problem untersuchen wir zunächst die Eigenschaften der Stabilitätsbereiche, der Lösungsmengen und der Lösungsfunktionen. Anschließend geben wir Optimalitätsbedingungen für lokal optimistische bzw. pessimistische Lösungen an. Weiter werden wir Lösungsverfahren diskutieren.

In Kapitel 5 betrachten wir eine lineare Zwei-Ebenen–Aufgabe mit einem 0-1–Knapsack-Problem in der unteren Ebene. Für dieses Problem untersuchen wir zunächst die Begriffe aus Kapitel 2. Es zeigt sich hierbei, dass es hier sinnvoll ist, zur Betrachtung von optimistischen bzw. pessimistischen Auswahlfunktionen überzugehen. Es werden also Auswahlfunktionen definiert. Für die zugehörigen Lösungsfunktionen werden wir die Optimalitätsbedingungen aus Kapitel 3 anwenden. Weiter werden wir globale und $\varepsilon$-optimale Lösungen untersuchen.

In Kapitel 6 untersuchen wir das sogenannte Assortment-Pricing–Problem. Es werden wiederum die Begriffe und Theoreme aus den Kapiteln 2 und 3 auf dieses Problem angewendet. Besonders interessant bei diesem Problem sind die Untersuchungen zu den schwach lokal pessimistischen Lösungen. Diese werden es uns ermöglichen, eine einfache Beschreibung für globale pessimistische Lösungen zu finden.

# Kapitel 2

# Theoretische Betrachtungen

## 2.1 Aufgabenstellung

Gegeben sei die folgende Optimierungsaufgabe

$$\begin{cases} „\min_y “\{g(x,y):\ y \in Y,\ x \in \Psi(y)\} \\ \text{mit} \\ \Psi(y) = \underset{x}{\operatorname{argmin}}\{f(x,y):\ h(x,y) \leq \mathbf{0},\ x \in X\}. \end{cases} \tag{2.1}$$

Dabei sei

$$\begin{aligned} g &: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R} \text{ stetig bezüglich } y, \\ f &: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R} \text{ und} \\ h &: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m. \end{aligned}$$

Weiter sei $Y \subseteq \mathbb{R}^k$ eine nichtleere, kompakte Menge und $X \subseteq \mathbb{R}^n$ sei nichtleer und diskret, d.h. es existiert ein $\omega > 0$ mit $\|x^1 - x^2\| > \omega$ für alle $x^1, x^2 \in X$.

Man bezeichnet nun die Aufgabe

$$„\min_y “\{g(x,y):\ y \in Y,\ x \in \Psi(y)\} \tag{2.2}$$

als Aufgabe der oberen Ebene und die Aufgabe

$$\min_x\{f(x,y):\ h(x,y) \leq \mathbf{0},\ x \in X\} \tag{2.3}$$

als Aufgabe der unteren Ebene. Die Aufgabe der unteren Ebene ist also eine diskrete Optimierungsaufgabe mit einem Parameter $y \in Y$. Dieser Parameter kann sowohl in der Zielfunktion als auch in den Nebenbedingungen enthalten sein. Die Anführungszeichen in (2.2) sollen die Unsicherheit in der Definition der Aufgabe ausdrücken, falls die Menge $\Psi(y)$ mehr als ein Element besitzt.

$$\Psi(y) := \underset{x}{\operatorname{argmin}}\{f(x,y) : \; h(x,y) \leq \mathbf{0}, \; x \in X\} \tag{2.4}$$

bezeichnet hierbei die Menge aller global optimalen Lösungen der unteren Ebene in Abhängigkeit von $y \in Y$.

**Bemerkungen:**

1. Spezialfälle für diskrete Mengen $X$ sind $X = \mathbb{Z}^n$ und $X \subseteq \mathbb{R}^n$ mit endlicher Kardinalität $\operatorname{card}(X) < \infty$.
2. Es wird keine Stetigkeit von $g$ bezüglich $x$ gefordert. Auch für die Funktionen $f$ und $h$ wird zunächst keine Stetigkeit oder Differenzierbarkeit gefordert.

Weiter werden an die Aufgabe (2.1) folgende Forderungen gestellt:

$(F1)$ Es sei $\Psi(y) \neq \emptyset$ für alle $y \in Y$.

Ist diese Forderung in einer Aufgabe nicht erfüllt, so kann die Menge $Y$ auf eine Teilmenge mit der geforderten Eigenschaft eingeschränkt werden.

Weiter sei

$$\bar{X} := \{x \in X : \; \exists y \in Y \text{ mit } x \in \Psi(y)\}. \tag{2.5}$$

Für diese Menge fordern wir

$(F2)$ $\operatorname{card}(\bar{X}) < \infty$.

Ist $\operatorname{card}(X) < \infty$, so ist die Forderung (F2) automatisch erfüllt. Es gibt jedoch auch Aufgaben mit diskreter Menge $X$, für welche Forderung (F2) nicht erfüllt ist.

Die Forderungen (F1) und (F2) sind globale Voraussetzungen, welche ab sofort stets vorausgesetzt werden, es sei denn, es wird explizit angegeben, dass sie nicht benötigt werden.

**Beispiel 2.1.** *Sei $Y = [0.5; 1]$, $X = \mathbb{Z}$, $f(x,y) = y$ und $h(x,y) = y - x$. Dann ist $\Psi(y) = \{1, 2, 3, \ldots\} = \mathbb{N}$ für alle $y \in Y$. Also ist $\bar{X} = \mathbb{N}$, d.h. Forderung (F2) ist nicht erfüllt.*

Weiter impliziert Forderung (F2) die Eigenschaft

$$\operatorname{card}(\Psi(y)) < \infty \text{ für alle } y \in Y. \tag{2.6}$$

Die Umkehrung gilt jedoch i.a. nicht, d.h. $\operatorname{card}(\Psi(y)) < \infty$ für alle $y \in Y$ impliziert nicht die Gültigkeit von (F2).

**Beispiel 2.2.** *Sei $X = \mathbb{N}$, $Y = [0; 1]$, $h(x,y) = xy - 1$ und*

$$f(x,y) = \begin{cases} x & , \quad y = 0 \\ -x & , \quad y \neq 0 \end{cases}.$$

*Dann ist $\Psi(0) = \{1\}$ und $\Psi(y) = \{\lfloor 1/y \rfloor\}$ für alle $y \in (0; 1]$. Also ist $x \in \Psi(1/x)$ für alle $x \in X$, d.h. $\bar{X} = X = \mathbb{N}$ und $\operatorname{card}(\bar{X}) = \infty$.*

## 2.2 Stabilitätsbereiche

Eine Menge, die für uns noch sehr wichtig werden wird, ist der Stabilitätsbereich. Stabilitätsbereiche werden für Optimierungsaufgaben wie folgt definiert:

**Definition 2.1.** *Die Menge*

$$R(x) := \{y \in Y : \ x \in \Psi(y)\}$$

*heißt Stabilitätsbereich von $x \in X$.*

Ein Stabilitätsbereich von $x \in X$ ist also die Menge aller Parameter $y \in Y$, für welche $x$ eine global optimale Lösung der unteren Ebene ist.

Somit gilt offenbar $R(x) \neq \emptyset$ genau dann, wenn $x \in \bar{X}$ ist. Weiter impliziert die Forderung (F1) die Eigenschaft

$$Y = \bigcup_{x \in \bar{X}} R(x). \tag{2.7}$$

Für die Berechnung eines Stabilitätsbereichs $R(x)$, $x \in \bar{X}$, kann man einen Vergleich mit den anderen Elementen aus $\bar{X}$ verwenden.

**Lemma 2.1.** *Für alle $x \in \bar{X}$ gilt*

$$R(x) = \{y \in Y : \ h(x,y) \leq \mathbf{0}, \ (h(\bar{x},y) \nleq \mathbf{0} \ \textit{oder} \ f(x,y) \leq f(\bar{x},y)) \ \forall \bar{x} \in \bar{X}\}.$$

*Beweis.* Sei $x \in \bar{X}$ und $y \in R(x)$. Dann gilt laut Definition $x \in \Psi(y)$. Dann impliziert Formel (2.4) die Zulässigkeit von Punkt $x$, d.h. es ist $h(x,y) \leq \mathbf{0}$. Weiter darf kein $\bar{x} \in \bar{X}$ einen besseren Funktionswert als $x$ haben und zulässig sein. Also ist

$$R(x) \subseteq \{y \in Y : \ h(x,y) \leq \mathbf{0}, \ (h(\bar{x},y) \nleq \mathbf{0} \ \text{oder} \ f(x,y) \leq f(\bar{x},y)) \ \forall \bar{x} \in \bar{X}\}.$$

Sei $x \in \bar{X}$ und sei $y \in Y$, wobei die Bedingungen

$$h(x,y) \leq \mathbf{0}, \ (h(\bar{x},y) \nleq \mathbf{0} \ \text{oder} \ f(x,y) \leq f(\bar{x},y)) \ \forall \bar{x} \in \bar{X}$$

erfüllt sein sollen. Es ist $y \in R(x)$ zu zeigen. Wegen Forderung (F1) existiert ein $\widehat{x} \in \bar{X}$ mit $\widehat{x} \in \Psi(y)$. Der Punkt $\widehat{x} \in \bar{X}$ ist also zulässig und der Wert der Funktion $f(\cdot, y)$ ist im Punkt $\widehat{x}$ nicht schlechter als im Punkt $x$, d.h. es ist $f(\widehat{x},y) \leq f(x,y)$ und $h(\widehat{x},y) \leq \mathbf{0}$. Wegen der Annahme gilt weiter $f(\widehat{x},y) \geq f(x,y)$. Somit ist $f(\widehat{x},y) = f(x,y)$ und beide Punkte $x, \widehat{x}$ sind zulässige Lösungen der unteren Ebene. Wenn $\widehat{x}$ eine global optimale Lösung ist, so ist auch $x$ eine global optimale Lösung, d.h. es ist $x \in \Psi(y)$ und somit $y \in R(x)$. Also gilt

$$R(x) = \{y \in Y : \ h(x,y) \leq \mathbf{0}, \ (h(\bar{x},y) \nleq \mathbf{0} \ \text{oder} \ f(x,y) \leq f(\bar{x},y)) \ \forall \bar{x} \in \bar{X}\}.$$

□

Sei ein beliebiger Punkt $\widehat{x} \in X \backslash \bar{X}$ gegeben. Dann bedeutet $\widehat{x} \notin \bar{X}$, dass für jedes $y \in Y$ der Punkt $\widehat{x}$ nicht zulässig ist oder ein zulässiger Punkt $x \in \bar{X}$ existiert mit $f(x,y) < f(\widehat{x},y)$. Für alle $x \in \bar{X}$ und alle $y \in R(x)$ gilt also stets $h(\widehat{x},y) \not\leq \mathbf{0}$ oder $f(x,y) < f(\widehat{x},y)$. Somit können die Stabilitätsbereiche für alle $x \in X$ auch wie folgt beschrieben werden:

$$R(x) = \{y \in Y : h(x,y) \leq \mathbf{0},\ (h(\bar{x},y) \not\leq \mathbf{0} \text{ oder } f(x,y) \leq f(\bar{x},y))\ \forall \bar{x} \in X\}. \tag{2.8}$$

Stabilitätsbereiche können für einige spezielle diskrete Optimierungsaufgaben explizit berechnet werden, z.B.

1. für $m = 0$, $k = n \leq 3$, $\operatorname{card}(X) < \infty$ und $f(x,y) = \|x - y\|$. Bei dieser Aufgabenklasse entspricht die Berechnung von Stabilitätsbereichen der Berechnung von sogenannten Voronoi-Gebieten. Diese Berechnungen werden z.B. in [20] ausführlich erläutert.
2. für Probleme mit kleiner Kardinalität der Menge $X$.
3. für das Assortment Pricing Problem (siehe Kapitel 6).

Stabilitätsbereiche sind im allgemeinen weder offen noch abgeschlossen. Weiterhin müssen sie nicht zusammenhängend sein.

**Beispiel 2.3.** *Sei $X = \{0,1,2\}$, $Y = [0;3]$, $h(x,y) = x - y \leq 0$ und $f(x,y) = (x-y)^2$. Dann gilt $f(x,y) \leq f(\bar{x},y)$ genau dann wenn $x^2 - 2xy \leq \bar{x}^2 - 2\bar{x}y$ und somit $2y(\bar{x} - x) \leq \bar{x}^2 - x^2$ ist. Mit Formel (2.8) folgt also*

$$\begin{aligned}
R(0) &= \{y \in [0;3] : y \leq 0.5 \text{ oder } y < 1,\ y \leq 1 \quad \text{oder } y < 2\} = [0;1),\\
R(1) &= \{y \in [1;3] : y \geq 0.5 \text{ oder } y < 0,\ y \leq 1.5 \text{ oder } y < 2\} = [1;2),\\
R(2) &= \{y \in [2;3] : y \geq 1 \quad \text{oder } y < 0,\ y \geq 1.5 \text{ oder } y < 1\} = [2;3].
\end{aligned}$$

**Beispiel 2.4.** *Sei $X = \{-0.5, 0, 1\}$, $Y = [-1;1]$, $h(x,y) = x^2 - y^2 \leq 0$ und $f(x,y) = -x^2$. Dann ist*

$$R(-0.5) = (-1;-0.5] \cup [0.5;1),\ R(0) = (-0.5, 0.5) \text{ und } R(1) = \{-1\} \cup \{1\}.$$

*In diesem Beispiel ist also $R(0)$ offen, $R(1)$ ist abgeschlossen und $R(-0.5)$ weder das eine noch das andere. Außerdem sind $R(1)$ und $R(-0.5)$ nicht zusammenhängend.*

Stabilitätsbereiche können auch leer sein oder sich überlappen, d.h. für zwei Punkte $x, \bar{x} \in X$, $x \neq \bar{x}$ gilt $\operatorname{int} R(x) \cap \operatorname{int} R(\bar{x}) \neq \emptyset$.

**Beispiel 2.5.** *Sei $X = \{-1, 0, 1\}$, $Y = [-2;1]$, $h(x,y) = x + y \leq 0$ und $f(x,y) = -x^2$. Dann erhält man mit Formel (2.8)*

$$R(-1) = [-2;1], \quad R(0) = \emptyset, \quad R(1) = [-2;-1].$$

*Es gilt also $R(0) = \emptyset$, d.h. $0 \notin \bar{X}$, und $\operatorname{int} R(-1) \cap \operatorname{int} R(1) = (-2;-1) \neq \emptyset$.*

## 2.3 Eigenschaften der Lösungsmengen

Bekanntlich war

$$\Psi(y) = \operatorname{argmin}\{f(x,y) : \; h(x,y) \leq \mathbf{0}, \; x \in X\}$$

die Menge aller global optimalen Lösungen der unteren Ebene in Abhängigkeit von $y \in Y$. Aufgrund der Definition der Stabilitätsbereiche gilt auch

$$\Psi(y) = \{x \in \bar{X} : \; y \in R(x)\}. \tag{2.9}$$

Somit kann man bei Kenntnis der Stabilitätsbereiche leicht die Lösungsmenge $\Psi(y)$ für jedes $y \in Y$ bestimmen. Die Begriffe der Lösungsmenge und des Stabilitätsbereichs sind zueinander invers.

**Beispiel 2.6.** *Betrachten wir noch einmal die Aufgabe aus Beispiel 2.5. Die Stabilitätsbereiche waren hier $R(-1) = [-2; 1]$, $R(0) = \emptyset$ und $R(1) = [-2; -1]$. Somit ist $\Psi(y) = \{1, -1\}$ für alle $y \in [-2; -1]$ und $\Psi(y) = \{-1\}$ für alle $y \in (-1; 1]$.*

Eine wichtige Eigenschaft in der Zwei-Ebenen-Optimierung mit stetiger unterer Ebene ist die Oberhalbstetigkeit der Lösungsfunktion $\Psi(\cdot)$. Sie wird verwendet für die Diskussion der Lösbarkeit (siehe [6]). Es stellt sich somit die Frage nach der Oberhalbstetigkeit von $\Psi(\cdot)$ bei diskreter unterer Ebene.

**Definition 2.2.** *[1] Eine Punkt-Menge-Abbildung $\Gamma : Y \to 2^{\bar{X}}$ heißt oberhalbstetig in $y^0 \in Y$, wenn für jede offene Menge $\Omega \supseteq \Gamma(y^0)$ ein $\delta > 0$ existiert mit $\Omega \supseteq \Gamma(y)$ für alle $y \in Y$ mit $\|y - y^0\| < \delta$. Die Abbildung $\Gamma : Y \to 2^{\bar{X}}$ heißt oberhalbstetig, wenn sie in allen Punkten $y \in Y$ oberhalbstetig ist.*

Aufgrund der Endlichkeit von $\bar{X}$ kann die Oberhalbstetigkeit mit Hilfe von folgendem Lemma geprüft werden:

**Lemma 2.2.** *Eine Abbildung $\Gamma : Y \to 2^{\bar{X}}$ ist oberhalbstetig in $y^0 \in Y$ genau dann wenn ein $\delta > 0$ existiert mit $\Gamma(y^0) \supseteq \Gamma(y)$ für alle $y \in Y$ mit $\|y - y^0\| < \delta$.*

*Beweis.* Angenommen es existiert kein $\delta > 0$ mit $\Gamma(y^0) \supseteq \Gamma(y)$ für alle $y \in Y$ mit $\|y - y^0\| < \delta$. Dann gibt es eine Folge $\{y^k\} \subseteq Y$ mit $\lim_{k\to\infty} y^k = y^0$ und $\Gamma(y^0) \not\supseteq \Gamma(y^k)$ für alle $k$. Somit existiert aber auch eine Folge $\{x^k\} \subseteq \bar{X}$ mit $x^k \in \Gamma(y^k) \backslash \Gamma(y^0)$ für alle $k$. Da $\operatorname{card}(\bar{X}) < \infty$ ist, kann o.B.d.A. angenommen werden, dass die $x^k$ alle gleich sind. Es existiert also ein $x \in \Gamma(y^k) \backslash \Gamma(y^0)$ für alle $k$. Somit existiert eine offene Umgebung $\Omega \supseteq \Gamma(y^0)$ mit $x \notin \Omega$. Also ist $\Gamma$ nicht oberhalbstetig in $y^0 \in Y$.

Sei $\delta > 0$ und sei $\Gamma(y^0) \supseteq \Gamma(y)$ für alle $y \in Y$ mit $\|y - y^0\| < \delta$. Dann gilt für jede offene Menge $\Omega$ mit $\Omega \supseteq \Gamma(y^0)$ auch $\Omega \supseteq \Gamma(y^0) \supseteq \Gamma(y)$, d.h. $\Gamma$ ist oberhalbstetig. $\square$

Nun lässt sich leicht zeigen, dass die Lösungsmengenabbildung $\Psi(\cdot)$ im allgemeinen nicht oberhalbstetig ist.

**Beispiel 2.7.** *Wir betrachten noch einmal die Aufgabe aus Beispiel 2.3. Sei also* $X = \{0, 1, 2\}$*,* $Y = [0; 3]$*,* $h(x, y) = x - y \leq 0$ *und* $f(x, y) = (x - y)^2$*. Dann gilt*

$$R(0) = [0; 1), \quad R(1) = [1; 2) \quad \textit{und} \quad R(2) = [2; 3].$$

*Somit ist*

$$\Psi(1) = \{1\} \quad \textit{aber} \quad \Psi(y) = \{0\} \textit{ für alle } y \in [0; 1).$$

*Also existiert kein* $\delta > 0$ *mit* $\Psi(y) \subseteq \Psi(1)$ *für alle* $y \in Y$ *mit* $\|y - 1\| < \delta$*. Die Lösungsmengenabbildung ist in* $y^0 = 1$ *nicht oberhalbstetig.*

## 2.4 Die erweiterten Lösungsmengen

Da die Lösungsmengenabbildung $\Psi(\cdot)$ nicht oberhalbstetig ist, führen wir die sogenannte erweiterte Lösungsmengenabbildung $\bar{\Psi}(\cdot)$ ein.

**Definition 2.3.** *Die Menge*

$$\bar{\Psi}(y) := \{x \in \bar{X} : \ y \in \operatorname{cl} R(x)\}$$

*heißt erweiterte Lösungsmenge im Punkt* $y \in Y$*. Die zugehörige Punkt-Menge-Abbildung* $\bar{\Psi} : Y \to 2^{\bar{X}}$ *heißt erweiterte Lösungsmengenabbildung.*

**Beispiel 2.8.** *Sei noch einmal die Aufgabe aus Beispiel 2.3 bzw. Beispiel 2.7 gegeben mit* $X = \{0, 1, 2\}$*,* $Y = [0; 3]$*,* $h(x, y) = x - y \leq 0$ *und* $f(x, y) = (x - y)^2$*. Dann gilt bekanntlich*

$$R(0) = [0; 1), \quad R(1) = [1; 2) \quad \textit{und} \quad R(2) = [2; 3].$$

*Also ist*

$$\operatorname{cl} R(0) = [0; 1], \quad \operatorname{cl} R(1) = [1; 2] \quad \textit{und} \quad \operatorname{cl} R(2) = [2; 3].$$

*Es folgt somit* $\bar{\Psi}(1) = \{0, 1\} \neq \Psi(1) = \{1\}$*.*

Es macht Sinn bei $\bar{\Psi}(\cdot)$ von einer Erweiterung der Lösungsmengenabbildung zu sprechen, denn es gilt offensichtlich

$$\Psi(y) \subseteq \bar{\Psi}(y) \quad \text{für alle } y \in Y. \tag{2.10}$$

Weiterhin gilt $\Psi(y) = \bar{\Psi}(y)$ für alle $y \in Y$, falls die Stabilitätsbereiche abgeschlossen sind für alle $x \in \bar{X}$. Die wichtigste Eigenschaft von $\bar{\Psi}(\cdot)$ ist die Oberhalbstetigkeit. Es gilt:

**Theorem 2.3.** $\bar{\Psi}(\cdot)$ *ist die kleinste oberhalbstetige Punkt-Menge-Abbildung mit* $\Psi(y) \subseteq \bar{\Psi}(y)$ *für alle* $y \in Y$*.*

*Beweis.* Wir zeigen zunächst die Oberhalbstetigkeit von $\bar{\Psi}(\cdot)$. Angenommen $\bar{\Psi}(\cdot)$ ist nicht oberhalbstetig in $y^0 \in Y$. Dann existiert eine Folge $\{y^k\} \subseteq Y$ mit $\lim_{k\to\infty} y^k = y^0$ und $\bar{\Psi}(y^k) \nsubseteq \bar{\Psi}(y^0)$ für alle $k$. Da $\operatorname{card}(\bar{X}) < \infty$ ist und $\bar{\Psi}(y^k) \subseteq \bar{X}$, können wir o.B.d.A. annehmen, dass ein $x \in \bar{X}$ existiert mit

$$x \in \bar{\Psi}(y^k)\ \forall k \quad \text{und} \quad x \notin \bar{\Psi}(y^0).$$

Somit folgt

$$y^k \in \operatorname{cl} R(x)\ \forall k \quad \text{und} \quad y^0 \notin \operatorname{cl} R(x).$$

Dies ist aber ein Widerspruch zur Abgeschlossenheit von $\operatorname{cl} R(x)$. Also ist $\bar{\Psi}(\cdot)$ oberhalbstetig.

Angenommen es existiert eine oberhalbstetige Punkt-Menge-Abbildung $\Gamma(\cdot)$ mit

$$\Psi(y^0) \subseteq \Gamma(y^0) \subseteq \bar{\Psi}(y^0)$$

für ein $y^0 \in Y$ und $\Psi(y) \subseteq \Gamma(y)$ für alle $y \in Y$. Sei $x \in \bar{\Psi}(y^0)$ beliebig. Dann ist $y^0 \in \operatorname{cl} R(x)$. Somit existiert eine Folge $\{y^k\} \subseteq R(x)$ mit $\lim_{k\to\infty} y^k = y^0$. Also gilt $x \in \Psi(y^k) \subseteq \Gamma(y^k)$ für alle $k$. Aus der Oberhalbstetigkeit von $\Gamma(\cdot)$ folgt nun $x \in \Gamma(y^0)$. Also ist $\Gamma(y^0) = \bar{\Psi}(y^0)$. Folglich ist $\bar{\Psi}(\cdot)$ die kleinste oberhalbstetige Punkt-Menge-Abbildung mit $\Psi(y) \subseteq \bar{\Psi}(y)$ für alle $y \in Y$. □

## 2.5 Lösungsfunktionen

Wie wir schon gesehen haben (Beispiel 2.6), können die Lösungsmengen $\Psi(y)$ mehrere Elemente besitzen. Dies verursacht eine gewisse Unsicherheit in der Aufgabe der oberen Ebene. Es stellt sich die Frage, welches $x \in \Psi(y)$ in Aufgabe (2.2) verwendet werden soll. Um diesen Konflikt zu lösen, werden in der Literatur die folgenden zwei Zugänge vorgeschlagen (siehe z.B. [6]):

(a) **optimistischer Zugang:** Beim optimistischen Zugang wird statt Aufgabe (2.2) die Ersatzaufgabe

$$\begin{cases} \phi_o(y) \to \min \\ y \in Y \end{cases} \tag{2.11}$$

mit

$$\phi_o(y) = \min_{x \in \Psi(y)} g(x, y) \tag{2.12}$$

gelöst. Man geht hier davon aus, dass diejenige optimale Lösung der unteren Ebene gewählt wird, welche am günstigsten für den Zielfunktionswert der oberen Ebene ist. Man ist also „optimistisch“. Die Funktion $\phi_o : Y \to \mathbb{R}$ heißt **optimistische Lösungsfunktion**.

(b) **pessimistischer Zugang:** Beim pessimistischen Zugang wird statt Aufgabe (2.2) die Ersatzaufgabe

$$\begin{cases} \phi_p(y) \to \min \\ y \in Y \end{cases} \tag{2.13}$$

mit

$$\phi_p(y) = \max_{x \in \Psi(y)} g(x, y) \tag{2.14}$$

gelöst. Man geht hier davon aus, dass diejenige optimale Lösung der unteren Ebene gewählt wird, welche am ungünstigsten für den Zielfunktionswert der oberen Ebene ist. Man ist also „pessimistisch“. Die Funktion $\phi_p : Y \to \mathbb{R}$ heißt **pessimistische Lösungsfunktion**.

Die Lösungsfunktionen $\phi_o(\cdot)$ und $\phi_p(\cdot)$ sind bei diskreten Mengen $X$ im allgemeinen nicht stetig. Bei den Ersatzaufgaben (2.11) und (2.13) werden also unstetige Funktionen über einer kompakten Menge optimiert.

Im Zusammenhang mit der optimistischen und der pessimistischen Lösungsfunktion sollen weiter die folgenden Mengen eingeführt werden:

**Definition 2.4.** *Seien*

$$\begin{aligned} O(x) &:= \{y \in R(x) : \ \phi_o(y) = g(x, y)\} \ \textit{und} \\ P(x) &:= \{y \in R(x) : \ \phi_p(y) = g(x, y)\} \end{aligned}$$

*die Mengen aller $y \in Y$, bei welchen der Punkt $x \in X$ beim optimistischen bzw. pessimistischen Zugang ausgewählt werden kann.*

Diese Mengen sind im allgemeinen weder offen noch abgeschlossen. Sie können auch leer oder nicht zusammenhängend sein.

**Beispiel 2.9.** *Betrachten wir noch einmal die Aufgabe aus Beispiel 2.5, d.h. es sei $X = \{-1, 0, 1\}$, $Y = [-2; 1]$, $h(x, y) = x + y \leq 0$ und $f(x, y) = -x^2$. Dann gilt bekanntlich*

$$R(1) = [-2, -1], \quad R(0) = \emptyset \quad \textit{und} \quad R(-1) = [-2, 1].$$

*Also ist $\Psi(y) = \{1, -1\}$ für alle $y \in [-2, -1]$ und $\Psi(y) = \{-1\}$ für alle $y \in (-1, 1]$. Weiter sei $g(x, y) = xy$. Dann gilt*

$$\phi_o(y) = \begin{cases} y & \textit{für } y \in [-2, -1] \\ -y & \textit{für } y \in (-1, 1] \end{cases} \quad \textit{und} \quad \phi_p(y) = -y \quad \textit{für alle } y \in Y$$

*sowie*

$$\begin{aligned} &O(-1) = (-1, 1], \quad O(0) = \emptyset \quad \textit{und} \quad O(1) = [-2; -1], \\ &P(-1) = [-2, 1], \quad P(0) = \emptyset \quad \textit{und} \quad P(1) = \emptyset. \end{aligned}$$

Statt den Begriffen optimistische/pessimistische Lösungsfunktion werden in der Literatur (z.B. in [9]) gelegentlich die Begriffe starke/schwache Lösungsfunktion verwendet. Diese Begriffe sind jedoch irreführend, da hiermit eine Wertigkeit der Lösungsfunktionen impliziert wird. Im folgenden sollen diese Begriffe anderweitig verwendet werden.

Bekanntlich existiert stets eine lokales bzw. globales Minimum, wenn eine unterhalbstetige Funktion über einer kompakten Menge minimiert wird (siehe [25]).

**Definition 2.5.** *Eine Funktion $\phi : Y \to \mathbb{R}$ heißt unterhalbstetig in $y^0 \in Y$, wenn*

$$\liminf_{y \to y^0,\, y \in Y} \phi(y) \geq \phi(y^0)$$

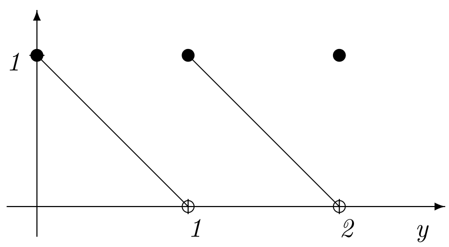
*gilt. Gilt diese Eigenschaft für alle Punkte $y^0 \in Y$, so heißt $\phi(\cdot)$ unterhalbstetig.*

Leider sind jedoch die optimistische und die pessimistische Lösungsfunktion im allgemeinen nicht unterhalbstetig.

**Beispiel 2.10.** *Sei $f(x, y) = (x - y)^2$, $h(x, y) = x - y$, $g(x, y) = 1 + x - y$, $X = \{0, 1, 2\}$ und $Y = [0; 2]$. Dies entspricht der Aufgabe aus Beispiel 2.8 mit veränderter Menge $Y$. Analog zu Beispiel 2.8 gilt dann $R(0) = [0; 1)$, $R(1) = [1; 2)$ und $R(2) = \{2\}$. Also ist $\operatorname{card}(\Psi(y)) = 1$ für alle $y \in Y$, d.h. optimistische und pessimistische Lösungsfunktion sind gleich. Es gilt*

$$\phi_o(y) = \phi_p(y) = \begin{cases} 1 - y, & y \in [0; 1) \\ 2 - y, & y \in [1; 2) \\ 3, & y = 2 \end{cases} .$$

*Somit sind die Lösungsfunktionen in den Punkten $y = 1$ und $y = 2$ nicht unterhalbstetig. Aus der Skizze ersieht man, dass kein lokales Minimum existiert.*




Somit haben die optimistische und die pessimistische Lösungsfunktion im allgemeinen kein lokales Minimum. Da wir dennoch zumindest eine „fast“ optimale Lösung ermitteln möchten, führen wir den Begriff der schwachen Lösungsfunktion ein.

## 2.6 Schwache Lösungsfunktionen

Wenn z.B. die Funktion $\phi_o : Y \to \mathbb{R}$ nicht unterhalbstetig ist in einem Punkt $y^0 \in Y$, so gilt wegen Definition 2.5 offenbar $\phi_o(y^0) > \liminf\limits_{y \to y^0,\, y \in Y} \phi_o(y)$. Da wir aber unterhalbstetige Funktionen betrachten wollen, motiviert uns dies zur Einführung folgender Funktionen:

**Definition 2.6.** *[26] Für alle $y^0 \in Y$ sei*

$$\bar{\phi}_o(y^0) := \liminf_{y \to y^0,\, y \in Y} \phi_o(y) \tag{2.15}$$

*und*

$$\bar{\phi}_p(y^0) := \liminf_{y \to y^0,\, y \in Y} \phi_p(y). \tag{2.16}$$

*Dann heißt $\bar{\phi}_o(\cdot)$ schwache optimistische Lösungsfunktion und $\bar{\phi}_p(\cdot)$ schwache pessimistische Lösungsfunktion.*

Aufgrund der Definition gilt offenbar für alle $y \in Y$

$$\bar{\phi}_o(y) \leq \phi_o(y) \quad \text{und} \quad \bar{\phi}_p(y) \leq \phi_p(y). \tag{2.17}$$

Im nächsten Theorem wollen wir zeigen, dass sowohl die schwache optimistische als auch die schwache pessimistische Lösungsfunktion unterhalbstetig sind. Somit besitzen beide Funktionen lokale und globale Minima über der kompakten Menge $Y$ (siehe [25]).

**Theorem 2.4.** *Die Funktionen $\bar{\phi}_o(\cdot)$ und $\bar{\phi}_p(\cdot)$ sind die größten unterhalbstetigen Funktionen mit $\bar{\phi}_o(y) \leq \phi_o(y)$ bzw. $\bar{\phi}_p(y) \leq \phi_p(y)$ für alle $y \in Y$.*

*Beweis.* Wir zeigen die Behauptung für die schwache optimistische Lösungsfunktion. Für die schwache pessimistische Lösungsfunktion ist der Beweis analog.
Seien ein beliebiger Punkt $y^0 \in Y$ und eine beliebige Folge $\{y^k\} \subseteq Y$ gegeben mit $\lim_{k\to\infty} y^k = y^0$. Wegen der Definition von $\bar{\phi}_o(\cdot)$ existiert für jedes $k$ ein Punkt $z^k \in Y$ mit $\|z^k - y^k\| < 1/k$ und $|\phi_o(z^k) - \bar{\phi}_o(y^k)| < 1/k$. Somit gilt

$$0 \leq \lim_{k\to\infty} \|z^k - y^0\| \leq \lim_{k\to\infty} (\|z^k - y^k\| + \|y^k - y^0\|) = 0,$$

d.h. die Folge $\{z^k\} \subseteq Y$ konvergiert gegen $y^0$. Weiter ist

$$\begin{aligned}
\bar{\phi}_o(y^0) &= \liminf_{y \to y^0,\, y \in Y} \phi_o(y) \leq \liminf_{k\to\infty} \phi_o(z^k) \\
&= \liminf_{k\to\infty} \left[(\phi_o(z^k) - \bar{\phi}_o(y^k)) + \bar{\phi}_o(y^k)\right] \\
&\leq \liminf_{k\to\infty} (1/k + \bar{\phi}_o(y^k)) = \liminf_{k\to\infty} \bar{\phi}_o(y^k).
\end{aligned}$$

Da die Folge $\{y^k\}$ beliebig war, ist $\bar{\phi}_o(\cdot)$ in $y^0$ unterhalbstetig. Wegen $y^0 \in Y$ beliebig ist also $\bar{\phi}_o(\cdot)$ unterhalbstetig.

Angenommen es existiert eine unterhalbstetige Funktion $\pi : Y \to \mathbb{R}$ mit $\pi(y) \leq \phi_o(y)$ für alle $y \in Y$ und $\bar{\phi}_o(y^0) \leq \pi(y^0) \leq \phi_o(y^0)$ für ein $y^0 \in Y$. Sei $\{y^k\} \subseteq Y$ eine Folge mit $\lim_{k\to\infty} y^k = y^0$ und $\bar{\phi}_o(y^0) = \lim_{k\to\infty} \phi_o(y^k)$. Dann gilt wegen der Unterhalbstetigkeit von $\pi(\cdot)$ und $\pi(y) \leq \phi_o(y)$ für alle $y \in Y$ die Ungleichung

$$\bar{\phi}_o(y^0) = \lim_{k\to\infty} \phi_o(y^k) \geq \lim_{k\to\infty} \pi(y^k) \geq \pi(y^0).$$

Also ist $\bar{\phi}_o(y) \geq \pi(y)$ für alle $y \in Y$. $\square$

Natürlich ist es ungünstig, die Definitionen (2.15) bzw. (2.16) für die Berechnung der schwachen optimistischen bzw. schwachen pessimistischen Lösungsfunktion zu verwenden. Wir benötigen also eine alternative Beschreibung für die Funktionen $\bar{\phi}_o(\cdot)$ und $\bar{\phi}_p(\cdot)$. Hierfür führen wir zunächst folgende Mengen ein:

$$\widehat{\Psi}_o(y) := \{x \in \bar{X} : \ y \in \operatorname{cl} O(x)\} \tag{2.18}$$

$$\widehat{\Psi}_p(y) := \{x \in \bar{X} : \ y \in \operatorname{cl} P(x)\} \tag{2.19}$$

Diese Mengen geben an, welche Elemente $x \in \bar{X}$ in der Umgebung eines Punktes $y \in Y$ beim optimistischen bzw. pessimistischen Zugang ausgewählt werden können. Aufgrund von $O(x) \subseteq R(x)$ bzw. $P(x) \subseteq R(x)$ sind dies Teilmengen von $\bar{\Psi}(y)$ für alle $y \in Y$, d.h. es gilt

$$\widehat{\Psi}_o(y) \subseteq \bar{\Psi}(y) \quad \text{und} \quad \widehat{\Psi}_p(y) \subseteq \bar{\Psi}(y) \quad \text{für alle } y \in Y. \tag{2.20}$$

Damit sind also zwei weitere Punkt-Menge-Abbildungen $\widehat{\Psi}_o : Y \to 2^{\bar{X}}$ und $\widehat{\Psi}_p : Y \to 2^{\bar{X}}$ definiert.
Auch bei den Punkt-Menge-Abbildungen $\widehat{\Psi}_o(\cdot)$ und $\widehat{\Psi}_p(\cdot)$ wird für uns die Oberhalbstetigkeit von Bedeutung sein. Es gilt:

**Theorem 2.5.** *Die Punkt-Menge-Abbildungen $\widehat{\Psi}_o : Y \to 2^{\bar{X}}$ und $\widehat{\Psi}_p : Y \to 2^{\bar{X}}$ sind oberhalbstetig.*

*Beweis.* Wir beweisen das Theorem für die Punkt-Menge-Abbildung $\widehat{\Psi}_o : Y \to 2^{\bar{X}}$. Für $\widehat{\Psi}_p : Y \to 2^{\bar{X}}$ ist der Beweis analog.

Angenommen die Behauptung gilt nicht. Dann existiert aufgrund von Lemma 2.2 ein $y^0 \in Y$ und eine Folge $\{y^k\} \subseteq Y$ mit $\lim_{k\to\infty} y^k = y^0$ und $\widehat{\Psi}_o(y^k) \not\subseteq \widehat{\Psi}_o(y^0)$ für alle $k$. Wegen $\operatorname{card}(\bar{X}) < \infty$ existiert somit o.B.d.A. ein $x \in \bar{X}$ mit $x \in \widehat{\Psi}_o(y^k)$ für alle $k$ und $x \notin \widehat{\Psi}_o(y^0)$. Also ist $y^k \in \operatorname{cl} O(x)$ für alle $k$. Wegen der Abgeschlossenheit von $\operatorname{cl} O(x)$ folgt hieraus $y^0 \in \operatorname{cl} O(x)$. Dies ist aber ein Widerspruch zu $x \notin \widehat{\Psi}_o(y^0)$. Somit muss $\widehat{\Psi}_o : Y \to 2^{\bar{X}}$ oberhalbstetig sein. $\square$

Nun können wir die eingeführten Punkt-Menge-Abbildungen nutzen, um die Funktionen $\bar{\phi}_o : Y \to \mathbb{R}$ und $\bar{\phi}_p : Y \to \mathbb{R}$ besser zu beschreiben.

**Theorem 2.6.** *Für alle $y \in Y$ gilt*

$$\bar{\phi}_o(y) = \min_{x \in \widehat{\Psi}_o(y)} g(x, y) \quad \text{und} \quad \bar{\phi}_p(y) = \min_{x \in \widehat{\Psi}_p(y)} g(x, y).$$

*Beweis.* Wir zeigen die Behauptung für die schwache optimistische Lösungsfunktion. Für die schwache pessimistische Lösungsfunktion ist der Beweis wiederum analog.

Sei $y \in Y$. Dann existiert wegen (2.15) eine Folge $\{y^k\} \subseteq Y$ mit $\lim_{k\to\infty} y^k = y$ und $\bar{\phi}_o(y) = \lim_{k\to\infty} \phi_o(y^k)$. Weiter existiert wegen $\operatorname{card}(\bar{X}) < \infty$ o.B.d.A. ein $x \in \bar{X}$ mit $y^k \in O(x)$ für alle $k$. Also ist $y \in \operatorname{cl} O(x)$, d.h. $x \in \widehat{\Psi}_o(y)$. Somit gilt

$$\bar{\phi}_o(y) = \lim_{k\to\infty} \phi_o(y^k) = \lim_{k\to\infty} g(x, y^k) = g(x, y)$$

für ein $x \in \widehat{\Psi}_o(y)$. Folglich ist

$$\bar{\phi}_o(y) \geq \min_{x \in \widehat{\Psi}_o(y)} g(x, y).$$

Sei $x \in \widehat{\Psi}_o(y)$ beliebig. Dann ist $y \in \operatorname{cl} O(x)$, d.h. es existiert eine Folge $\{y^k\} \subseteq O(x)$ mit $\lim_{k\to\infty} y^k = y$. Es gilt also $\phi_o(y^k) = g(x, y^k)$ für alle $k$. Somit ist

$$\bar{\phi}_o(y) \leq \liminf_{k\to\infty} \phi_o(y^k) = \liminf_{k\to\infty} g(x, y^k) = g(x, y).$$

Hieraus folgt

$$\bar{\phi}_o(y) \leq \min_{x \in \widehat{\Psi}_o(y)} g(x, y),$$

d.h. es gilt Gleichheit. □

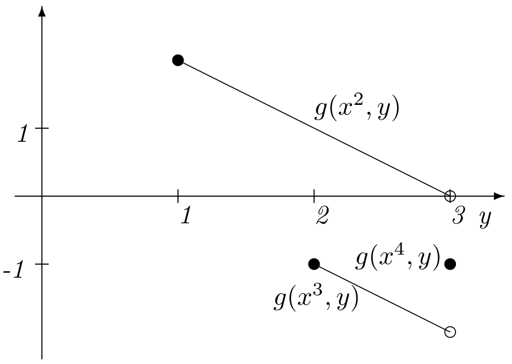
**Beispiel 2.11.** *Sei $f(x, y) = -(x_1 + x_2)$, $h(x, y) = x_1 + 2x_2 - y$, $g(x, y) = x_1 - x_2 - y + 2$, $X = \{0, 1\}^2$ und $Y = [1; 3]$. Mit Hilfe von Formel (2.8) erhält man folgende Stabilitätsbereiche für diese Aufgabe:*

$$R(x^1) = \emptyset,\ R(x^2) = [1; 3),\ R(x^3) = [2; 3) \text{ und } R(x^4) = \{3\}$$

*mit*

$$x^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ x^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ x^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } x^4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

*Als nächstes betrachten wir die Funktionen $g(x, \cdot)$ über den Stabilitätsbereichen $R(x)$.*




*Betrachtet man die Graphik, so kann man leicht die Lösungsfunktionen ablesen. Es ist*

$$\phi_o(y) = \begin{cases} 3 - y, & y \in [1; 2) \\ 1 - y, & y \in [2; 3) \\ -1, & y = 3 \end{cases} \quad \textit{und} \quad \phi_p(y) = \begin{cases} 3 - y, & y \in [1; 3) \\ -1, & y = 3 \end{cases} .$$

*Somit besitzt die optimistische Lösungsfunktion kein lokales Minimum. Weiter gilt für alle* $y \in Y$

$$\widehat{\Psi}_o(y) = \begin{cases} \{x^2\}, & y \in [1; 2) \\ \{x^2, x^3\}, & y = 2 \\ \{x^3\}, & y \in (2; 3) \\ \{x^3, x^4\}, & y = 3 \end{cases} \quad \textit{und} \quad \widehat{\Psi}_p(y) = \begin{cases} \{x^2\}, & y \in [1; 3) \\ \{x^2, x^4\}, & y = 3 \end{cases}$$

*sowie*

$$\bar{\phi}_o(y) = \begin{cases} 3 - y, & y \in [1; 2) \\ 1 - y, & y \in [2; 3] \end{cases} \quad \textit{und} \quad \bar{\phi}_p(y) = \phi_p(y).$$

*Die beiden schwachen Lösungsfunktionen* $\bar{\phi}_o(\cdot)$ *und* $\bar{\phi}_p(\cdot)$ *haben das einzige lokale bzw. globale Minimum bei* $y = 3$.

## 2.7 Optimalitätsbedingungen

Wie wir im Abschnitt 2.6 bereits erwähnt haben, besitzen die schwachen Lösungsfunktionen stets ein lokales Minimum. In diesem Abschnitt wollen wir nun Bedingungen aufstellen, mit deren Hilfe man untersuchen kann, ob in einem gegebenen Punkt $y^0 \in Y$ ein solches lokales Minimum vorliegt. Desweiteren werden wir auch Optimalitätsbedingungen für die optimistische/pessimistische Lösungsfunktion betrachten.

Im folgenden bezeichne $\text{locmin}\{\phi(y) : y \in Y\}$ die Menge aller lokal minimalen Lösungen für eine Funktion $\phi(\cdot)$ über $Y$. Dabei heißt

| | |
|---|---|
| $\operatorname{locmin}\{\bar{\phi}_o(y) : \; y \in Y\}$ | Menge der schwach lokal optimistischen Lösungen |
| $\operatorname{locmin}\{\bar{\phi}_p(y) : \; y \in Y\}$ | Menge der schwach lokal pessimistischen Lösungen |
| $\operatorname{locmin}\{\phi_o(y) : \; y \in Y\}$ | Menge der lokal optimistischen Lösungen |
| $\operatorname{locmin}\{\phi_p(y) : \; y \in Y\}$ | Menge der lokal pessimistischen Lösungen. |

Als erstes zeigen wir, das der Lösungsbegriff der schwach lokal optimistischen bzw. pessimistischen Lösung tatsächlich schwächer ist als der Lösungsbegiff der lokal optimistischen bzw. pessimistischen Lösung.

**Lemma 2.7.** *Es gilt*

1. $\operatorname{locmin}\{\phi_o(y) : \; y \in Y\} \subseteq \operatorname{locmin}\{\bar{\phi}_o(y) : \; y \in Y\}$,
2. $\operatorname{locmin}\{\phi_p(y) : \; y \in Y\} \subseteq \operatorname{locmin}\{\bar{\phi}_p(y) : \; y \in Y\}$.

*Beweis.* Wir zeigen die Behauptung für den optimistischen Zugang. Für die pessimistischen Lösungsfunktionen ist der Beweis analog.

Sei $y^0 \in \operatorname{locmin}\{\phi_o(y) : \; y \in Y\}$. Dann existiert ein $\delta > 0$ mit $\phi_o(y^0) \leq \phi_o(y)$ für alle $y \in Y$ mit $\|y - y^0\| < \delta$. Sei $y \in Y$ mit $\|y - y^0\| < \delta$ beliebig. Dann existiert eine Folge $\{y^k\} \subseteq Y$ mit $\lim_{k\to\infty} y^k = y$ und

$$\bar{\phi}_o(y) = \lim_{k\to\infty} \phi_o(y^k).$$

Für hinreichend großes $k$ gilt dann $\|y^k - y^0\| < \delta$ und somit $\phi_o(y^0) \leq \phi_o(y^k)$. Also ist

$$\bar{\phi}_o(y) = \lim_{k\to\infty} \phi_o(y^k) \geq \phi_o(y^0) \geq \bar{\phi}_o(y^0).$$

Da $y$ beliebig gewählt war, folgt hieraus $y^0 \in \operatorname{locmin}\{\bar{\phi}_o(y) : \; y \in Y\}$. □

Wir wissen also, dass jede lokal optimistische bzw. pessimistische Lösung auch eine schwach lokal optimistische bzw. pessimistische Lösung ist. Wie stellen wir nun fest, ob ein gegebener Punkt eine schwach lokal optimistische bzw. pessimistische Lösung ist? Zunächst führen wir hierfür folgende Mengen ein:

$$L_o(x) := \operatorname*{locmin}_y\{g(x,y) : \; y \in \operatorname{cl} O(x)\} \tag{2.21}$$

$$L_p(x) := \operatorname*{locmin}_y\{g(x,y) : \; y \in \operatorname{cl} P(x)\} \tag{2.22}$$

Nun kann das folgende Theorem verwendet werden.

**Theorem 2.8.** *Es ist*

1. $y^0 \in \operatorname{locmin}\{\bar{\phi}_o(y) : \; y \in Y\}$ *genau dann, wenn* $y^0 \in L_o(x)$ *gilt für alle* $x \in \widehat{\Psi}_o(y^0)$ *mit* $\bar{\phi}_o(y^0) = g(x, y^0)$.
2. $y^0 \in \operatorname{locmin}\{\bar{\phi}_p(y) : \; y \in Y\}$ *genau dann, wenn* $y^0 \in L_p(x)$ *gilt für alle* $x \in \widehat{\Psi}_p(y^0)$ *mit* $\bar{\phi}_p(y^0) = g(x, y^0)$.

*Beweis.* Wiederum zeigen wir die Behauptung für den optimistischen Zugang. Für die pessimistischen Lösungsfunktionen ist der Beweis analog.

Angenommen es gilt $y^0 \notin L_o(x)$ für ein $x \in \widehat{\Psi}_o(y^0)$ mit $\bar{\phi}_o(y^0) = g(x, y^0)$. Wegen $x \in \widehat{\Psi}_o(y^0)$ gilt $y^0 \in \operatorname{cl} O(x)$. Da $y^0 \notin L_o(x)$ ist, existiert eine Folge $\{y^k\} \subseteq \operatorname{cl} O(x)$ mit $\lim_{k\to\infty} y^k = y^0$ und

$$g(x, y^k) < g(x, y^0) \text{ für alle } k.$$

Weiter ist $\bar{\phi}_o(y^k) \leq g(x, y^k)$ für alle $k$, da Theorem 2.6 gilt und $x \in \widehat{\Psi}_o(y^k)$ aus $y^k \in \operatorname{cl} O(x)$ folgt. Es gilt somit

$$\bar{\phi}_o(y^k) \leq g(x, y^k) < g(x, y^0) = \bar{\phi}_o(y^0)$$

für alle $k$. Somit ist $y^0 \notin \operatorname{locmin}\{\bar{\phi}_o(y) : \ y \in Y\}$.

Angenommen es gilt $y^0 \notin \operatorname{locmin}\{\bar{\phi}_o(y) : \ y \in Y\}$ für $y^0 \in Y$. Dann existiert eine Folge $\{y^k\} \subseteq Y$ mit $\lim_{k\to\infty} y^k = y^0$ und

$$\bar{\phi}_o(y^k) < \bar{\phi}_o(y^0) \text{ für alle } k.$$

Wegen $\operatorname{card}(\bar{X}) < \infty$ existiert o.B.d.A. ein $x \in \bar{X}$ mit $x \in \widehat{\Psi}_o(y^k)$ und $\bar{\phi}_o(y^k) = g(x, y^k)$ für alle $k$ (siehe auch Theorem 2.6). Dann folgt $x \in \widehat{\Psi}_o(y^0)$ wegen der Oberhalbstetigkeit von $\widehat{\Psi}_o(\cdot)$ (Theorem 2.5). Somit ist

$$g(x, y^k) = \bar{\phi}_o(y^k) < \bar{\phi}_o(y^0) \leq g(x, y^0). \tag{2.23}$$

Lässt man $k$ gegen Unendlich konvergieren, so erhält man hieraus $\bar{\phi}_o(y^0) = g(x, y^0)$. Da $x \in \widehat{\Psi}_o(y^k)$ die Eigenschaft $y^k \in \operatorname{cl} O(x)$ impliziert, ist (2.23) somit gleichbedeutend mit $y^0 \notin L_o(x)$ für ein $x \in \widehat{\Psi}_o(y^0)$ mit $\bar{\phi}_o(y^0) = g(x, y^0)$. □

Wir können nun also prüfen, ob ein gegebener Punkt $y^0 \in Y$ eine schwach lokal optimistische bzw. pessimistische Lösung ist, falls die Mengen $\widehat{\Psi}_o(y^0)$ bzw. $\widehat{\Psi}_p(y^0)$ und $L_o(y^0)$ bzw. $L_p(y^0)$ bekannt sind. Wie man sich sich aber vorstellen kann, ist die Berechnung gerade dieser Mengen für viele Aufgaben recht schwierig. Somit sind wir auch noch an alternativen Optimalitätsbedingungen interessiert.

Zunächst definieren wir für jedes $x \in \bar{X}$ folgende Menge

$$\bar{L}(x) := \operatorname*{locmin}_y \{g(x, y) : \ y \in \operatorname{cl} R(x)\}. \tag{2.24}$$

Dann gilt folgendes Lemma.

**Lemma 2.9.** *Sei $y^0 \in Y$. Dann gilt*

$$\bar{\phi}_o(y^0) \leq g(x, y^0) \quad \text{\textit{für alle} } x \in \bar{\Psi}(y^0).$$

*Außerdem sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

*a)* $y^0 \in L_o(x)$ *für alle* $x \in \widehat{\Psi}_o(y^0)$ *mit* $\bar{\phi}_o(y^0) = g(x, y^0)$

*b)* $y^0 \in \bar{L}(x)$ *für alle* $x \in \bar{\Psi}(y^0)$ *mit* $\bar{\phi}_o(y^0) = g(x, y^0)$

*Beweis.* Sei $x \in \bar{\Psi}(y^0)$. Dann gilt $y^0 \in \operatorname{cl} R(x)$. Somit existiert eine Folge $\{y^k\} \subseteq R(x)$ mit $\lim_{k\to\infty} y^k = y^0$. Für alle $k$ ist also $x \in \Psi(y^k)$ und demzufolge auch $\phi_o(y^k) \leq g(x, y^k)$. Wenden wir hierauf den Grenzwert für $k$ gegen Unendlich an, so erhalten wir

$$\bar{\phi}_o(y^0) \leq \liminf_{k\to\infty} \phi_o(y^k) \leq \lim_{k\to\infty} g(x, y^k) = g(x, y^0)$$

und somit die erste Behauptung.

Im folgenden soll die Äquivalenz gezeigt werden. Angenommen Aussage a) gilt nicht. Dann existiert ein $x \in \widehat{\Psi}_o(y^0)$ mit $g(x, y^0) = \bar{\phi}_o(y^0)$ und $y^0 \notin L_o(x)$. Dann existiert eine Folge $\{y^k\} \subseteq \operatorname{cl} O(x)$ mit $\lim_{k\to\infty} y^k = y^0$ und $g(x, y^k) < g(x, y^0)$ für alle $k$. Wegen $\operatorname{cl} O(x) \subseteq \operatorname{cl} R(x)$ gilt somit $y^0 \notin \bar{L}(x)$. Weiter folgt $x \in \bar{\Psi}(y^0)$ aufgrund von (2.20). Also gilt Aussage b) nicht.

Angenommen Aussage b) gilt nicht. Dann existiert ein $x \in \bar{\Psi}(y^0)$ mit $\bar{\phi}_o(y^0) = g(x, y^0)$ und $y^0 \notin \bar{L}(x)$. Für dieses $x$ gibt es somit eine Folge $\{y^k\} \subseteq \operatorname{cl} R(x)$ mit $\lim_{k\to\infty} y^k = y^0$ und $g(x, y^k) < g(x, y^0)$ für alle $k$. Die Eigenschaft $\{y^k\} \subseteq \operatorname{cl} R(x)$ ist äquivalent zur Eigenschaft $x \in \bar{\Psi}(y^k)$ für alle $k$. Wegen der ersten Behauptung des Lemmas und $g(x, y^0) = \bar{\phi}_o(y^0)$ folgt somit

$$\bar{\phi}_o(y^k) \leq g(x, y^k) < g(x, y^0) = \bar{\phi}_o(y^0) \quad \text{für alle } k.$$

Also ist $y^0 \notin \operatorname{locmin}\{\bar{\phi}_o(y) : \; y \in Y\}$. Dann impliziert aber Theorem 2.8, dass Aussage a) nicht gilt. □

Zusammen mit Lemma 2.9 erhalten wir nun folgende Folgerung aus Theorem 2.8:

**Folgerung 2.10.** *Es ist* $y^0 \in \operatorname{locmin}\{\bar{\phi}_o(y) : \; y \in Y\}$ *genau dann, wenn* $y^0 \in \bar{L}(x)$ *gilt für alle* $x \in \bar{\Psi}(y^0)$ *mit* $\bar{\phi}_o(y^0) = g(x, y^0)$.

*Beweis.* trivial □

Im optimistischen Fall kann man die schwache lokale Optimalität also auch mit Hilfe der erweiterten Lösungsmengen und den Mengen $\bar{L}(x)$ berechnen.

Als nächstes werden wir Optimalitätsbedingungen für die optimistische bzw. pessimistische Lösungsfunktion betrachten.

**Theorem 2.11.** *Es ist*

1. $y^0 \in \operatorname{locmin}\{\phi_o(y) : \; y \in Y\}$ *genau dann, wenn die folgenden beiden Bedingungen gelten:*

(a) $\phi_o(y^0) \leq g(x, y^0)$ *für alle* $x \in \widehat{\Psi}_o(y^0)$,

(b) $y^0 \in L_o(x)$ *für alle* $x \in \widehat{\Psi}_o(y^0)$ *mit* $\phi_o(y^0) = g(x, y^0)$.

2. $y^0 \in \operatorname{locmin}\{\phi_p(y) : \; y \in Y\}$ *genau dann, wenn die folgenden beiden Bedingungen gelten:*

   (a) $\phi_p(y^0) \leq g(x, y^0)$ *für alle* $x \in \widehat{\Psi}_p(y^0)$,

   (b) $y^0 \in L_p(x)$ *für alle* $x \in \widehat{\Psi}_p(y^0)$ *mit* $\phi_p(y^0) = g(x, y^0)$.

*Beweis.* Wir zeigen die Behauptung für die pessimistische Lösungsfunktion. Beim optimistischen Fall ist der Beweis analog.

Sei $y^0 \in \operatorname{locmin}\{\phi_p(y) : \; y \in Y\}$. Angenommen Bedingung (a) gilt nicht, d.h. es existiert ein $x \in \widehat{\Psi}_p(y^0)$ mit $g(x, y^0) < \phi_p(y^0)$. Dann folgt $y^0 \in \operatorname{cl} P(x)$ aus $x \in \widehat{\Psi}_p(y^0)$. Somit existiert eine Folge $\{y^k\} \subseteq P(x)$ mit $\lim_{k\to\infty} y^k = y^0$. Also gilt $g(x, y^k) = \phi_p(y^k)$ für alle $k$. Bildet man den Grenzwert für $k$ gegen Unendlich, so erhält man nun

$$\limsup_{k\to\infty} \phi_p(y^k) = \lim_{k\to\infty} g(x, y^k) = g(x, y^0) < \phi_p(y^0).$$

Dies ist aber ein Widerspruch zu $y^0 \in \operatorname{locmin}\{\phi_p(y) : \; y \in Y\}$.

Angenommen Bedingung (a) gilt, aber Bedingung (b) gilt nicht. Dann existiert ein $x \in \widehat{\Psi}_p(y^0)$ mit $g(x, y^0) = \phi_p(y^0)$ und $y^0 \notin L_p(x)$. Weiter folgt aus (a)

$$\phi_p(y^0) \leq \inf_{x \in \widehat{\Psi}_p(y^0)} g(x, y^0) = \bar{\phi}_p(y^0),$$

d.h. $\phi_p(y^0) = \bar{\phi}_p(y^0) = g(x, y^0)$ (siehe (2.17)). Mit Theorem 2.8 erhalten wir also $y^0 \notin \operatorname{locmin}\{\bar{\phi}_p(y) : \; y \in Y\}$. Nun folgt $y^0 \notin \operatorname{locmin}\{\phi_p(y) : \; y \in Y\}$ wegen Lemma 2.7.

Ist also $y^0 \in \operatorname{locmin}\{\phi_p(y) : \; y \in Y\}$, so müssen die Bedingungen (a) und (b) gelten.

Angenommen $y^0 \in Y$ ist keine lokal pessimistische Lösung. Dann existiert eine Folge $\{y^k\} \subseteq Y$ mit $\lim_{k\to\infty} y^k = y^0$ und

$$\phi_p(y^k) < \phi_p(y^0) \quad \text{für alle } k. \tag{2.25}$$

Wegen $\operatorname{card}(\bar{X}) < \infty$ existiert o.B.d.A. für alle $k$ ein $x \in \Psi(y^k)$ mit $\phi_p(y^k) = g(x, y^k)$, d.h. es ist $y^k \in P(x)$ für alle $k$. Dies impliziert $y^0 \in \operatorname{cl} P(x)$ und somit $x \in \widehat{\Psi}_p(y^0)$. Zusammen mit der Ungleichung (2.25) folgt nun

$$g(x, y^k) = \phi_p(y^k) < \phi_p(y^0) \quad \text{für alle } k.$$

Bilden wir den Grenzwert für $k$ gegen Unendlich, so erhalten wir $g(x, y^0) \leq \phi_p(y^0)$. Wenn also Bedingung (a) gilt, so ist $g(x, y^0) = \phi_p(y^0)$. Dann folgt aber

$$g(x, y^k) = \phi_p(y^k) < \phi_p(y^0) = g(x, y^0) \quad \text{für alle } k,$$

d.h. Bedingung (b) gilt nicht. □

Es gilt somit folgende Folgerung:

**Folgerung 2.12.** *1. Es ist* $y^0 \in \operatorname{locmin}\{\phi_o(y) : \; y \in Y\}$ *genau dann, wenn* $\phi_o(y^0) = \bar{\phi}_o(y^0)$ *und* $y^0 \in \operatorname{locmin}\{\bar{\phi}_o(y) : \; y \in Y\}$ *gilt.*

*2. Es ist* $y^0 \in \operatorname{locmin}\{\phi_p(y) : \; y \in Y\}$ *genau dann, wenn* $\phi_p(y^0) = \bar{\phi}_p(y^0)$ *und* $y^0 \in \operatorname{locmin}\{\bar{\phi}_p(y) : \; y \in Y\}$ *gilt.*

*Beweis.* Wiederum zeigen die Behauptung nur für die pessimistische Lösungsfunktion. Beim optimistischen Fall ist der Beweis analog.

Angenommen $y^0 \in Y$ ist eine lokal pessimistische Lösung. Dann ist $y^0$ auch eine schwach lokal pessimistische Lösung wegen Lemma 2.7. Außerdem gilt $\phi_p(y^0) \leq g(x, y^0)$ für alle $x \in \widehat{\Psi}_p(y^0)$ (Theorem 2.11). Wenden wir Theorem 2.6 an, so erhalten wir also $\phi_p(y^0) \leq \bar{\phi}_p(y^0)$. Mit (2.17) folgt nun die Gleichheit.

Angenommen es gilt $\phi_p(y^0) = \bar{\phi}_p(y^0)$ und $y^0 \in \operatorname{locmin}\{\bar{\phi}_p(y) : \; y \in Y\}$. Dann ist

$$\bar{\phi}_p(y^0) = \min_{x \in \widehat{\Psi}_p(y^0)} g(x, y^0) = \phi_p(y^0),$$

d.h. wir erhalten $\phi_p(y^0) \leq g(x, y^0)$ für alle $x \in \widehat{\Psi}_p(y^0)$. Also gilt Bedingung (a) aus Theorem 2.11. Weiter folgt $y^0 \in L_p(x)$ für alle $x \in \widehat{\Psi}_p(y^0)$ mit $g(x, y^0) = \bar{\phi}_p(y^0)$ aus Theorem 2.8. Zusammen mit $\phi_p(y^0) = \bar{\phi}_p(y^0)$ ergibt dies Bedingung (b) aus Theorem 2.11. Also ist $y^0$ eine lokal pessimistische Lösung. □

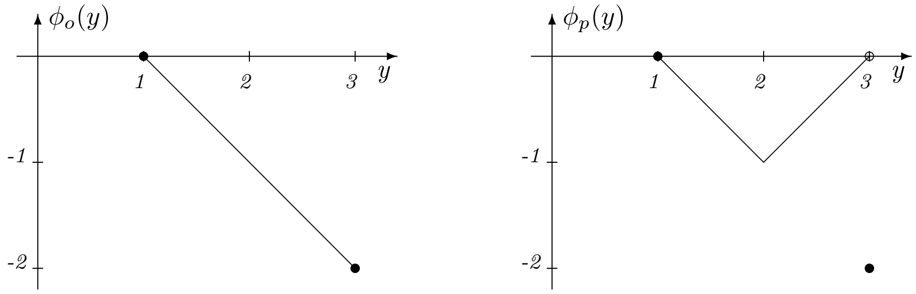
**Beispiel 2.12.** *Sei wie im Beispiel 2.11* $f(x, y) = -(x_1 + x_2)$, $h(x, y) = x_1 + 2x_2 - y$, $X = \{0, 1\}^2$ *und* $Y = [1; 3]$. *Im Gegensatz zum Beispiel 2.11 sei nun jedoch* $g(x, y) = (x_2 - x_1)y + x_1 - 3x_2$. *Dann sind die Stabilitätsbereiche*

$$R(x^1) = \emptyset, \; R(x^2) = [1; 3), \; R(x^3) = [2; 3) \; \textit{und} \; R(x^4) = \{3\}$$

*für die zulässigen Punkte*

$$x^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; x^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; x^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \; \textit{und} \; x^4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

*unverändert. Da jedoch die Funktion* $g(\cdot, \cdot)$ *geändert wurde, erhalten wir andere Lösungsfunktionen. Diese werden in den folgenden Bildern dargestellt:*



*Wir überprüfen nun den Punkt $y^0 = 2$ auf lokale Optimalität. Mit Hilfe der Stabilitätsbereiche erkennt man leicht, dass $\Psi(y^0) = \bar{\Psi}(y^0) = \{x^2, x^3\}$ gilt. Die Mengen $\widehat{\Psi}_o(y^0)$ und $\widehat{\Psi}_p(y^0)$ sind bekanntlich Teilmengen von $\bar{\Psi}(y^0)$. Wegen $g(x^2, y^0) = -1 = g(x^3, y^0)$ gilt somit*

$$\widehat{\Psi}_o(y^0) = \widehat{\Psi}_p(y^0) = \{x^2, x^3\}$$

*und*

$$\phi_o(y^0) = \phi_p(y^0) = \bar{\phi}_o(y^0) = \bar{\phi}_p(y^0) = -1.$$

*Also ist im Punkt $y^0 = 2$ die Bedingung (a) aus Theorem 2.11 sowohl für den pessimistischen als auch den optimistischen Fall erfüllt. Wir überprüfen nun die Bedingung (b) aus Theorem 2.11. Es gilt*

$$O(x^2) = [1; 3),\ O(x^3) = \{2\},\ P(x^2) = [1; 2] \text{ und } P(x^3) = [2; 3).$$

*Also ist*

$$L_o(x^2) = \{3\},\ L_o(x^3) = \{2\},\ L_p(x^2) = \{2\} \text{ und } L_p(x^3) = \{2\}.$$

*Somit gilt $\phi_o(y^0) = g(x^2, y^0)$ aber $y^0 \notin L_o(x^2)$, d.h. $y^0 = 2$ ist keine (schwach) lokal optimistische Lösung. Für den pessimistischen Fall gilt $y^0 \in L_p(x^2)$ und $y^0 \in L_p(x^3)$, d.h. $y^0 = 2$ ist eine (schwach) lokal pessimistische Lösung.*

## 2.8 Die Berechnung von schwach lokal optimistischen bzw. pessimistischen Lösungen

Nachdem wir Optimalitätsbedingungen kennen, stellt sich die Frage, wie man zumindest eine schwach lokal optimistische bzw. pessimistische Lösungen finden kann. Meist hat man schon eine Vorstellung, in welchem Bereich von $Y$ so eine Lösung liegen könnte. Wir beginnen also mit einem Startpunkt $y^0 \in Y$ und versuchen sukzessive den Funktionswert der entsprechenden schwachen Lösungsfunktion zu verbessern.

**Algorithmus 2.1. (Schwach lokal optimistische Lösung)**

*Eingabe:* $y^0 \in Y$

0. $k := 0$
1. *Berechne* $\widehat{\Psi}_o(y^k)$, $\bar{\phi}_o(y^k)$ *und* $M(y^k) := \{x \in \widehat{\Psi}_o(y^k) : \bar{\phi}_o(y^k) = g(x, y^k)\}$.
2. *Falls ein* $x^k \in M(y^k)$ *existiert mit* $y^k \notin L_o(x^k)$, *so wähle ein* $y^{k+1} \in L_o(x^k)$ *und gehe mit* $k := k + 1$ *zu Schritt 1.; sonst Stopp.*

*Ausgabe:* $y^k \in \operatorname{locmin}\{\bar{\phi}_o(y) :\ y \in Y\}$

**Theorem 2.13.** *Algorithmus 2.1 berechnet in endlich vielen Iterationen eine schwach lokal optimistische Lösung.*

*Beweis.* Wenn der Algorithmus stoppt, so ersieht man leicht aus Theorem 2.8, dass der berechnete Punkt eine schwach lokal optimistische Lösung ist. Es ist also nur zu zeigen, dass der Algorithmus tatsächlich nach endlich vielen Iterationen stoppt. Angenommen dies ist nicht der Fall. Dann berechnet der Algorithmus Folgen $\{y^k\} \subseteq Y$ und $\{x^k\} \subseteq \bar{X}$ mit $x^k \in M(y^k)$, $y^k \notin L_o(x^k)$ und $y^{k+1} \in L_o(x^k)$ für alle $k \geq 0$. Aus $y^{k+1} \in L_o(x^k)$ für alle $k$ folgt weiter $x^k \in \widehat{\Psi}_o(y^{k+1})$ und somit $\bar{\phi}_o(y^{k+1}) \leq g(x^k, y^{k+1})$ für alle $k$. Also gilt

$$\bar{\phi}_o(y^k) = g(x^k, y^k) > g(x^k, y^{k+1}) \geq \bar{\phi}_o(y^{k+1}) \text{ für alle } k.$$

Demzufolge ist $\bar{\phi}_o(y^k) > \bar{\phi}_o(y^l)$ für alle Indizes $k < l$. Da $\operatorname{card}(\bar{X}) < \infty$ gilt, existierten zwei Indizes $k, l$ mit $k < l$ und $x^k = x^l$. Dann ist $x^k = x^l \in \widehat{\Psi}_o(y^l)$, d.h. $y^l \in \operatorname{cl} O(x^k)$. Zusammen mit $y^{k+1} \in L_o(x^k)$ und $y^l \notin L_o(x^l) = L_o(x^k)$ ergibt dies

$$g(x^k, y^{k+1}) < g(x^k, y^l) = g(x^l, y^l).$$

Dies ist aber ein Widerspruch zu

$$g(x^k, y^{k+1}) \geq \bar{\phi}_o(y^{k+1}) \geq \bar{\phi}_o(y^l) = g(x^l, y^l).$$

Also endet der Algorithmus nach endlich vielen Iterationen. □

**Algorithmus 2.2. (Schwach lokal pessimistische Lösung)**

*Eingabe:* $y^0 \in Y$

0. $k := 0$
1. *Berechne* $\widehat{\Psi}_p(y^k)$, $\bar{\phi}_p(y^k)$ *und* $M(y^k) := \{x \in \widehat{\Psi}_p(y^k) : \bar{\phi}_p(y^k) = g(x, y^k)\}$.
2. *Falls ein* $x^k \in M(y^k)$ *existiert mit* $y^k \notin L_p(x^k)$, *so wähle ein* $y^{k+1} \in L_p(x^k)$ *und gehe mit* $k := k + 1$ *zu Schritt 1.; sonst Stopp.*

*Ausgabe:* $y^k \in \operatorname{locmin}\{\bar{\phi}_p(y) : y \in Y\}$

**Theorem 2.14.** *Algorithmus 2.2 berechnet in endlich vielen Iterationen eine schwach lokal pessimistische Lösung.*

*Beweis.* Der Beweis ist analog zum Beweis von Theorem 2.13. □

**Beispiel 2.13.** *Wir betrachten nochmals die Aufgabe aus Beispiel 2.12. Angenommen wir haben einen Startpunkt* $y^0 = 1$ *gegeben und wollen eine schwach lokal optimistische bzw. schwach lokal pessimistische Lösung bestimmen. Es gilt*

$$\widehat{\Psi}_o(y^0) = \widehat{\Psi}_p(y^0) = \{x^2\} \text{ und } L_o(x^2) = \{3\}, \; L_p(x^2) = \{2\}.$$

*Also ist* $y^0 \notin L_o(x^2)$ *und* $y^0 \notin L_p(x^2)$.

*Im optimistischen Fall wird nun von Algorithmus 2.1 der Punkt* $y^1 = 3$ *berechnet. In diesem Punkt ist* $M(y^1) = \{x^2, x^4\}$ *und* $y^1 \in L_o(x^2) = L_o(x^4)$. *Somit bricht Algorithmus 2.1 hier ab. Der Punkt* $y^1 = 3$ *ist eine schwache lokal optimistische Lösung. Wie man leicht aus der Graphik in Beispiel 2.12 ersieht, ist* $y^1 = 3$ *auch eine global optimale Lösung für den optimistischen Fall.*

*Im pessimistischen Fall wird von Algorithmus 2.2 der Punkt* $y^1 = 2$ *berechnet. In diesem Punkt ist* $M(y^1) = \{x^2, x^3\}$ *und* $y^1 \in L_o(x^2) = L_o(x^3)$. *Somit bricht Algorithmus 2.2 hier ab. Der Punkt* $y^1 = 2$ *ist eine schwache lokal pessimistische Lösung. Mit Hilfe der Graphik in Beispiel 2.12 erkennt man, dass* $y^1 = 2$ *keine global optimale Lösung für den pessimistischen Fall ist. Eine global optimale Lösung für den pessimistischen Fall ist der Punkt* $y = 3$. *Mit Hilfe von Algorithmus 2.2 erhält man diesen Punkt jedoch nur, wenn der Startpunkt* $y^0 = 3$ *ist.*

# Kapitel 3

# Auswahlfunktionen

## 3.1 Grundlagen

Im Kapitel 2 hatten wir bereits den optimistischen und den pessimistischen Zugang für die Lösung unseres Zwei-Ebenen-Optimierungsproblems (2.1) betrachtet. Dabei hatten wir jedoch nur auf den Zielfunktionswert der oberen Ebene geachtet, d.h. es war egal welches der Elemente $x \in \Psi(y)$ mit der Eigenschaft $\phi_o(y) = g(x, y)$ bzw. $\phi_p(y) = g(x, y)$ gewählt wurde.

In der Praxis ist es im allgemeinen nicht so, dass der Follower bei seiner Wahl die Interessen des Leaders beachtet (weder im positiven noch im negativen Sinn). Seine Wahl wird eher von verwendeten Berechnungsalgorithmen oder internen Präferenzen abhängen.

Im folgenden werden wir einen allgemeinen Zugang betrachten, bei welchem der Leader für jedes $y \in Y$ weiß, welches $x \in \Psi(y)$ vom Follower gewählt wird.

**Definition 3.1.** *Eine Funktion $\sigma : Y \to X$ heißt Auswahlfunktion, wenn für alle $y \in Y$*

$$\sigma(y) \in \Psi(y)$$

*gilt. Wenn $x = \sigma(y)$ gilt für ein $x \in X$ und ein $y \in Y$, so sagen wir auch, dass der Punkt $x$ im Punkt $y$ durch die Auswahlfunktion $\sigma$ ausgewählt wird. Die Menge aller Auswahlfunktionen bezeichnen wir mit $\mathfrak{S}$. Weiter sei*

$$S_\sigma(x) := \{y \in Y : \ \sigma(y) = x\}$$

*die Menge aller $y \in Y$, in welchen ein gegebener Punkt $x \in X$ durch die Auswahlfunktion $\sigma \in \mathfrak{S}$ ausgewählt wird.*

**Beispiel 3.1.** *Sei $f(x, y) = y$, $h(x, y) = y - x$, $X = \{-1, 0, 1\}$ und $Y = [-1; 1]$. Dann erhält man*

$$R(-1) = \{-1\}, \quad R(0) = [-1; 0], \quad R(1) = [-1; 1]$$

*und*

$$\Psi(y) = \begin{cases} \{-1, 0, 1\} & \text{für } y = -1 \\ \{0, 1\} & \text{für } y \in (-1; 0] \\ \{1\} & \text{für } y \in (0; 1]. \end{cases}$$

*Wir betrachten nun eine Funktion $\sigma : Y \to X$ mit*

$$\sigma(y) = \begin{cases} 1 & \text{für } y \geq -1/2 \\ 0 & \text{für } y < -1/2. \end{cases}$$

*Dann gilt $\sigma(y) = 1 \in \Psi(y)$ für alle $y \geq -1/2$ und $\sigma(y) = 0 \in \Psi(y)$ für alle $y < -1/2$. Somit ist die Funktion $\sigma : Y \to X$ eine Auswahlfunktion. Dabei gilt*

$$S_\sigma(-1) = \emptyset, \quad S_\sigma(0) = [-1; -0.5) \quad \text{und} \quad S_\sigma(1) = [-0.5; 1].$$

Es können nun einige Eigenschaften der Mengen $S_\sigma(x)$ angegeben werden.

**Lemma 3.1.** *1. Sei $\sigma : Y \to \bar{X}$ eine Auswahlfunktion. Dann gilt*

$$S_\sigma(x^1) \cap S_\sigma(x^2) = \emptyset \quad \text{für alle } x^1, x^2 \in X \text{ mit } x^1 \neq x^2.$$

*2. Es gilt*

$$S_\sigma(x) \subseteq R(x) \quad \text{für alle } x \in X$$

*und alle Auswahlfunktionen $\sigma \in \mathfrak{S}$.*

*3. Es gilt*

$$R(x) = \bigcup_{\sigma \in \mathfrak{S}} S_\sigma(x) \quad \text{für alle } x \in X.$$

*Beweis.* 1. Seien zwei Punkte $x^1, x^2 \in X$ gegeben mit $x^1 \neq x^2$. Angenommen es existiert ein $y \in S_\sigma(x^1) \cap S_\sigma(x^2)$ für eine Auswahlfunktion $\sigma \in \mathfrak{S}$. Dann gilt laut Definition 3.1 $\sigma(y) = x^1$ und auch $\sigma(y) = x^2$. Dies ist ein Widerspruch zu $x^1 \neq x^2$.

2. Seien $x \in X$ und $\sigma \in \mathfrak{S}$ beliebig und sei $y \in S_\sigma(x)$. Dann gilt $x = \sigma(y)$. Da $\sigma$ eine Auswahlfunktion ist, folgt somit $x \in \Psi(y)$, d.h. $y \in R(x)$. Also gilt $S_\sigma(x) \subseteq R(x)$.

3. „ $\supseteq$ “ : Diese Inklusion folgt offensichtlich aus der Eigenschaft $S_\sigma(x) \subseteq R(x)$ für alle $\sigma \in \mathfrak{S}$ und alle $x \in X$.

   „ $\subseteq$ “ : Seien $x \in X$ und $y^0 \in R(x)$ beliebig. Weiter sei eine beliebige Auswahlfunktion $\sigma \in \mathfrak{S}$ gegeben. Wir betrachten nun die Funktion $\bar{\sigma} : Y \to X$ mit

$$\bar{\sigma}(y) = \begin{cases} x & \text{falls } y = y^0 \\ \sigma(y) & \text{falls } y \neq y^0. \end{cases}$$

Dann gilt $\bar{\sigma}(y) = \sigma(y) \in \Psi(y)$ für alle $y \neq y^0$ wegen $\sigma \in \mathfrak{S}$ und $\bar{\sigma}(y) = x \in \Psi(y)$ für $y = y^0$ wegen $y^0 \in R(x)$. Also ist die Funktion $\bar{\sigma} : Y \to X$ eine Auswahlfunktion mit $y^0 \in S_{\bar{\sigma}}(x)$. Mit

$$y^0 \in \bigcup_{\sigma \in \mathfrak{S}} S_\sigma(x).$$

folgt nun die Inklusion.

□

## 3.2 Lösungsfunktionen

Wie schon in den Abschnitten 2.5 und 2.6 für den optimistischen und pessimistischen Zugang wollen wir auch für den Zugang mittels Auswahlfunktionen Lösungsfunktionen und schwache Lösungsfunktionen für unsere Aufgabe 2.1 definieren.

**Definition 3.2.** *Sei $\sigma \in \mathfrak{S}$ eine Auswahlfunktion. Dann heißt die Funktion $\phi_\sigma : Y \to \mathbb{R}$ mit*

$$\phi_\sigma(y) := g(\sigma(y), y) \tag{3.1}$$

*die zu $\sigma$ gehörige Lösungsfunktion.*

Vergleicht man diese Lösungsfunktion mit der optimistischen und der pessimistischen Lösungsfunktion aus Abschnitt 2.6, so gilt offenbar für alle Auswahlfunktionen $\sigma \in \mathfrak{S}$ die Beziehung

$$\phi_o(y) \leq \phi_\sigma(y) \leq \phi_p(y) \qquad \text{für alle } y \in Y. \tag{3.2}$$

**Beispiel 3.2.** *Betrachten wir noch einmal die Aufgabe und die Auswahlfunktion aus Beispiel 3.1. Sei nun weiter $g(x, y) = (x - 1)(y + 1)$. Dann gilt*

$$\phi_\sigma(y) = \begin{cases} -y - 1 & \textit{für } y \in [-1; -0.5) \\ 0 & \textit{für } y \in [-0.5; 1]. \end{cases}$$

*Diese Lösungsfunktion entspricht somit weder der optimistischen noch der pessimistischen Lösungsfunktion. Außerdem erkennt man leicht, dass sie im Punkt $y^0 = -0.5$ nicht unterhalbstetig ist.*

Ebenso wie beim optimistischen und pessimistischen Zugang erhalten wir also auch hier Lösungsfunktionen, welche im allgemeinen nicht unterhalbstetig sind. Aus diesem Grund führen wir erneut den Begriff der schwachen Lösungsfunktion ein.

**Definition 3.3.** *Sei $\sigma \in \mathfrak{S}$ eine Auswahlfunktion. Dann heißt die Funktion $\bar{\phi}_\sigma : Y \to \mathbb{R}$ mit*

$$\bar{\phi}_\sigma(y^0) := \liminf_{y \to y^0,\, y \in Y} \phi_\sigma(y) \tag{3.3}$$

*die zu $\sigma$ gehörige schwache Lösungsfunktion.*

Die Betrachtungen für diese Lösungsfunktion sind analog zu den Betrachtungen aus Abschnitt 2.6. Auch hier sind z.B. die Funktionswerte der schwachen Lösungsfunktion nicht größer als die Funktionswerte der Lösungsfunktion selbst. Es gilt also für alle Auswahlfunktionen $\sigma \in \mathfrak{S}$ und alle $y \in Y$ auf Grund von Definition 3.3 offenbar

$$\bar{\phi}_\sigma(y) \leq \phi_\sigma(y). \tag{3.4}$$

Außerdem kann eine analoge Aussage zu Theorem 2.4 angegeben werden.

**Theorem 3.2.** *Sei $\sigma \in \mathfrak{S}$. Dann ist die Funktion $\bar{\phi}_\sigma(\cdot)$ die größte unterhalbstetige Funktion mit $\bar{\phi}_\sigma(y) \leq \phi_\sigma(y)$ für alle $y \in Y$.*

*Beweis.* Seien ein beliebiger Punkt $y^0 \in Y$ und eine beliebige Folge $\{y^k\} \subseteq Y$ gegeben mit $\lim_{k\to\infty} y^k = y^0$. Wegen der Definition von $\bar{\phi}_\sigma(\cdot)$ existiert für jedes $k$ ein Punkt $z^k \in Y$ mit $\|z^k - y^k\| < 1/k$ und $|\phi_\sigma(z^k) - \bar{\phi}_\sigma(y^k)| < 1/k$. Somit gilt

$$0 \leq \lim_{k\to\infty} \|z^k - y^0\| \leq \lim_{k\to\infty} (\|z^k - y^k\| + \|y^k - y^0\|) = 0,$$

d.h. die Folge $\{z^k\} \subseteq Y$ konvergiert gegen $y^0$. Weiter ist

$$\begin{aligned}
\bar{\phi}_\sigma(y^0) &= \liminf_{y\to y^0,\ y\in Y} \phi_\sigma(y) \leq \liminf_{k\to\infty} \phi_\sigma(z^k) \\
&= \liminf_{k\to\infty} \left[(\phi_\sigma(z^k) - \bar{\phi}_\sigma(y^k)) + \bar{\phi}_\sigma(y^k)\right] \\
&\leq \liminf_{k\to\infty} (1/k + \bar{\phi}_\sigma(y^k)) = \liminf_{k\to\infty} \bar{\phi}_\sigma(y^k).
\end{aligned}$$

Da die Folge $\{y^k\}$ beliebig war, ist $\bar{\phi}_\sigma(\cdot)$ in $y^0$ unterhalbstetig. Wegen $y^0 \in Y$ beliebig, ist also $\bar{\phi}_\sigma(\cdot)$ unterhalbstetig.

Angenommen es existiert eine unterhalbstetige Funktion $\pi : Y \to \mathbb{R}$ mit $\pi(y) \leq \phi_\sigma(y)$ für alle $y \in Y$ und $\bar{\phi}_\sigma(y^0) \leq \pi(y^0) \leq \phi_\sigma(y^0)$ für ein $y^0 \in Y$. Sei $\{y^k\} \subseteq Y$ eine Folge mit $\lim_{k\to\infty} y^k = y^0$ und $\bar{\phi}_\sigma(y^0) = \lim_{k\to\infty} \phi_\sigma(y^k)$. Dann gilt wegen der Unterhalbstetigkeit von $\pi(\cdot)$ und $\pi(y) \leq \phi_\sigma(y)$ für alle $y \in Y$ die Ungleichung

$$\bar{\phi}_\sigma(y^0) = \lim_{k\to\infty} \phi_\sigma(y^k) \geq \lim_{k\to\infty} \pi(y^k) \geq \pi(y^0).$$

Also ist $\bar{\phi}_\sigma(y) \geq \pi(y)$ für alle $y \in Y$. □

Für eine bessere Beschreibung der schwachen Lösungsfunktion führen wir eine Punkt-Menge-Abbildung $\widehat{\Psi}_\sigma : Y \to 2^{\bar{X}}$ für $\sigma \in \mathfrak{S}$ ein mit

$$\widehat{\Psi}_\sigma(y) := \{x \in \bar{X} : \ y \in \operatorname{cl} S_\sigma(x)\}. \tag{3.5}$$

Da für jedes $\sigma \in \mathfrak{S}$ und jedes $x \in \bar{X}$ die Inklusion $S_\sigma(x) \subseteq R(x)$ gilt (Lemma 3.1), folgt nun

$$\widehat{\Psi}_\sigma(y) \subseteq \bar{\Psi}(y) \qquad \text{für alle } y \in Y \text{ und alle } \sigma \in \mathfrak{S}. \tag{3.6}$$

**Theorem 3.3.** *Für alle $y \in Y$ und alle Auswahlfunktionen $\sigma \in \mathfrak{S}$ gilt*

$$\bar{\phi}_\sigma(y) = \min_{x \in \widehat{\Psi}_\sigma(y)} g(x, y).$$

*Beweis.* Sei $y \in Y$ und $\sigma \in \mathfrak{S}$. Dann existiert wegen (3.3) eine Folge $\{y^k\} \subseteq Y$ mit $\lim_{k\to\infty} y^k = y$ und $\bar{\phi}_\sigma(y) = \lim_{k\to\infty} \phi_\sigma(y^k)$. Weiter existiert wegen $\operatorname{card}(\bar{X}) < \infty$ o.B.d.A. ein $x \in \bar{X}$ mit $y^k \in S_\sigma(x)$ für alle $k$. Also ist $y \in \operatorname{cl} S_\sigma(x)$, d.h. $x \in \widehat{\Psi}_\sigma(y)$. Somit gilt

$$\bar{\phi}_\sigma(y) = \lim_{k\to\infty} \phi_\sigma(y^k) = \lim_{k\to\infty} g(x, y^k) = g(x, y)$$

für ein $x \in \widehat{\Psi}_\sigma(y)$. Folglich ist

$$\bar{\phi}_\sigma(y) \geq \min_{x \in \widehat{\Psi}_\sigma(y)} g(x, y).$$

Sei $x \in \widehat{\Psi}_\sigma(y)$. Dann ist $y \in \operatorname{cl} S_\sigma(x)$, d.h. es existiert eine Folge $\{y^k\} \subseteq S_\sigma(x)$ mit $\lim_{k\to\infty} y^k = y$. Es gilt also $\phi_\sigma(y^k) = g(x, y^k)$ für alle $k$. Somit ist

$$\bar{\phi}_\sigma(y) \leq \liminf_{k\to\infty} \phi_\sigma(y^k) = \liminf_{k\to\infty} g(x, y^k) = g(x, y).$$

Hieraus folgt

$$\bar{\phi}_\sigma(y) \leq \min_{x \in \widehat{\Psi}_\sigma(y)} g(x, y),$$

d.h. es gilt Gleichheit. □

**Bemerkung:** Die Punkt-Menge-Abbildung $\widehat{\Psi}_\sigma : Y \to 2^{\bar{X}}$ ist oberhalbstetig. Dies kann analog zu Theorem 2.5 bewiesen werden.

**Beispiel 3.3.** *Wir setzen nun die Aufgabe aus Beispiel 3.1 bzw. aus Beispiel 3.2 fort. Dann gilt offensichtlich*

$$\widehat{\Psi}_\sigma(y) = \begin{cases} \{0\} & \textit{für } y < -0.5 \\ \{0, 1\} & \textit{für } y = -0.5 \\ \{1\} & \textit{für } y > -0.5. \end{cases}$$

*Aus Theorem 3.3 folgt somit*

$$\bar{\phi}_\sigma(y) = \begin{cases} -y - 1 & \textit{für } y \in [-1; -0.5] \\ 0 & \textit{für } y \in (-0.5; 1]. \end{cases}$$

*Es gilt folglich $\bar{\phi}_\sigma(y) = \phi_\sigma(y)$ für alle $y \neq -0.5$ und*

$$\bar{\phi}_\sigma(-0.5) = -0.5 < 0 = \phi_\sigma(-0.5).$$

## 3.3 Optimalitätsbedingungen

Da für jede Auswahlfunktion die zugehörige schwache Lösungsfunktion unterhalbstetig ist (Theorem 3.2), besitzt sie ein lokales Minimum über der kompakten Menge $Y$ (siehe z.B. [25]). In Analogie zu den Untersuchungen aus Abschnitt 2.7 wollen wir also Bedingungen aufstellen, mit deren Hilfe man untersuchen kann, ob in einem gegebenen Punkt $y^0 \in Y$ ein solches lokales Minimum vorliegt. Desweiteren werden wir auch wieder Optimalitätsbedingungen für die Lösungsfunktion betrachten.

Sei $\sigma \in \mathfrak{S}$. Dann heißt

| | |
|---|---|
| $\operatorname{locmin}\{\bar{\phi}_\sigma(y) : \ y \in Y\}$ | Menge der schwachen lokalen Lösungen und |
| $\operatorname{locmin}\{\phi_\sigma(y) : \ y \in Y\}$ | Menge der lokalen Lösungen |

bzgl. $\sigma \in \mathfrak{S}$. Als erstes zeigen wir, das der Lösungsbegriff der schwachen lokalen Lösung tatsächlich schwächer ist als der Lösungsbegiff der lokalen Lösung.

**Lemma 3.4.** *Für alle Auswahlfunktionen $\sigma \in \mathfrak{S}$ gilt*

$$\operatorname{locmin}\{\phi_\sigma(y) : \ y \in Y\} \subseteq \operatorname{locmin}\{\bar{\phi}_\sigma(y) : \ y \in Y\}.$$

*Beweis.* Sei $\sigma \in \mathfrak{S}$ und sei $y^0 \in \operatorname{locmin}\{\phi_\sigma(y) : \ y \in Y\}$. Dann existiert ein $\delta > 0$ mit $\phi_\sigma(y^0) \leq \phi_\sigma(y)$ für alle $y \in Y$ mit $\|y - y^0\| < \delta$. Sei $y \in Y$ mit $\|y - y^0\| < \delta$ beliebig. Dann existiert eine Folge $\{y^k\} \subseteq Y$ mit $\lim_{k\to\infty} y^k = y$ und

$$\bar{\phi}_\sigma(y) = \lim_{k\to\infty} \phi_\sigma(y^k).$$

Für hinreichend großes $k$ gilt dann $\|y^k - y^0\| < \delta$ und somit $\phi_\sigma(y^0) \leq \phi_\sigma(y^k)$. Also ist

$$\bar{\phi}_\sigma(y) = \lim_{k\to\infty} \phi_\sigma(y^k) \geq \phi_\sigma(y^0) \geq \bar{\phi}_\sigma(y^0).$$

Da $y$ beliebig gewählt war, folgt hieraus $y^0 \in \operatorname{locmin}\{\bar{\phi}_\sigma(y) : \ y \in Y\}$. □

Jede lokale Lösung ist also auch eine schwache lokale Lösung. Um Optimalitätsbedingungen für die schwache Lösungsfunktion angeben zu können, führen wir zunächst für jedes $\sigma \in \mathfrak{S}$ folgende Menge ein:

$$L_\sigma(x) := \operatorname*{locmin}_y \{g(x, y) : \ y \in \operatorname{cl} S_\sigma(x)\} \tag{3.7}$$

Nun kann das folgende Theorem verwendet werden.

**Theorem 3.5.** *Sei $\sigma \in \mathfrak{S}$. Dann ist $y^0 \in \operatorname{locmin}\{\bar{\phi}_\sigma(y) : \ y \in Y\}$ genau dann, wenn $y^0 \in L_\sigma(x)$ gilt für alle $x \in \widehat{\Psi}_\sigma(y^0)$ mit $\bar{\phi}_\sigma(y^0) = g(x, y^0)$.*

*Beweis.* Angenommen es gilt $y^0 \notin L_\sigma(x)$ für ein $x \in \widehat{\Psi}_\sigma(y^0)$ mit $\bar{\phi}_\sigma(y^0) = g(x, y^0)$. Wegen $x \in \widehat{\Psi}_\sigma(y^0)$ gilt $y^0 \in \operatorname{cl} S_\sigma(x)$. Da $y^0 \notin L_\sigma(x)$ ist, existiert eine Folge $\{y^k\} \subseteq \operatorname{cl} S_\sigma(x)$ mit $\lim_{k\to\infty} y^k = y^0$ und

$$g(x, y^k) < g(x, y^0) \text{ für alle } k.$$

Weiter ist $\bar{\phi}_\sigma(y^k) \leq g(x, y^k)$ für alle $k$, da Theorem 3.3 gilt und $x \in \widehat{\Psi}_\sigma(y^k)$ aus $y^k \in \operatorname{cl} S_\sigma(x)$ folgt. Es gilt somit

$$\bar{\phi}_\sigma(y^k) \leq g(x, y^k) < g(x, y^0) = \bar{\phi}_\sigma(y^0)$$

für alle $k$. Somit ist $y^0 \notin \operatorname{locmin}\{\bar{\phi}_\sigma(y) : y \in Y\}$.

Angenommen es gilt $y^0 \notin \operatorname{locmin}\{\bar{\phi}_\sigma(y) : y \in Y\}$ für $y^0 \in Y$. Dann existiert eine Folge $\{y^k\} \subseteq Y$ mit $\lim_{k\to\infty} y^k = y^0$ und

$$\bar{\phi}_\sigma(y^k) < \bar{\phi}_\sigma(y^0) \text{ für alle } k.$$

Wegen $\operatorname{card}(\bar{X}) < \infty$ existiert o.B.d.A. ein $x \in \bar{X}$ mit $x \in \widehat{\Psi}_\sigma(y^k)$ und $\bar{\phi}_\sigma(y^k) = g(x, y^k)$ für alle $k$ (siehe auch Theorem 3.3). Dann folgt $x \in \widehat{\Psi}_\sigma(y^0)$ wegen der Oberhalbstetigkeit von $\widehat{\Psi}_\sigma(\cdot)$. Somit ist

$$g(x, y^k) = \bar{\phi}_\sigma(y^k) < \bar{\phi}_\sigma(y^0) \leq g(x, y^0). \tag{3.8}$$

Lässt man $k$ gegen Unendlich konvergieren, so erhält man hieraus $\bar{\phi}_\sigma(y^0) = g(x, y^0)$. Da $x \in \widehat{\Psi}_\sigma(y^k)$ die Eigenschaft $y^k \in \operatorname{cl} S_\sigma(x)$ impliziert, ist (3.8) somit gleichbedeutend mit $y^0 \notin L_\sigma(x)$ für ein $x \in \widehat{\Psi}_\sigma(y^0)$ mit $\bar{\phi}_\sigma(y^0) = g(x, y^0)$. □

Wenn die Mengen $\widehat{\Psi}_\sigma(y^0)$ und $L_\sigma(y^0)$ bekannt sind, so können wir also nun prüfen, ob ein gegebener Punkt $y^0 \in Y$ eine schwache lokale Lösung ist bezüglich $\sigma \in \mathfrak{S}$. Als nächstes werden wir untersuchen, unter welchen Bedingungen ein gegebener Punkt auch eine lokale Lösung bezüglich $\sigma \in \mathfrak{S}$ ist.

**Theorem 3.6.** *Sei ein $\sigma \in \mathfrak{S}$ gegeben. Dann ist $y^0 \in \operatorname{locmin}\{\phi_\sigma(y) : y \in Y\}$ genau dann, wenn die folgenden beiden Bedingungen gelten:*

1. $\phi_\sigma(y^0) \leq g(x, y^0)$ *für alle* $x \in \widehat{\Psi}_\sigma(y^0)$,
2. $y^0 \in L_\sigma(x)$ *für alle* $x \in \widehat{\Psi}_\sigma(y^0)$ *mit* $\phi_\sigma(y^0) = g(x, y^0)$.

*Beweis.* Sei $y^0 \in \operatorname{locmin}\{\phi_\sigma(y) : y \in Y\}$. Angenommen Bedingung (1.) gilt nicht, d.h. es existiert ein $x \in \widehat{\Psi}_\sigma(y^0)$ mit $g(x, y^0) < \phi_\sigma(y^0)$. Dann folgt $y^0 \in \operatorname{cl} S_\sigma(x)$ aus $x \in \widehat{\Psi}_\sigma(y^0)$. Somit existiert eine Folge $\{y^k\} \subseteq S_\sigma(x)$ mit $\lim_{k\to\infty} y^k = y^0$. Also gilt $g(x, y^k) = \phi_\sigma(y^k)$ für alle $k$. Bildet man den Grenzwert für $k$ gegen Unendlich, so erhält man nun

$$\limsup_{k\to\infty} \phi_\sigma(y^k) = \lim_{k\to\infty} g(x, y^k) = g(x, y^0) < \phi_\sigma(y^0).$$

Dies ist aber ein Widerspruch zu $y^0 \in \operatorname{locmin}\{\phi_\sigma(y) : \ y \in Y\}$.

Angenommen Bedingung (1.) gilt, aber Bedingung (2.) gilt nicht. Dann existiert ein $x \in \widehat{\Psi}_\sigma(y^0)$ mit $g(x, y^0) = \phi_\sigma(y^0)$ und $y^0 \notin L_\sigma(x)$. Weiter folgt aus (1.)

$$\phi_\sigma(y^0) \leq \inf_{x \in \widehat{\Psi}_\sigma(y^0)} g(x, y^0) = \bar{\phi}_\sigma(y^0),$$

d.h. $\phi_\sigma(y^0) = \bar{\phi}_\sigma(y^0) = g(x, y^0)$ (siehe (3.4)). Mit Theorem 3.5 erhalten wir also $y^0 \notin \operatorname{locmin}\{\bar{\phi}_\sigma(y) : \ y \in Y\}$. Nun folgt $y^0 \notin \operatorname{locmin}\{\phi_\sigma(y) : \ y \in Y\}$ wegen Lemma 3.4.

Ist also $y^0 \in \operatorname{locmin}\{\phi_\sigma(y) : \ y \in Y\}$, so müssen die Bedingungen (a) und (b) gelten.

Angenommen $y^0 \in Y$ ist keine lokale Lösung. Dann existiert eine Folge $\{y^k\} \subseteq Y$ mit $\lim_{k\to\infty} y^k = y^0$ und

$$\phi_\sigma(y^k) < \phi_\sigma(y^0) \quad \text{für alle } k. \tag{3.9}$$

Wegen $\operatorname{card}(\bar{X}) < \infty$ existiert o.B.d.A. ein $x \in \Psi(y^k)$ mit $\phi_\sigma(y^k) = g(x, y^k)$ für alle $k$, d.h. es ist $y^k \in S_\sigma(x)$ für alle $k$. Dies impliziert $y^0 \in \operatorname{cl} S_\sigma(x)$ und somit $x \in \widehat{\Psi}_\sigma(y^0)$. Zusammen mit Ungleichung (3.9) folgt nun

$$g(x, y^k) = \phi_\sigma(y^k) < \phi_\sigma(y^0) \quad \text{für alle } k.$$

Bilden wir den Grenzwert für $k$ gegen Unendlich, so erhalten wir $g(x, y^0) \leq \phi_\sigma(y^0)$. Wenn also Bedingung (a) gilt, so ist $g(x, y^0) = \phi_\sigma(y^0)$. Dann folgt aber

$$g(x, y^k) = \phi_\sigma(y^k) < \phi_\sigma(y^0) = g(x, y^0) \quad \text{für alle } k,$$

d.h. Bedingung (b) gilt nicht. □

Es gilt somit folgende Folgerung:

**Folgerung 3.7.** *Sei $\sigma \in \mathfrak{S}$. Dann ist $y^0 \in \operatorname{locmin}\{\phi_\sigma(y) : \ y \in Y\}$ genau dann, wenn $\phi_\sigma(y^0) = \bar{\phi}_\sigma(y^0)$ und $y^0 \in \operatorname{locmin}\{\bar{\phi}_\sigma(y) : \ y \in Y\}$ gilt.*

*Beweis.* Angenommen $y^0 \in Y$ ist eine lokale Lösung bzgl. $\sigma$. Dann ist $y^0$ auch eine schwache lokale Lösung bzgl. $\sigma$ wegen Lemma 3.4. Außerdem gilt $\phi_\sigma(y^0) \leq g(x, y^0)$ für alle $x \in \widehat{\Psi}_\sigma(y^0)$ (Theorem 3.6). Wenden wir Theorem 3.3 an, so erhalten wir also $\phi_\sigma(y^0) \leq \bar{\phi}_\sigma(y^0)$. Mit (3.4) folgt nun die Gleichheit.

Angenommen es gilt $\phi_\sigma(y^0) = \bar{\phi}_\sigma(y^0)$ und $y^0 \in \operatorname{locmin}\{\bar{\phi}_\sigma(y) : \ y \in Y\}$. Dann ist

$$\bar{\phi}_\sigma(y^0) = \min_{x \in \widehat{\Psi}_\sigma(y^0)} g(x, y^0) = \phi_\sigma(y^0),$$

d.h. wir erhalten $\phi_\sigma(y^0) \leq g(x, y^0)$ für alle $x \in \widehat{\Psi}_\sigma(y^0)$. Also gilt Bedingung (a) aus Theorem 3.6. Weiter folgt $y^0 \in L_\sigma(x)$ für alle $x \in \widehat{\Psi}_\sigma(y^0)$ mit $g(x, y^0) = \bar{\phi}_\sigma(y^0)$ aus Theorem 3.5. Zusammen mit $\phi_\sigma(y^0) = \bar{\phi}_\sigma(y^0)$ ergibt dies Bedingung (b) aus Theorem 3.6. Also ist $y^0$ eine lokale Lösung. □

**Beispiel 3.4.** *Wir führen nun Beispiel 3.3 fort und wollen untersuchen, ob der Punkt* $y^0 = -0.5$ *eine (schwache) lokale Lösung bzgl.* $\sigma$ *ist. Hierfür benötigen wir die Mengen* $L_\sigma(x)$ *für alle* $x \in \widehat{\Psi}_\sigma(y^0) = \{0, 1\}$. *Wegen*

$$\begin{array}{lll} g(0,y) = -y-1 & \textit{und} & \operatorname{cl} S_\sigma(0) = [-1; -0.5] \\ g(1,y) = 0 & \textit{und} & \operatorname{cl} S_\sigma(1) = [-0.5; 1] \end{array}$$

*gilt also*

$$L_\sigma(0) = \{-0.5\} \quad \textit{und} \quad L_\sigma(1) = [-0.5; 1].$$

*Weiter ist*

$$\bar{\phi}_\sigma(y^0) = g(0, y^0) < g(1, y^0) = \phi_\sigma(y^0)$$

*und* $y^0 \in L_\sigma(0)$. *Wegen Theorem 3.5 ist also* $y^0 = -0.5$ *eine schwache lokale Lösung bzgl.* $\sigma$. *Da aber* $\bar{\phi}_\sigma(y^0) \neq \phi_\sigma(y^0)$ *ist, ist* $y^0 = -0.5$ *wegen Folgerung 3.7 keine lokale Lösung bzgl.* $\sigma$.

**Beispiel 3.5.** *Es sei erneut die Aufgabe aus Beispiel 3.1 gegeben. Diesmal betrachten wir jedoch die Auswahlfunktion* $\sigma' : Y \to X$ *mit*

$$\sigma'(y) = \begin{cases} 1 & \textit{für } y > 0 \\ 0 & \textit{für } y \in (-1; 0] \\ -1 & \textit{für } y = -1. \end{cases}$$

*Außerdem sei wiederum* $g(x, y) = (x-1)(y+1)$. *Dann gilt*

$$\phi_{\sigma'}(y) = \bar{\phi}_{\sigma'}(y) = \begin{cases} -y-1 & \textit{für } y \in [-1; 0] \\ 0 & \textit{für } y \in (0; 1] \end{cases}$$

*und*

$$\widehat{\Psi}_{\sigma'}(y) = \begin{cases} \{1\} & \textit{für } y > 0 \\ \{0, 1\} & \textit{für } y = 0 \\ \{0\} & \textit{für } y \in (-1; 0) \\ \{-1, 0\} & \textit{für } y = -1. \end{cases}$$

*Weiter ist*

$$L_{\sigma'}(-1) = \{-1\}, \quad L_{\sigma'}(0) = \{0\} \quad \textit{und} \quad L_{\sigma'}(1) = [0; 1].$$

*Sei* $y^0 = -0.5$. *Dann ist also* $\widehat{\Psi}_{\sigma'}(y^0) = \{0\}$, *aber* $y^0 \notin L_{\sigma'}(0)$. *Aus Theorem 3.5 folgt somit, dass* $y^0 = -0.5$ *keine schwache lokale Lösung ist.*

*Wenn wir dies mit den Ergebnissen aus Beispiel 3.4 vergleichen, erkennen wir, dass es sehr stark von der gewählten Auswahlfunktion abhängt, ob ein gegebener Punkt als (schwache) lokale Lösung bezeichnet wird.*

## 3.4 Berechnung einer schwachen lokalen Lösung

Wie schon beim optimistischen bzw. pessimistischen Lösungszugang in Abschnitt 2.8 können wir auch bei der Verwendung von Auswahlfunktionen $\sigma \in \mathfrak{S}$ einen Algorithmus angeben, mit dessen Hilfe man eine schwache lokale Lösung bestimmen kann.

**Algorithmus 3.1. (Schwache lokale Lösung)**

*Eingabe:* $y^0 \in Y$

0. $k := 0$

1. *Berechne* $\widehat{\Psi}_\sigma(y^k)$, $\bar{\phi}_\sigma(y^k)$ *und* $M(y^k) := \{x \in \widehat{\Psi}_\sigma(y^k) : \bar{\phi}_\sigma(y^k) = g(x, y^k)\}$.

2. *Falls ein Punkt* $x^k \in M(y^k)$ *existiert mit* $y^k \notin L_\sigma(x^k)$, *so wähle ein* $y^{k+1} \in L_\sigma(x^k)$ *und gehe mit* $k := k+1$ *zu Schritt 1.; sonst Stopp.*

*Ausgabe:* $y^k \in \operatorname{locmin}\{\bar{\phi}_\sigma(y) : \; y \in Y\}$

**Theorem 3.8.** *Sei* $\sigma \in \mathfrak{S}$. *Dann berechnet der Algorithmus 3.1 in endlich vielen Iterationen eine schwache lokale Lösung.*

*Beweis.* Wenn der Algorithmus stoppt, so ersieht man leicht aus Theorem 3.5, dass der berechnete Punkt eine schwache lokale Lösung ist. Es ist also nur zu zeigen, dass der Algorithmus tatsächlich nach endlich vielen Iterationen stoppt. Angenommen dies ist nicht der Fall. Dann berechnet der Algorithmus Folgen $\{y^k\} \subseteq Y$ und $\{x^k\} \subseteq \bar{X}$ mit $x^k \in M(y^k)$, $y^k \notin L_\sigma(x^k)$ und $y^{k+1} \in L_\sigma(x^k)$ für alle $k \geq 0$. Aus $y^{k+1} \in L_\sigma(x^k)$ für alle $k$ folgt weiter $x^k \in \widehat{\Psi}_\sigma(y^{k+1})$ und somit $\bar{\phi}_\sigma(y^{k+1}) \leq g(x^k, y^{k+1})$ für alle $k$. Also gilt

$$\bar{\phi}_\sigma(y^k) = g(x^k, y^k) > g(x^k, y^{k+1}) \geq \bar{\phi}_\sigma(y^{k+1}) \text{ für alle } k.$$

Demzufolge ist $\bar{\phi}_\sigma(y^k) > \bar{\phi}_\sigma(y^l)$ für alle Indizes $k < l$. Da $\operatorname{card}(\bar{X}) < \infty$ gilt, existieren zwei Indizes $k, l$ mit $k < l$ und $x^k = x^l$. Dann ist $x^k = x^l \in \widehat{\Psi}_\sigma(y^l)$, d.h. $y^l \in \operatorname{cl} S_\sigma(x^k)$. Zusammen mit $y^{k+1} \in L_\sigma(x^k)$ und $y^l \notin L_\sigma(x^l) = L_\sigma(x^k)$ ergibt dies

$$g(x^k, y^{k+1}) < g(x^k, y^l) = g(x^l, y^l).$$

Dies ist aber ein Widerspruch zu

$$g(x^k, y^{k+1}) \geq \bar{\phi}_\sigma(y^{k+1}) \geq \bar{\phi}_\sigma(y^l) = g(x^l, y^l).$$

Also endet der Algorithmus nach endlich vielen Iterationen. □

## 3.5 Optimistische und pessimistische Auswahlfunktionen

Im folgenden Abschnitt wollen wir den optimistischen und den pessimistischen Lösungszugang nochmals mit Hilfe von speziellen Auswahlfunktionen näher beleuchten. Hierfür führen wir zunächst folgende Begriffe ein:

**Definition 3.4.** *Eine Auswahlfunktion $\sigma_o : Y \to X$ heißt optimistische Auswahlfunktion, wenn für alle $y \in Y$*

$$g(\sigma_o(y), y) = \phi_o(y)$$

*gilt. Die Menge aller optimistischen Auswahlfunktionen bezeichnen wir mit $\mathfrak{S}_o$.*

**Definition 3.5.** *Eine Auswahlfunktion $\sigma_p : Y \to X$ heißt pessimistische Auswahlfunktion, wenn für alle $y \in Y$*

$$g(\sigma_p(y), y) = \phi_p(y)$$

*gilt. Die Menge aller pessimistischen Auswahlfunktionen bezeichnen wir mit $\mathfrak{S}_p$.*

Aus den beiden Definitionen 3.4 und 3.5 folgt dann offensichtlich

$$\phi_\sigma(y) = \phi_o(y) \qquad \text{für alle } y \in Y \text{ und für alle } \sigma \in \mathfrak{S}_o, \tag{3.10}$$
$$\phi_\sigma(y) = \phi_p(y) \qquad \text{für alle } y \in Y \text{ und für alle } \sigma \in \mathfrak{S}_p. \tag{3.11}$$

Die optimistischen und pessimistischen Auswahlfunktionen können auch noch wie folgt charakterisiert werden:

**Theorem 3.9.** *Sei $\sigma \in \mathfrak{S}$ eine Auswahlfunktion. Dann gilt:*

1. *Es ist $\sigma \in \mathfrak{S}_o$ genau dann, wenn $S_\sigma(x) \subseteq O(x)$ für alle $x \in X$ gilt.*
2. *Es ist $\sigma \in \mathfrak{S}_p$ genau dann, wenn $S_\sigma(x) \subseteq P(x)$ für alle $x \in X$ gilt.*

*Beweis.* Wir zeigen die erste Behauptung des Theorems. Der Beweis der zweiten Behauptung ist dann analog.

Seien $\sigma \in \mathfrak{S}_o$ und $x \in X$ beliebig. Sei weiter $y \in S_\sigma(x)$, d.h. $x = \sigma(y)$. Dann folgt $y \in R(x)$ aus Lemma 3.1 und $\phi_o(y) = g(x, y)$, da $\sigma$ eine optimistische Auswahlfunktion ist. Dies impliziert aber $y \in O(x)$ (siehe Definition 2.4). Also gilt $S_\sigma(x) \subseteq O(x)$ für alle $x \in X$.

Sei nun $\sigma \in \mathfrak{S}$ eine Auswahlfunktion und sei $S_\sigma(x) \subseteq O(x)$ für alle $x \in X$. Sei weiter $y \in Y$ beliebig. Da $\sigma$ eine Auswahlfunktion ist, gilt $y \in S_\sigma(x)$ für $x = \sigma(y)$. Somit folgt $y \in O(x)$ aus der Voraussetzung. Dies impliziert nun $g(x, y) = \phi_o(y)$. Also gilt $g(\sigma(y), y) = \phi_o(y)$ für alle $y \in Y$, d.h. $\sigma$ ist eine optimistische Auswahlfunktion. □

Die Mengen $S_\sigma(x)$ sind also für alle $\sigma \in \mathfrak{S}_o$ bzw. $\sigma \in \mathfrak{S}_p$ Teilmengen von $O(x)$ bzw. $P(x)$, wobei keine Gleichheit gelten muss. Allerdings kann noch folgende Eigenschaft gezeigt werden:

**Lemma 3.10.** *Es gilt*

$$O(x) = \bigcup_{\sigma \in \mathfrak{S}_o} S_\sigma(x) \quad \text{und} \quad P(x) = \bigcup_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} S_\sigma(x) \qquad \text{für alle } x \in X.$$

*Beweis.* Wir zeigen wiederum nur die erste Behauptung des Lemmas. Die zweite Behauptung kann analog bewiesen werden.

„ $\supseteq$ “ : Diese Inklusion folgt offensichtlich aus der Eigenschaft $S_\sigma(x) \subseteq O(x)$ für alle $\sigma \in \mathfrak{S}_o$ und alle $x \in X$.

„ $\subseteq$ “ : Seien $x \in X$ und $y^0 \in O(x)$ beliebig. Weiter sei eine beliebige Auswahlfunktion $\sigma \in \mathfrak{S}_o$ gegeben. Wir betrachten nun die Funktion $\bar{\sigma} : Y \to X$ mit

$$\bar{\sigma}(y) = \begin{cases} x & \text{falls } y = y^0 \\ \sigma(y) & \text{falls } y \neq y^0. \end{cases}$$

Dann gilt $\bar{\sigma}(y) = \sigma(y) \in \Psi(y)$ und $g(\bar{\sigma}(y), y) = g(\sigma(y), y) = \phi_o(y)$ für alle $y \neq y^0$ wegen $\sigma \in \mathfrak{S}_o$. Weiter gilt $\bar{\sigma}(y) = x \in \Psi(y)$ und $g(\bar{\sigma}(y), y) = \phi_o(y)$ für $y = y^0$ wegen $y^0 \in O(x)$. Also ist die Funktion $\bar{\sigma} : Y \to X$ eine optimistische Auswahlfunktion mit $y^0 \in S_{\bar{\sigma}}(x)$. Mit

$$y^0 \in \bigcup_{\sigma \in \mathfrak{S}_o} S_\sigma(x).$$

folgt nun die Inklusion. □

**Beispiel 3.6.** *Sei* $f(x, y) = y$, $h(x, y) = y - x$, $g(x, y) = (x - 1)(y + 1)$, $X = \{-1, 0, -1\}$ *und* $Y = [-1; 1]$ *(siehe Beispiel 3.1 und Beispiel 3.2). Sei weiter die Auswahlfunktion* $\sigma : Y \to X$ *mit*

$$\sigma(y) = \begin{cases} 1 & \textit{für } y \geq -1/2 \\ 0 & \textit{für } y < -1/2. \end{cases}$$

*gegeben. Dann gilt*

$$\begin{aligned} S_\sigma(0) = [-1; -0.5) &\quad \not\subseteq \quad P(0) = \{-1\} \textit{ und} \\ S_\sigma(1) = [-0.5; 1] &\quad \not\subseteq \quad O(1) = (0; 1] \cup \{-1\}. \end{aligned}$$

*Also ist* $\sigma$ *weder eine optimistische noch eine pessimistische Auswahlfunktion.*

*Sei die Auswahlfunktion* $\sigma' : Y \to X$ *mit*

$$\sigma'(y) = \begin{cases} 1 & \textit{für } y > 0 \\ 0 & \textit{für } y \in (-1; 0] \\ -1 & \textit{für } y = -1. \end{cases}$$

*gegeben (siehe Beispiel 3.5). Dann gilt*

$$\begin{aligned} S_{\sigma'}(-1) = \{-1\} &\quad = \quad O(-1), \\ S_{\sigma'}(0) = (-1; 0] &\quad \subseteq \quad O(0) = [-1; 0] \textit{ und} \\ S_{\sigma'}(1) = (0; 1] &\quad \subseteq \quad O(1) = (0; 1] \cup \{-1\}. \end{aligned}$$

*Also ist* $\sigma'$ *eine optimistische Auswahlfunktion.*

Wie wir bereits festgestellt haben (siehe (3.10) und (3.11)), gilt

$$\begin{aligned} \phi_\sigma(y) &= \phi_o(y) && \text{für alle } y \in Y \text{ und für alle } \sigma \in \mathfrak{S}_o \text{ und} \\ \phi_\sigma(y) &= \phi_p(y) && \text{für alle } y \in Y \text{ und für alle } \sigma \in \mathfrak{S}_p. \end{aligned}$$

Auf Grund der Definitionen 2.6 und 3.3 folgt somit offensichtlich

$$\bar{\phi}_\sigma(y) = \bar{\phi}_o(y) \qquad \text{für alle } y \in Y \text{ und für alle } \sigma \in \mathfrak{S}_o \text{ und} \tag{3.12}$$

$$\bar{\phi}_\sigma(y) = \bar{\phi}_p(y) \qquad \text{für alle } y \in Y \text{ und für alle } \sigma \in \mathfrak{S}_p. \tag{3.13}$$

Für optimistische Auswahlfunktionen stimmen also die (schwache) Lösungsfunktion und die (schwach) optimistische Lösungsfunktion überein. Analog dazu stimmen für pessimistische Auswahlfunktionen die (schwache) Lösungsfunktion und die (schwach) pessimistische Lösungsfunktion überein. Damit haben sie auch dieselben lokalen Minima. Ist also eine optimistische bzw. eine pessimistische Auswahlfunktion gegeben, so kann mit Hilfe von Theorem 3.5 und Theorem 3.6 überprüft werden, ob ein gegebener Punkt $y^0 \in Y$ eine (schwach) lokal optimistische bzw. (schwach) lokal pessimistische Lösung ist.

Es stellt sich somit die Frage, ob die Theoreme 2.8 und 2.11 eventuell als Folgerungen von Theorem 3.5 und Theorem 3.6 angesehen werden können.

Wir betrachten hierfür folgendes Lemma:

**Lemma 3.11.** *Für alle optimistischen Auswahlfunktionen $\sigma \in \mathfrak{S}_o$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. *Es ist $y^0 \in L_\sigma(x)$ für alle $x \in \widehat{\Psi}_\sigma(y^0)$ mit $\bar{\phi}_\sigma(y^0) = g(x, y^0)$.*
2. *Es ist $y^0 \in L_o(x)$ für alle $x \in \widehat{\Psi}_o(y^0)$ mit $\bar{\phi}_o(y^0) = g(x, y^0)$.*

*Für alle pessimistischen Auswahlfunktionen $\sigma \in \mathfrak{S}_p$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. *Es ist $y^0 \in L_\sigma(x)$ für alle $x \in \widehat{\Psi}_\sigma(y^0)$ mit $\bar{\phi}_\sigma(y^0) = g(x, y^0)$.*
2. *Es ist $y^0 \in L_p(x)$ für alle $x \in \widehat{\Psi}_p(y^0)$ mit $\bar{\phi}_p(y^0) = g(x, y^0)$.*

*Beweis.* Wir zeigen die Behauptung wieder nur für $\sigma \in \mathfrak{S}_o$. Für pessimistische Auswahlfunktionen ist der Beweis analog. Sei also $\sigma \in \mathfrak{S}_o$ und $y^0 \in Y$.

Angenommen die erste Aussage gilt nicht. Dann existiert ein $x \in \widehat{\Psi}_\sigma(y^0)$ mit $g(x, y^0) = \bar{\phi}_\sigma(y^0)$ und $y^0 \notin L_\sigma(x)$. Dann existiert eine Folge $\{y^k\} \subseteq \operatorname{cl} S_\sigma(x)$ mit $\lim_{k\to\infty} y^k = y^0$ und $g(x, y^k) < g(x, y^0)$ für alle $k$. Wegen $\operatorname{cl} S_\sigma(x) \subseteq \operatorname{cl} O(x)$ gilt somit $y^0 \notin L_o(x)$. Weiter folgt $x \in \widehat{\Psi}_o(y^0)$, da $y^k \in \operatorname{cl} O(x)$ für alle $k$ auch $y^0 \in \operatorname{cl} O(x)$ impliziert. Wegen (3.12) gilt somit auch die zweite Aussage nicht.

Angenommen die zweite Aussage gilt nicht. Dann existiert ein $x \in \widehat{\Psi}_o(y^0)$ mit $\bar{\phi}_o(y^0) = g(x, y^0)$ und $y^0 \notin L_o(x)$. Für dieses $x$ gibt es somit eine Folge $\{y^k\} \subseteq$

$\operatorname{cl} O(x)$ mit $\lim_{k\to\infty} y^k = y^0$ und $g(x, y^k) < g(x, y^0)$ für alle $k$. Die Eigenschaft $\{y^k\} \subseteq \operatorname{cl} O(x)$ ist äquivalent zur Eigenschaft $x \in \widehat{\Psi}_o(y^k)$ für alle $k$. Wegen Theorem 2.6 und $g(x, y^0) = \bar{\phi}_o(y^0)$ folgt somit

$$\bar{\phi}_o(y^k) \leq g(x, y^k) < g(x, y^0) = \bar{\phi}_o(y^0) \quad \text{für alle } k.$$

Mit Gleichung (3.12) erhält man also

$$\bar{\phi}_\sigma(y^k) \leq g(x, y^k) < g(x, y^0) = \bar{\phi}_\sigma(y^0) \quad \text{für alle } k.$$

Folglich ist $y^0 \notin \operatorname{locmin}\{\bar{\phi}_\sigma(y) : \ y \in Y\}$. Dann impliziert aber Theorem 3.5, dass die erste Aussage nicht gilt. $\square$

Somit kann man also Theorem 2.8 aus Theorem 3.5 ableiten. Außerdem kann man Theorem 2.11 als Folgerung aus Theorem 3.6 ansehen.

## 3.6 Global optimale Lösungen

Bekanntlich ist jede global optimale Lösung einer Optimierungsaufgabe auch lokal optimal. Somit gilt für alle Auswahlfunktionen $\sigma \in \mathfrak{S}$

$$\operatorname{argmin}\{\phi_\sigma(y) : \ y \in Y\} \subseteq \operatorname{locmin}\{\phi_\sigma(y) : \ y \in Y\}. \tag{3.14}$$

Aus der Existenz einer lokal optimalen Lösung muss jedoch nicht die Existenz einer global optimalen Lösung folgen. Für Existenzbetrachtungen und Optimalitätsbedingungen von global optimalen Lösungen spielen die schwach lokalen Lösungen eine wichtige Rolle. Es gilt das folgende Theorem.

**Theorem 3.12.** *Sei $\sigma \in \mathfrak{S}$. Dann ist $y^0 \in \operatorname{argmin}\{\phi_\sigma(y) : \ y \in Y\}$ genau dann, wenn $y^0 \in \operatorname{locmin}\{\phi_\sigma(y) : \ y \in Y\}$ und*

$$\bar{\phi}_\sigma(y^0) \leq \bar{\phi}_\sigma(\bar{y}) \quad \textit{für alle } \bar{y} \in \operatorname{locmin}\{\bar{\phi}_\sigma(y) : \ y \in Y\}$$

*gilt.*

*Beweis.* „ $\Rightarrow$: “ Sei ein $y^0 \in \operatorname{argmin}\{\phi_\sigma(y) : \ y \in Y\}$ gegeben. Dann gilt $y^0 \in \operatorname{locmin}\{\phi_\sigma(y) : \ y \in Y\}$ (siehe (3.14)). Somit ist auch $\phi_\sigma(y^0) = \bar{\phi}_\sigma(y^0)$ wegen Folgerung 3.7. Da $y^0$ global optimale Lösung ist, gilt weiter $\phi_\sigma(y^0) \leq \phi_\sigma(y)$ für alle $y \in Y$. Mit $\phi_\sigma(y^0) = \bar{\phi}_\sigma(y^0)$ und Definition 3.3 folgt nun

$$\bar{\phi}_\sigma(y^0) \leq \liminf_{y\to\bar{y},y\in Y} \phi_\sigma(y) = \bar{\phi}_\sigma(\bar{y}) \quad \text{für alle } \bar{y} \in \operatorname{locmin}\{\bar{\phi}_\sigma(y) : \ y \in Y\}.$$

„ $\Leftarrow$: “ Sei ein Element $y^0 \in \operatorname{locmin}\{\phi_\sigma(y) : \ y \in Y\}$ gegeben mit $\bar{\phi}_\sigma(y^0) \leq \bar{\phi}_\sigma(\bar{y})$ für alle $\bar{y} \in \operatorname{locmin}\{\bar{\phi}_\sigma(y) : \ y \in Y\}$. Wegen Folgerung 3.7 gilt dann $\bar{\phi}_\sigma(y^0) = \phi_\sigma(y^0)$. Angenommen $y^0$ ist keine global optimale Lösung. Dann exisiert ein

$\tilde{y} \in Y$ mit $\phi_\sigma(\tilde{y}) < \phi_\sigma(y^0) = \bar{\phi}_\sigma(y^0)$. Auf Grund der Voraussetzung ist also $\tilde{y}$ keine schwache lokale Lösung. Dann kann aber ausgehend vom Punkt $\tilde{y}$ mit Algorithmus 3.1 eine schwache lokale Lösung $\bar{y} \in Y$ berechnet werden mit

$$\phi_\sigma(\bar{y}) \leq \phi_\sigma(\tilde{y}) < \phi_\sigma(y^0) = \bar{\phi}_\sigma(y^0).$$

Dies ist wiederum ein Widerspruch zur Voraussetzung. □

Eine weitere wichtige Rolle spielen die Optimalwerte der Lösungsfunktionen. Diese bezeichnen wir für $\sigma \in \mathfrak{S}$ mit

$$\phi_\sigma^* := \inf_y \{\phi_\sigma(y) : \ y \in Y\} \quad \text{und} \quad \bar{\phi}_\sigma^* := \inf_y \{\bar{\phi}_\sigma(y) : \ y \in Y\}. \tag{3.15}$$

Da die Funktion $\bar{\phi}_\sigma : Y \to \mathbb{R}$ unterhalbstetig ist (siehe Theorem 3.2) und die Menge $Y$ nichtleer und kompakt, existiert stets ein Punkt $y^0 \in Y$ mit $\bar{\phi}_\sigma(y^0) = \bar{\phi}_\sigma^*$, d.h. das Infimum wird in mindestens einem Punkt angenommen. Wir können für die Funktion $\bar{\phi}_\sigma : Y \to \mathbb{R}$ in (3.15) „ min “ statt „ inf “ schreiben. Für die Funktion $\phi_\sigma : Y \to \mathbb{R}$ ist dies nicht möglich, da der Wert $\phi_\sigma^*$ nicht immer in einem Punkt $y^0 \in Y$ angenommen wird. Es existiert also nicht immer eine global optimale Lösung.

Verwenden wir die Optimalwerte der Lösungsfunktionen, so erhalten wir die folgende Folgerung aus Theorem 3.12.

**Folgerung 3.13.** *Sei $\sigma \in \mathfrak{S}$. Dann ist $y^0 \in \operatorname{argmin}\{\phi_\sigma(y) : \ y \in Y\}$ genau dann, wenn $\bar{\phi}_\sigma(y^0) = \bar{\phi}_\sigma^*$ und $\bar{\phi}_\sigma(y^0) = \phi_\sigma(y^0)$ gilt.*

*Beweis.* Laut Theorem 3.12 ist $y^0 \in \operatorname{argmin}\{\phi_\sigma(y) : \ y \in Y\}$ genau dann, wenn $y^0 \in \operatorname{locmin}\{\phi_\sigma(y) : \ y \in Y\}$ und

$$\bar{\phi}_\sigma(y^0) \leq \bar{\phi}_\sigma(\bar{y}) \quad \text{für alle } \bar{y} \in \operatorname{locmin}\{\bar{\phi}_\sigma(y) : \ y \in Y\}$$

gilt. Wegen Folgerung 3.7 ist dabei $y^0 \in \operatorname{locmin}\{\phi_\sigma(y) : \ y \in Y\}$ genau dann, wenn $y^0 \in \operatorname{locmin}\{\bar{\phi}_\sigma(y) : \ y \in Y\}$ und $\bar{\phi}_\sigma(y^0) = \phi_\sigma(y^0)$ gilt. Also ist $y^0 \in \operatorname{argmin}_y\{\phi_\sigma(y) : \ y \in Y\}$ genau dann, wenn $\bar{\phi}_\sigma(y^0) = \phi_\sigma(y^0)$ gilt und $y^0$ diejenige schwach lokale Lösung mit dem kleinsten Optimalwert ist. Da die Funktion $\bar{\phi}_\sigma : Y \to \mathbb{R}$ eine global optimale Lösung über der Menge $Y$ besitzt und diese lokal optimal ist, entspricht dies den Bedingungen $\bar{\phi}_\sigma(y^0) = \bar{\phi}_\sigma^*$ und $\bar{\phi}_\sigma(y^0) = \phi_\sigma(y^0)$. □

Desweiteren können wir eine Aussage über die Relation der Werte $\phi_\sigma^*$ und $\bar{\phi}_\sigma^*$ zueinander treffen.

**Lemma 3.14.** *Für alle $\sigma \in \mathfrak{S}$ gilt $\phi_\sigma^* = \bar{\phi}_\sigma^*$.*

*Beweis.* Die Relation $\phi_\sigma^* \geq \bar{\phi}_\sigma^*$ gilt wegen $\phi_\sigma(y) \geq \bar{\phi}_\sigma(y)$ für alle $y \in Y$ (siehe Theorem 3.2).

Da die Funktion $\bar{\phi}_\sigma : Y \to \mathbb{R}$ unterhalbstetig ist und die Menge $Y$ nichtleer und kompakt, existiert ein $y^0 \in Y$ mit $\bar{\phi}_\sigma(y^0) = \bar{\phi}_\sigma^*$. Wegen Definition 3.3 existiert somit eine Folge $\{y^k\} \subseteq Y$ mit $\lim_{k\to\infty} y^k = y^0$ und $\bar{\phi}_\sigma(y^0) = \lim_{k\to\infty} \phi_\sigma(y^k)$. Somit gilt

$$\bar{\phi}_\sigma^* = \bar{\phi}_\sigma(y^0) = \lim_{k\to\infty} \phi_\sigma(y^k) \geq \inf_{y\in Y} \phi_\sigma(y) = \phi_\sigma^*.$$

Also ist $\phi_\sigma^* = \bar{\phi}_\sigma^*$. □

Es ist möglich, dass die Funktion $\phi_\sigma : Y \to \mathbb{R}$ keine global optimale Lösung über der Menge $Y$ besitzt. Ist dies der Fall, so ist man an einer Lösung interessiert, welche zumindest „fast“ global optimal ist. Aus diesem Grund führen wir den Begriff einer $\varepsilon-$optimalen Lösung ein.

**Definition 3.6.** *Sei $\sigma \in \mathfrak{S}$ und $\varepsilon > 0$. Ein Punkt $y^0 \in Y$ heißt $\varepsilon-$optimale Lösung, wenn $\phi_\sigma(y^0) < \phi_\sigma^* + \varepsilon$ gilt.*

Es gilt nun das folgende Theorem.

**Theorem 3.15.** *Sei $\sigma \in \mathfrak{S}$ und sei $\varepsilon > 0$. Weiter sei ein Punkt $y^0 \in Y$ gegeben mit $\bar{\phi}_\sigma(y^0) = \bar{\phi}_\sigma^*$ und ein Punkt $x^0 \in \widehat{\Psi}_\sigma(y^0)$ mit $\bar{\phi}_\sigma(y^0) = g(x^0, y^0)$. Dann ist jeder Punkt $y \in S_\sigma(x^0)$ mit $g(x^0, y) < g(x^0, y^0) + \varepsilon$ eine $\varepsilon-$optimale Lösung.*

*Beweis.* Sei $y \in S_\sigma(x^0)$ mit $g(x^0, y) < g(x^0, y^0) + \varepsilon$. Dann gilt

$$\phi_\sigma(y) = g(x^0, y) < g(x^0, y^0) + \varepsilon = \bar{\phi}_\sigma(y^0) + \varepsilon = \bar{\phi}_\sigma(y^0) + \varepsilon$$

wegen der Definition von $S_\sigma(x^0)$, den Voraussetzungen des Theorems und Lemma 3.14. Somit ist $y$ eine $\varepsilon-$optimale Lösung. □

Mit Hilfe dieses Theorem kann man somit $\varepsilon-$optimale Lösungen suchen. Dabei ist zu bemerken, dass für jedes $\varepsilon > 0$ eine derartige Lösung existiert, da $y^0 \in \operatorname{cl} S_\sigma(x^0)$ ist und die Funktion $g(x, y)$ als stetig bezüglich $y$ vorausgesetzt wurde.

# Kapitel 4

# Diskrete konvexe Probleme in der unteren Ebene

## 4.1 Aufgabenstellung

Gegeben sei das Zwei-Ebenen–Problem

$$\begin{cases} \text{„}\min_y\text{“}\{g(x,y) = {d^1}^\top x + {d^2}^\top y : \; y \in Y, \; x \in \Psi(y)\} \\ \text{mit} \\ \Psi(y) = \operatorname*{argmin}_x \{f(x,y) = F(x) - y^\top x : \; x \in X\}. \end{cases} \tag{4.1}$$

Dabei sei $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Polytop mit nichtleerem Inneren, $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine streng konvexe, stetig differenzierbare Funktion, $d^1, d^2 \in \mathbb{R}^n$ und $X = \{x^1, x^2, \ldots, x^N\} \subseteq \mathbb{R}^n$ eine gegebene diskrete Menge mit $1 \leq N < \infty$ voneinander verschiedenen Elementen. Weiter fordern wir, dass

$$\nabla F(x^i) \in \operatorname{int} Y \qquad \text{gilt für alle } i = 1, \ldots, N. \tag{4.2}$$

Diese Forderung benötigen wir insbesondere für die Betrachtung von (schwach) pessimistischen Lösungen.

Eine etwas allgemeinere Aufgabenstellung wird in [12] betrachten. In dieser Arbeit ist $Y$ konvex, abgeschlossen, mit nichtleerem Inneren und $g(x, y)$ ist stetig differenzierbar bzgl. $y$. Für diese allgemeinere Aufgabenstellung werden in [12] Optimalitätsbedingungen mittels radialer Richtungsableitung und radialem Subdifferential [6, 10, 23] betrachtet. In diesem Kapitel werden wir jedoch die Aufgabenstellung (4.1) untersuchen und mittels der Betrachtungen aus Kapitel 2 Optimalitätsbedingungen und Lösungsverfahren diskutieren.

Für unsere Betrachtungen verwenden wir die strenge Konvexität der Funktion $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Aus diesem Grund soll zunächst an Definition und Eigenschaften von streng konvexen Funktionen erinnert werden.

**Definition 4.1.** *[4, 13] Sei eine konvexe Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ gegeben. Dann heißt eine Funktion $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ streng konvex auf $M$, wenn*

$$F(\lambda x + (1-\lambda)x') < \lambda F(x) + (1-\lambda)F(x')$$

*ist für alle $\lambda \in (0;1)$ und alle Punkte $x, x' \in M$ mit $x \neq x'$.*

Weiter gilt das folgende Lemma.

**Lemma 4.1.** *[4, 13] Sei eine konvexe Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ gegeben. Dann ist die Funktion $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ genau dann streng konvex auf $M$, wenn*

$$F(x) > F(x') + \nabla F(x')^\top (x - x')$$

*gilt für alle Punkte $x, x' \in M$ mit $x \neq x'$.*

Es sollen nun Lösungsverfahren für das Zwei-Ebenen–Problem (4.1) entwickelt werden. Dies soll mit Hilfe der Betrachtungen aus Kapitel 2 geschehen. Dies ist möglich, da die Forderungen (F1) und (F2) aus Kapitel 2 offensichtlich erfüllt sind. Aus diesem Grund betrachten wir zunächst die Stabilitätsbereiche und deren Eigenschaften.

## 4.2 Stabilitätsbereiche

In diesem Abschnitt wollen wir die Stabilitätsbereiche von allen Punkten $x^i \in X$ untersuchen. Diese sind definiert durch

$$R(x^i) := \{x^i \in \Psi(y)\} \tag{4.3}$$

für alle $i = 1, \ldots, N$ (siehe Definition 2.1). Es gilt nun offensichtlich für alle Indizes $i = 1, \ldots, N$

$$\begin{aligned} R(x^i) &= \{y \in Y : \quad f(x^i, y) \leq f(x^j, y) \quad \text{für alle } j \neq i\} \\ &= \{y \in Y : F(x^i) - y^\top x^i \leq F(x^j) - y^\top x^j \quad \text{für alle } j \neq i\} \\ &= \{y \in Y : \quad (x^j - x^i)^\top y \leq F(x^j) - F(x^i) \quad \text{für alle } j \neq i\}. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Die Stabilitätsbereiche entsprechen demzufolge dem Durchschnitt vom Polytop $Y$ mit endlich vielen Halbräumen. Somit sind sie ebenfalls Polytope und folglich auch konvex, abgeschlossen und beschränkt. Demzufolge gilt

$$\operatorname{cl} R(x^i) = R(x^i) \qquad \text{für alle Indizes } i = 1, \ldots, N. \tag{4.5}$$

Als nächstes untersuchen wir das Innere der Stabilitätsbereiche. Es gilt das folgende Theorem.

**Theorem 4.2.** *1. Es ist $\nabla F(x^i) \in \operatorname{int} R(x^i)$ für alle Indizes $i = 1, \ldots, N$.*

2. *Es gilt* $(x^j - x^i)^\top y = F(x^j) - F(x^i)$ *für alle Indizes* $i \neq j$ *und alle Punkte* $y \in R(x^i) \cap R(x^j)$.

3. *Es ist* $\operatorname{int} R(x^i) \cap R(x^j) = \emptyset$ *für alle Indizes* $i \neq j$.

*Beweis.* 1.) Sei ein Index $i \in \{1, \dots, N\}$ gegeben und sei

$$\alpha_0 := \min_{j \neq i} \frac{F(x^j) - F(x^i) - \nabla F(x^i)^\top (x^j - x^i)}{\|x^j - x^i\|}.$$

Diese reelle Zahl ist wohldefiniert wegen der Voraussetzung $x^i \neq x^j$ für alle $j \neq i$. Weiter gilt $\alpha_0 > 0$ wegen der strengen Konvexität von $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und Lemma 4.1. Wir erhalten nun für alle reellen Zahlen $\alpha \in [0; \alpha_0)$ und alle Vektoren $h \in \mathbb{R}^n$ mit $\|h\| = 1$

$$\begin{aligned}
(x^j - x^i)^\top (\nabla F(x^i) + \alpha h) &= \nabla F(x^i)^\top (x^j - x^i) + \alpha h^\top (x^j - x^i) \\
&\leq \nabla F(x^i)^\top (x^j - x^i) + \alpha_0 \|x^j - x^i\| \\
&\leq F(x^j) - F(x^i).
\end{aligned}$$

Außerdem gilt $\nabla F(x^i) + \alpha h \in Y$ für alle hinreichend kleine reelle Zahlen $\alpha > 0$ wegen der Voraussetzung $\nabla F(x^i) \in \operatorname{int} Y$. Da $\alpha > 0$ und $h \in \mathbb{R}^n$ mit $\|h\| = 1$ beliebig gewählt wurden, gilt somit $\nabla F(x^i) \in \operatorname{int} R(x^i)$ (siehe Formel (4.4)).

2.) Seien Indizes $i \neq j$ und ein beliebiger Punkt $y \in R(x^i) \cap R(x^j)$ gegeben. Dann gilt wegen Formel (4.4)

$$\begin{aligned}
& (x^j - x^i)^\top y \leq F(x^j) - F(x^i) \qquad \text{wegen } y \in R(x^i) \\
\text{und } \; & (x^i - x^j)^\top y \leq F(x^i) - F(x^j) \qquad \text{wegen } y \in R(x^j).
\end{aligned}$$

Hieraus folgt nun die Behauptung $(x^j - x^i)^\top y = F(x^j) - F(x^i)$.

3.) Seien beliebige Indizes $i \neq j$ gegeben. Angenommen es existiert ein Punkt $y^0 \in \operatorname{int} R(x^i) \cap R(x^j)$. Dann erhalten wir für alle Punkte

$$y^\lambda := (1 - \lambda) y^0 + \lambda \nabla F(x^j)$$

und alle reellen Zahlen $\lambda \in (0; 1)$

$$(x^j - x^i)^\top y^\lambda = (1 - \lambda) \underbrace{(x^j - x^i)^\top y^0}_{= F(x^j) - F(x^i)} + \lambda \underbrace{(x^j - x^i)^\top \nabla F(x^j)}_{> F(x^j) - F(x^i)} > F(x^j) - F(x^i)$$

wegen $y^0 \in R(x^i) \cap R(x^j)$ und Lemma 4.1. Somit gilt $y^\lambda \notin R(x^i)$ für alle $\lambda \in (0; 1)$. Dies ist aber ein Widerspruch zur Annahme $y^0 \in \operatorname{int} R(x^i)$. $\square$

**Bemerkung:**

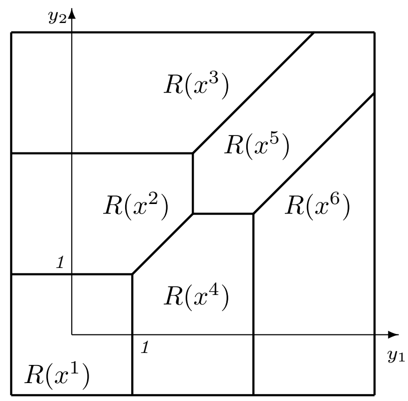
1. Gilt $n = 2$ und $F(x) = \frac{1}{2}\|x\|^2$, so ist
$$f(x, y) = \frac{1}{2}\|x\|^2 - y^\top x = \frac{1}{2}\|x - y\|^2 - \frac{1}{2}\|y\|^2.$$
Somit folgt, dass in diesem Fall die Stabilitätsbereiche dem Durchschnitt von der Menge $Y$ mit sogenannten Voronoi-Gebieten entsprechen (siehe z.B. [20]).

2. Da für alle Indizes $i = 1, \dots, N$ die Mengen $R(x^i)$ konvex und abgeschlossen sind und da das Innere wegen $\nabla F(x^i) \in \operatorname{int} R(x^i)$ (Theorem 4.2) nichtleer ist, gilt ([4, 13])
$$\operatorname{cl}\operatorname{int} R(x^i) = R(x^i) \qquad \text{für alle } i = 1, \dots, N. \tag{4.6}$$

3. Es ist anzumerken, dass bei strenger Konvexität der Funktion $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die Mengen
$$V(x^i) := \{y \in \mathbb{R}^n : \ f(x^i, y) \leq f(x^j, y) \quad \text{für alle } j \neq i\} \supseteq R(x^i)$$
mit $i = 1, \dots, N$ verallgemeinerte Voronoi-Gebiete sind ([20],[31]) und viele Eigenschaften von Voronoi-Gebieten auf diese Mengen übertragen werden können.

**Beispiel 4.1.** *Seien $n = 2$, $F(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2$, $Y = [-1; 5] \times [-1; 5]$ und $X = \{x^1, x^2, \dots, x^6\}$ mit*
$$x^1 = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\ x^2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\ x^3 = \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix},\ x^4 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\ x^5 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\ \textit{und}\ x^6 = \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}.$$

*Die Forderung $\nabla F(x^i) \in \operatorname{int} Y$ ist für alle $i = 1, \dots, 6$ erfüllt. In der nebenstehenden Abbildung sind die Stabilitätsbereiche für alle Punkte $x^i$ mit $i = 1, \dots, 6$ dargestellt.*




## 4.3 Lösungsmengen

In diesem Abschnitt wollen wir einige Eigenschaften der Lösungsmengen angeben. Die Ergebnisse werden sich dabei insbesondere aus den Eigenschaften der Stabilitätsbereiche ergeben.

Da $\nabla F(x^i) \in \operatorname{int} R(x^i)$ ist (Theorem 4.2), gilt $x^i \in \Psi(\nabla F(x^i))$ für alle Indizes $i = 1, \ldots, N$. Demzufolge erhalten wir

$$X = \bar{X} := \{x \in X : \exists y \in Y \text{ mit } x \in \Psi(y)\} \tag{4.7}$$

(siehe auch (2.5)). Wir vergleichen nun die Lösungsmengen und die erweiterten Lösungsmengen. Die erweiterten Lösungsmengen waren definiert durch

$$\bar{\Psi}(y) := \{x \in X : y \in \operatorname{cl} R(x)\}$$

(siehe Definition 2.3). Da $R(x) = \operatorname{cl} R(x)$ ist für alle $x \in X$ (siehe (4.5)), gilt

$$\bar{\Psi}(y) = \Psi(y) \qquad \text{für alle } y \in Y. \tag{4.8}$$

Somit stimmen die Lösungsmengen und die erweiterten Lösungsmengen überein. Demzufolge ist die Lösungsmengenabbildung $\Psi : Y \to 2^X$ eine oberhalbstetige Punkt-Menge-Abbildung. Weiter erhalten wir das folgende Lemma.

**Lemma 4.3.** *Es ist* $\Psi(y) = \{x^i\}$ *für alle* $y \in \operatorname{int} R(x^i)$ *und alle* $i = 1, \ldots, N$.

*Beweis.* „ $\supseteq$ “: Sei $y \in \operatorname{int} R(x^i)$. Dann gilt auch $y \in R(x^i)$ und somit $x^i \in \Psi(y)$. Demzufolge gilt $\Psi(y) \supseteq \{x^i\}$.

„ $\subseteq$ “: Sei $y \in \operatorname{int} R(x^i)$. Angenommen es existiert ein $j \neq i$ mit $x^j \in \Psi(y)$. Dann gilt $y \in R(x^j)$ und somit $y \in \operatorname{int} R(x^i) \cap R(x^j)$. Dies ist aber ein Widerspruch zu Theorem 4.2. Demzufolge ist also $\Psi(y) = \{x^i\}$. □

## 4.4 Lösungsfunktionen

Wir betrachten nun die optimistische Lösungsfunktion

$$\phi_o(y) := \min_{x \in \Psi(y)} g(x, y) = \min_{x \in \Psi(y)} {d^1}^\top x + {d^2}^\top y \tag{4.9}$$

und die pessimistische Lösungsfunktion

$$\phi_p(y) := \max_{x \in \Psi(y)} g(x, y) = \max_{x \in \Psi(y)} {d^1}^\top x + {d^2}^\top y. \tag{4.10}$$

Dann gilt für die Mengen

$$\begin{aligned} O(x) &:= \{y \in R(x) : \phi_o(y) = g(x, y)\} \text{ und} \\ P(x) &:= \{y \in R(x) : \phi_p(y) = g(x, y)\} \end{aligned}$$

(siehe Definition 2.4) das folgende Theorem.

**Theorem 4.4.** *Es ist* $\operatorname{cl} O(x^i) = \operatorname{cl} P(x^i) = R(x^i)$ *für alle* $i = 1, \ldots, N$.

*Beweis.* Es ist offensichtlich $O(x^i) \subseteq R(x^i)$ bzw. $P(x^i) \subseteq R(x^i)$ und somit $\operatorname{cl} O(x^i) \subseteq R(x^i)$ bzw. $\operatorname{cl} P(x^i) \subseteq R(x^i)$ für alle Indizes $i = 1, \ldots, N$.

Seien nun $i \in \{1, \ldots, N\}$ und $y \in R(x^i)$ beliebig. Dann existiert wegen $R(x^i) = \operatorname{cl} \operatorname{int} R(x^i)$ (siehe (4.6)) eine Folge $\{y^k\} \subseteq \operatorname{int} R(x^i)$ mit $\lim_{k\to\infty} y^k = y$. Wegen $\{y^k\} \subseteq \operatorname{int} R(x^i)$ gilt dann $\Psi(y^k) = \{x^i\}$ für alle $k$ (Lemma 4.3). Demzufolge ist

$$\phi_o(y^k) = \phi_p(y^k) = g(x^i, y^k)$$

und somit $\{y^k\} \subseteq O(x^i)$ bzw. $\{y^k\} \subseteq P(x^i)$. Hieraus folgt $y \in \operatorname{cl} O(x^i)$ und $y \in \operatorname{cl} P(x^i)$. Wir erhalten also

$$R(x^i) \subseteq \operatorname{cl} O(x^i) \quad \text{und} \quad R(x^i) \subseteq \operatorname{cl} P(x^i).$$

Somit gelten die Aussagen des Theorems. $\square$

Auf Grund von Theorem 4.4 gilt nun offensichtlich

$$\widehat{\Psi}_o(y) := \{x \in X : y \in \operatorname{cl} O(x)\} = \{x \in X : y \in R(x)\} = \Psi(y), \tag{4.11}$$
$$\widehat{\Psi}_p(y) := \{x \in X : y \in \operatorname{cl} P(x)\} = \{x \in X : y \in R(x)\} = \Psi(y) \tag{4.12}$$

für alle $y \in Y$ (siehe (2.18), (2.19)). Mit Theorem 2.6 erhalten wir demzufolge

$$\phi_o(y) = \bar{\phi}_o(y) = \bar{\phi}_p(y) \quad \text{für alle } y \in Y. \tag{4.13}$$

Somit ist die Funktion $\phi_o : Y \to \mathbb{R}$ unterhalbstetig. Außerdem können alle Aussagen für die schwache optimistische Lösungsfunktion auf die Funktionen $\phi_o : Y \to \mathbb{R}$ übertragen werden. Dies werden wir für die Betrachtung von Optimalitätsbedingungen nutzen.

## 4.5 Optimalitätsbedingungen

Wegen (4.13) und Lemma 2.7 gilt offensichtlich

$$\operatorname{locmin}\{\phi_p(y) : y \in Y\} \subseteq \operatorname{locmin}\{\phi_o(y) : y \in Y\}, \tag{4.14}$$

d.h. jede lokal pessimistische Lösung ist auch eine lokal optimistische Lösung.

Um die Optimalitätsbedingungen spezifizieren zu können, werden wir nun die Mengen

$$L(x^i) := \operatorname{locmin}\{g(x^i, y) : y \in R(x^i)\} \tag{4.15}$$

untersuchen für alle $i = 1, \ldots, N$. Diese Mengen sind für uns interessant, da wegen Theorem 4.4

$$L(x^i) = L_o(x^i) = L_p(x^i) \tag{4.16}$$

gilt für alle $i = 1, \ldots, N$ (siehe auch (2.21), (2.22)).

Da $g(x,y) = {d^1}^\top x + {d^2}^\top y$ gilt und da die Mengen $R(x)$ konvex sind, erhalten wir

$$\begin{aligned} L(x^i) &= \operatorname{locmin}\{{d^2}^\top y : \ y \in R(x^i)\} \\ &= \operatorname{argmin}\{{d^2}^\top y : \ y \in R(x^i)\}. \end{aligned} \tag{4.17}$$

für alle Indizes $i = 1, \ldots, N$. Da die Mengen $R(x^i)$ polyedral sind, entsprechen die Mengen $L(x^i)$, $i = 1, \ldots, N$, also den Lösungsmengen von linearen Optimierungsaufgaben. Außerdem gilt $L(x^i) \neq \emptyset$ für alle $i = 1, \ldots, N$, da die Mengen $R(x^i)$ nichtleer und kompakt sind.

Weiter gilt wegen (4.13)

$$\operatorname{locmin}\{\phi_o(y) : \ y \in Y\} = \operatorname{locmin}\{\bar{\phi}_o(y) : \ y \in Y\} = \operatorname{locmin}\{\bar{\phi}_p(y) : \ y \in Y\}.$$

Aus diesem Grund untersuchen wir im folgenden nur die lokal optimistischen bzw. pessimistischen Lösungen.

Für lokal optimistische Lösungen erhalten wir aus (4.9), (4.11), (4.13), (4.16) und Theorem 2.8 das folgende Theorem.

**Theorem 4.5.** *Für alle $y^0 \in Y$ gilt $y^0 \in \operatorname{locmin}\{\phi_o(y) : \ y \in Y\}$ genau dann, wenn $y^0 \in L(x^0)$ ist für alle $x^0 \in \Psi(y^0)$ mit*

$${d^1}^\top x^0 = \min_{x \in \Psi(y^0)} {d^1}^\top x.$$

*Beweis.* Das Theorem folgt direkt aus aus (4.9), (4.11), (4.13), (4.16) und Theorem 2.8. □

Für lokal pessimistische Lösungen erhalten wir aus Theorem 2.11 das folgende Theorem.

**Theorem 4.6.** *Für alle $y^0 \in Y$ gilt $y^0 \in \operatorname{locmin}\{\phi_p(y) : \ y \in Y\}$ genau dann, wenn $y^0 \in L(x)$ und $\phi_p(y^0) = g(x, y^0)$ gelten für alle $x \in \Psi(y^0)$.*

*Beweis.* Laut Theorem 2.11 gilt $y^0 \in \operatorname{locmin}\{\phi_p(y) : \ y \in Y\}$ genau dann, wenn

1. $\phi_p(y^0) \leq g(x, y^0)$ ist für alle $x \in \Psi(y^0)$ und
2. $y^0 \in L(x)$ für alle $x \in \Psi(y)$ mit $g(x, y^0) = \phi_p(y^0)$.

Dies gilt wegen $\Psi(y) = \widehat{\Psi}_p(y)$ für alle $y \in Y$ (siehe (4.12)). Wegen (4.10) entspricht die Bedingung 1.) der Bedingung

$$\phi_p(y^0) = g(x, y^0) \text{ für alle } x \in \Psi(y^0).$$

Hieraus folgt nun die Behauptung des Theorems. □

## 4.6 Lösungsverfahren

In diesem Abschnitt wollen wir uns mit der Berechnung von lokal und global optimalen Lösungen beschäftigen. Wir beginnen unsere Betrachtungen mit der Diskussion über die Existenz von lokal optimistischen bzw. pessimistischen Lösungen.

Da wegen (4.13) die optimistische Lösungsfunktion unterhalbstetig ist, existiert stets eine global optimistische Lösung. Für die pessimistische Lösungsfunktion gilt diese Aussage nicht. Die Existenz einer lokal pessimistischen Lösung ist nicht gesichert.

**Beispiel 4.2.** *Seien* $n = N = 2$, $F(x) = \frac{1}{2}\|x\|^2$, $Y = [0;4] \times [0;4]$, $d^1 = (1,1)^\top$, $d^2 = (1,0)^\top$ *und* $X = \{x^1 = (1,3)^\top, x^2 = (3,1)^\top\}$. *Für diese Aufgabe erhalten wir die Stabilitätsbereiche*

$$R(x^1) = \{y \in Y :\ y_1 \leq y_2\} \quad \text{und} \quad R(x^2) = \{y \in Y :\ y_1 \geq y_2\}.$$

*Demzufolge gilt* $L(x^1) = L(x^2) = \{(4,4)^\top\}$. *Somit ist* $y^0 = (4,4)^\top$ *die einzige lokal optimistische Lösung (siehe Theorem 4.5). Da aber* $g(x^1, y^0) < g(x^2, y^0)$ *gilt, ist* $y^0$ *keine lokal pessimistische Lösung (siehe Theorem 4.6). Wegen (4.14) existiert also keine lokal pessimistische Lösung und somit auch keine global pessimistische Lösung.*

Wir konzentrieren uns also zunächst auf die Berechnung von lokal optimistischen Lösungen. Ein Verfahren zur Berechnung von lokal optimistischen Lösungen beruht auf dem Algorithmus 2.1. Dieser kann verwendet werden, da die optimistische und die schwache optimistische Lösungsfunktion übereinstimmen (siehe (4.13)).

**Algorithmus 4.1.** *Eingabe:* $y^0 \in Y$

*0.* $k := 0$

*1. Berechne* $\Psi(y^k)$, $\phi_o(y^k)$ *und* $M(y^k) := \{x \in \Psi(y^k) :\ \phi_o(y^k) = g(x, y^k)\}$.

*2. Falls ein* $x^k \in M(y^k)$ *existiert mit* $y^k \notin L(x^k)$, *so wähle ein* $y^{k+1} \in L(x^k)$ *und gehe mit* $k := k+1$ *zu Schritt 1.; sonst Stopp.*

*Ausgabe:* $y^k \in \operatorname{locmin}\{\phi_o(y) :\ y \in Y\}$

Wenn wir diesen Algorithmus anwenden, müssen in jedem Schritt die Mengen $\Psi(y^k)$ und $R(x^k)$ berechnet werden. Dies kann zum Beispiel durch Verwendung der Definitionen erfolgen. Ist jedoch die Kardinalität der Menge $X$ sehr groß und sind im Algorithmus 4.1 sehr viele Iterationen zu durchlaufen, so ist diese Vorgehensweise ineffektiv. Es kann also sinnvoll sein, zunächst alle Stabilitätsbereiche zu berechnen. Dabei kann man Berechnungsverfahren für verallgemeinerte Voronoi-Gebiete verwenden [20, 31].

Als nächstes betrachten wir global optimale Lösungen. Hierfür untersuchen wir zunächst die Werte

$$\phi_o^* := \inf_y \{\phi_o(y) : \ y \in Y\} \quad \text{und} \quad \phi_p^* := \inf_y \{\phi_p(y) : \ y \in Y\}.$$

Dann gilt das folgende Lemma.

**Lemma 4.7.** *Es ist* $\phi_o^* = \phi_p^*$.

*Beweis.* Aus Lemma 3.14, (3.10) und (3.11) folgt

$$\phi_o^* = \bar{\phi}_o^* := \inf_y \{\bar{\phi}_o(y) : \ y \in Y\} \qquad \text{und} \quad \phi_p^* = \bar{\phi}_p^* := \inf_y \{\bar{\phi}_p(y) : \ y \in Y\}.$$

Wegen $\bar{\phi}_o(y) = \bar{\phi}_p(y)$ für alle $y \in Y$ (siehe (4.13)) erhalten wir hieraus

$$\phi_o^* = \bar{\phi}_o^* = \bar{\phi}_p^* = \phi_p^*.$$

□

Demzufolge ist jede global pessimistische Lösung auch eine global optimistische Lösung (siehe auch (4.14)). Die Funktionswerte stimmen dabei überein. Wir suchen also im folgenden nach einer global optimistischen Lösung. Wenn ein Punkt $y^0 \in Y$ global optimistische Lösung ist, so ist wegen Lemma 4.7 der Punkt $y^0 \in Y$ genau dann eine global pessimistische Lösung, wenn $\phi_o(y^0) = \phi_p(y^0)$ und damit $\phi_p(y^0) = \phi_p^*$ gilt.

Eine naive Methode zur Berechnung einer global optimistischen Lösung besteht darin, mit Algorithmus 4.1 und unter Verwendung der Startpunkte $\nabla F(x^i)$, $i = 1, \ldots, N$, lokal optimistische Lösungen zu berechnen und deren Funktionswerte zu vergleichen. Dazu muss man jedoch vorher alle Stabilitätsbereiche berechnen. Es ist somit die Frage naheliegend, ob sich die Berechnung der Stabilitätsbereiche und die Berechnung von global optimistischen Lösungen miteinander verknüpfen lassen. Wir untersuchen im folgenden diese Idee unter Verwendung des Incremental–Algorithmus für verallgemeinerte Voronoi-Gebiete [20, 31].

Der Incremental-Algorithmus ist ein Wachstumsalgorithmus. Er startet mit der Berechnung der Stabilitätsbereiche für die Menge $X = \{x^1, x^2\}$. Danach werden schrittweise weitere Punkte $x^l$ in die Berechnung einbezogen und die entsprechenden Stabilitätsbereiche erzeugt. Für die Diskussion des Incremental–Algorithmus benötigen wir somit für alle Indizes $i = 1, \ldots, l$, $l \leq N$, die Bezeichnungen

$$R_l(x^i) := \{y \in Y : \ f(x^i, y) \leq f(x^j, y) \text{ für alle } j = 1, \ldots, l\}. \tag{4.18}$$

Dabei gilt offensichtlich $R(x^i) = R_N(x^i)$ für alle $i = 1, \ldots, N$. Die Grundidee des Algorithmus kann somit wie folgt angegeben werden.

**Algorithmus 4.2. (Incremental–Algorithmus)**

*Eingabe:* $X = \{x^1, \ldots, x^N\}$, $Y$, $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

1. *Setze* $R_1(x^1) := Y$.
2. *Für* $l = 2, \ldots, N$ *gehe wie folgt vor:*
   (a) *Finde die Indexmenge*
   $$I_l := \{i \in \{1, \ldots, l-1\} : \; R_{l-1}(x^i) \cap R_l(x^l) \neq \emptyset\}.$$
   (b) *Setze* $R_l(x^i) := R_{l-1}(x^i)$ *für alle* $i \notin I_l$.
   (c) *Setze* $R_l(x^i) := \{y \in R_{l-1}(x^i) : \; (x^l - x^i)^\top y \leq F(x^l) - F(x^i)\}$ *für alle* $i \in I_l$.
   (d) *Setze* $R_l(x^l) := \{y \in Y : \; (x^i - x^l)^\top y \leq F(x^i) - F(x^l) \quad \forall i \in I_l\}$.

*Ausgabe:* $R_N(x^1), \ldots, R_N(x^N)$

Das Hauptproblem bei diesem Algorithmus ist die Berechnung der Indexmengen $I_l$. Dies kann geschehen, indem zunächst ein Index $i_0 \in I_l$ berechnet wird [31]. Ausgehend von diesem Index werden durch Nachbarschaftsbetrachtungen alle anderen Indizes $i \in I_l$ berechnet. Dies wird für $n = 2$ in [20] ausführlich diskutiert. Für nähere Aussagen sei auf die Ausführungen in [20] und die darin enthaltenen Literaturangaben verwiesen.

Wir können nun die Idee des Incremental–Algorithmus mit der Berechnung von global optimistischen Lösungen kombinieren, indem wir zunächst die Stabilitätsbereiche und eine global optimistische Lösung für die Menge $\{x^1, \ldots, x^{l-1}\}$ berechnen und dann die Veränderungen bei Hinzufügen des Punktes $x^l$ untersuchen. Dabei verwenden wir die Bezeichnung

$$L_l(x^i) := \underset{y}{\operatorname{argmin}}\{{d^2}^\top y : \; y \in R_l(x^i)\}. \tag{4.19}$$

**Algorithmus 4.3. (global optimistische Lösung)**

*Eingabe:* $X = \{x^1, \ldots, x^N\}$ *mit* ${d^1}^\top x^1 \geq {d^1}^\top x^2 \geq \ldots \geq {d^1}^\top x^N$

1. *Setze* $R^1(x^1) := Y$, $x^* := x^1$ *und berechne einen Punkt* $y^* \in L_1(x^1)$. *Setze* $\phi_o^* := g(x^*, y^*)$.
2. *Für* $l = 2, \ldots, N$ *gehe wie folgt vor:*
   (a) *Berechne die Menge* $R_l(x^l)$ *und einen Punkt* $y^l \in L_l(x^l)$.
   (b) *Gilt* $y^* \in R_l(x^l)$, *so setze* $x^* := x^l$, $y^* := y^l$ *und* $\phi_o^* := g(x^l, y^l)$.

(c) *Gilt* $y^* \notin R_l(x^l)$ *und ist* $g(x^l, y^l) < \phi_o^*$*, so setze* $x^* := x^l$*,* $y^* := y^l$ *und* $\phi_o^* := g(x^l, y^l)$*.*

*Ausgabe:* $\phi_o^*$*,* $y^* \in \operatorname{argmin}_y\{\phi_o(y) :\ y \in Y\}$

**Theorem 4.8.** *Der Algorithmus 4.3 berechnet eine global optimistische Lösung.*

*Beweis.* Wir beweisen das Theorem mittels vollständiger Induktion bezüglich der Kardinalität der Menge $X$. Dazu verwenden wir die Bezeichnungen

$$\begin{aligned}
\Psi_l(y) &:= \{x^i :\ i \in \{1, \ldots, l\},\ y \in R_l(x^i)\} \\
\phi_l(y) &:= \min_{x \in \Psi_l(y)} g(x, y) = \min_{x \in \Psi_l(y)} {d^1}^\top x + {d^2}^\top y \\
\phi_l^* &:= \min_y \{\phi_l(y) :\ y \in Y\}.
\end{aligned}$$

Für diese betrachten wir zunächst einige grundlegende Eigenschaften. Für alle $y \in Y$ und alle Indizes $l > 1$ gilt offensichtlich

$$x^l \in \Psi_l(y) \text{ im Fall } y \in R_l(x^l) \quad \text{ und } \quad \Psi_l(y) = \Psi_{l-1}(y) \text{ im Fall } y \notin R_l(x^l).$$

Demzufolge ist

$$\phi_l(y) = \phi_{l-1}(y) \quad \text{ für alle } y \notin R_l(x^l). \tag{4.20}$$

Weiter gilt wegen ${d^1}^\top x^1 \geq \ldots {d^1}^\top x^{l-1} \geq {d^1}^\top x^l$ für alle $y \in R_l(x^l)$

$$\phi_l(y) = \min_{x \in \Psi_l(y)} {d^1}^\top x + {d^2}^\top y = {d^1}^\top x^l + {d^2}^\top y \leq \phi_{l-1}(y). \tag{4.21}$$

Hieraus folgt nun für alle Indizes $l > 1$

$$\phi_l^* = \min\{\phi_{l-1}^*, \min_{y \in R_l(x^l)} \phi_l(y)\} = \min\{\phi_{l-1}^*, \min_{y \in R_l(x^l)} g(x^l, y)\}. \tag{4.22}$$

Nach Angabe dieser Eigenschaften können wir nun mit dem eigentlichen Beweis des Theorems beginnen.

Sei also zunächst $X = \{x^1\}$. Dann ist $R_1(x^1) = Y$ und $\phi_1(y) = g(x^1, y)$ für alle $y \in Y$. Somit gilt

$$L_1(x^1) = \operatorname{argmin}\{g(x^1, y) :\ y \in R_1(x^1)\} = \operatorname{argmin}\{\phi_l(y) :\ y \in Y\},$$

d.h. der berechnete Punkt $y^* \in L_1(x^1)$ ist tatsächlich eine global optimistische Lösung im Fall $X = \{x^1\}$.

Sei nun $1 < l \leq N$ und gelte die Behauptung für $X = \{x^1, \ldots, x^{l-1}\}$. Dann berechnet der Algorithmus laut Induktionsvoraussetzung in den ersten $l - 1$ Iterationen einen Punkt $y^* \in Y$ mit $\phi_{l-1}(y^*) = \phi_{l-1}^*$. Sei $y^l \in L_l(x^l)$. Dann gilt $\min_{y \in R_l(x^l)} g(x^l, y) = g(x^l, y^l)$ wegen $y^l \in L_l(x^l)$. Wir unterscheiden nun die Fälle $y^* \in R_l(x^l)$ und $y^* \notin R_l(x^l)$.

Angenommen es ist $y^* \in R_l(x^l)$. Dann gilt wegen (4.21) und wegen $y^l \in L_l(x^l)$

$$\phi_{l-1}^* = \phi_{l-1}(y^*) \geq \phi_l(y^*) = g(x^l, y^*) \geq g(x^l, y^l).$$

Aus (4.22) folgt somit

$$\phi_l^* = \min_{y \in R_l(x^l)} g(x^l, y) = g(x^l, y^l),$$

d.h. der im Algorithmus berechnete Punkt $y^l$ ist tatsächlich eine global optimistische Lösung im Fall $X = \{x^1, \ldots, x^l\}$.

Angenommen es ist $y^* \notin R_l(x^l)$. Dann folgt $\phi_l^* = \min\{\phi_{l-1}^*, g(x^l, y^l)\}$ aus (4.22). Gilt also $\phi_{l-1}^* \leq g(x^l, y^l)$, so ist $y^*$ eine global optimistische Lösung im Fall $X = \{x^1, \ldots, x^l\}$. Sonst ist der vom Algorithmus im Schritt 2c) berechnete Punkt offenbar eine global optimistische Lösung im Fall $X = \{x^1, \ldots, x^l\}$.

Aus der vollständigen Induktion folgt somit, dass der durch den Algorithmus berechnete Punkt eine global optimistische Lösung ist. □

**Bemerkung:** Wie man im Beweis erkennt, ist für den angebenen Algorithmus die Ordnung der Punkte $x^i$ und die spezielle Form der Funktion $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ von besonderer Bedeutung. Besitzt die Funktion $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine andere Form, so ist der Algorithmus i.a. nicht korrekt.

Wenn wir eine global optimistische Lösung $y^* \in Y$ gefunden haben, so können wir mit der Bedingung $\phi_o(y^*) = \phi_p(y^*)$ überprüfen, ob dieser Punkt auch eine global pessimistische Lösung ist. Ist dies nicht der Fall, so können wir mit Hilfe von $y^*$ zumindest eine $\varepsilon$-optimale Lösung berechnen (siehe Definition 3.6).

**Theorem 4.9.** *Sei $y^* \in Y$ eine global optimistische Lösung und sei $x^* \in \Psi(y^*)$ mit $\phi_o(y^*) = g(x^*, y^*)$. Weiter sei $\tilde{y} \in \operatorname{int} R(x^*)$ mit ${d^2}^\top y^* < {d^2}^\top \tilde{y}$. Dann ist jeder Punkt $y = \lambda\tilde{y} + (1-\lambda)y^*$ mit $0 < \lambda < \varepsilon / {d^2}^\top(\tilde{y} - y^*)$ eine $\varepsilon$-optimale Lösung für den pessimistischen Lösungsfall.*

*Beweis.* Wegen $\tilde{y} \in \operatorname{int} R(x^*)$ und $R(x^*)$ konvex, ist $y = \lambda\tilde{y} + (1-\lambda)y^* \in \operatorname{int} R(x^*)$. Aus Lemma 4.3 folgt somit $\phi_p(y) = g(x^*, y)$. Mit Theorem 3.15 folgt nun die Behauptung wegen

$$\begin{array}{rcl}
\lambda {d^2}^\top(\tilde{y} - y^*) & \leq & \varepsilon \\
\lambda {d^2}^\top \tilde{y} + (1-\lambda){d^2}^\top y^* & \leq & \varepsilon + {d^2}^\top y^* \\
{d^1}^\top x^* + {d^2}^\top y & \leq & \varepsilon {d^1}^\top x^* + {d^2}^\top y^*,
\end{array}$$

und folglich $g(x^*, y) \leq g(x^*, y^*) + \varepsilon$. □

**Bemerkung:** Ist $d^2 \neq \mathbf{0}$, so kann der Punkt $\tilde{y}$ in der Umgebung von $\nabla F(x^*)$ gefunden werden. Sonst ist offensichtlich $\nabla F(x^*)$ selbst eine global pessimistische Lösung.

# Kapitel 5

# Zwei-Ebenen-Optimierung mit 0-1–Knapsack-Problemen in der unteren Ebene

## 5.1 Aufgabenstellung

In diesem Kapitel werden wir Zwei-Ebenen-Probleme betrachten, bei welchen das Problem der unteren Ebene einem 0-1–Knapsack-Problem entspricht. Unser Ziel wird es sein, die Begriffe und Aussagen aus den Kapiteln 2 und 3 für diese spezielle Aufgabenklasse zu spezifizieren.

Zwei-Ebenen-Probleme mit einem 0-1–Knapsack-Problem in der unteren Ebene wurden bereits in [6] und [9] diskutiert. In diesen Arbeiten wurde insbesondere nach global optimalen Lösungen gesucht. Entsprechende Ergebnisse werden wir in allgemeinerer Form in Abschnitt 5.9 präsentieren. Im Gegensatz zu den Arbeiten [6] und [9] werden wir außerdem Stabilitätsbereiche, Lösungsmengen, erweiterte Lösungsmengen und Optimalitätsbedingungen für (schwach) lokale optimistische bzw. pessimistische Lösungen untersuchen.

Es sei also die folgende Optimierungsaufgabe gegeben:

$$\begin{cases} \text{„}\min\limits_{y}\text{“}\{d^\top x + fy:\ y \in Y,\ x \in \Psi(y)\} \\ \text{mit} \\ \Psi(y) = \operatorname*{argmax}\limits_{x}\{c^\top x:\ a^\top x \leq y,\ x \in \{0,1\}^n\}. \end{cases} \tag{5.1}$$

Dabei seien $a \in \mathbb{R}^n$ und $c \in \mathbb{R}^n$ Vektoren mit positiven Komponenten und es sei $Y \subseteq \mathbb{R}$. Weiter sei $d \in \mathbb{R}^n$ und $f \in \mathbb{R}$. Zu beachten ist außerdem, dass nun im Gegensatz zur Aufgabe 2.1 in der unteren Ebene maximiert statt minimiert wird. Vergleichen wir Aufgabe 2.1 mit Aufgabe 5.1, so entspricht

$$g(x,y) = d^\top x + fy, \quad f(x,y) = -c^\top x, \quad h(x,y) = a^\top x - y \quad \text{und} \quad X = \{0,1\}^n. \tag{5.2}$$

Weiter sei $Y \subseteq \mathbb{R}$ eine nichtleere, konvexe, kompakte Menge. Somit existieren zwei reelle Zahlen $b_u, b_o \in \mathbb{R}$ mit $b_u \leq b_o$, so dass

$$Y = [b_u, b_o] \tag{5.3}$$

gilt. Da Forderung (F1) aus Kapitel 2 erfüllt sein soll und da die Aufgabe für $b_u = b_o$ trivial wäre, nehmen wir im folgenden an, dass

$$0 \leq b_u < b_o \tag{5.4}$$

ist.

## 5.2 Stabilitätsbereiche

Ein Stabilitätsbereich von $x \in X$ ist die Menge aller Parameter $y \in Y$ (siehe Definition 2.1), für welche $x$ eine global optimale Lösung der unteren Ebene ist, d.h.

$$R(x) = \{y \in Y : \; x \in \Psi(y)\}.$$

Wenden wir nun Formel (2.8) auf unsere Aufgabe (5.1) an, so erhalten wir

$$R(x) = \{y \in Y : \; a^\top x \leq y, \; (y < a^\top \bar{x} \text{ oder } c^\top x \geq c^\top \bar{x}) \; \forall \bar{x} \in \{0,1\}^n\} \tag{5.5}$$

für alle $x \in \{0,1\}^n$. Somit gilt offenbar

$$R(x) = [b_u; b_o] \cap [a^\top x; \min_{\bar{x} \in \{0,1\}^n} \{a^\top \bar{x} : \; c^\top x < c^\top \bar{x}\}\,) \tag{5.6}$$

für alle $x \in \{0,1\}^n$. Analog dazu folgt aus Lemma 2.1

$$R(x) = [b_u; b_o] \cap [a^\top x; \min_{\bar{x} \in \bar{X}} \{a^\top \bar{x} : \; c^\top x < c^\top \bar{x}\}\,) \tag{5.7}$$

für alle $x \in \bar{X}$. Diese Formeln können wir nun benutzen, um Eigenschaften der Stabilitätsbereiche herzuleiten.

**Theorem 5.1.** *1. Für jedes $x \in \{0,1\}^n$ ist der Stabilitätsbereich $R(x)$ entweder leer, ein abgeschlossenes Intervall oder ein halboffenes Intervall.*

*2. Für zwei Punkte $x, \bar{x} \in \{0,1\}^n$ gilt $R(x) \cap R(\bar{x}) \neq \emptyset$ genau dann, wenn $R(x) \neq \emptyset$, $R(\bar{x}) \neq \emptyset$ und $c^\top x = c^\top \bar{x}$ ist.*

*3. Angenommen es gilt $R(x) \cap R(\bar{x}) \neq \emptyset$ und $a^\top x \leq a^\top \bar{x}$ für zwei Punkte $x, \bar{x} \in \{0,1\}^n$. Dann ist $R(\bar{x}) \subseteq R(x)$.*

*Beweis.* 1. Die Aussage folgt direkt aus Formel (5.6), da der Durchschnitt eines abgeschlossenen mit einem halboffenen Intervall stets ein leeres, abgeschlossenes oder halboffenes Intervall ist.

2. Angenommen für zwei Punkte $x, \bar{x} \in \{0,1\}^n$ gilt $R(x) \cap R(\bar{x}) \neq \emptyset$. Sei nun $y \in R(x) \cap R(\bar{x})$. Somit gilt offensichtlich $a^\top x \leq y$ und $a^\top \bar{x} \leq y$. Dann folgt mit Formel (5.5) $c^\top x \geq c^\top \bar{x}$ aus $y \in R(x)$ und $c^\top \bar{x} \geq c^\top x$ aus $y \in R(\bar{x})$. Also gilt $c^\top x = c^\top \bar{x}$. $R(x) \neq \emptyset$ und $R(\bar{x}) \neq \emptyset$ ist offensichtlich.

   Angenommen für zwei Punkte $x, \bar{x} \in \{0,1\}^n$ gilt $R(x) \neq \emptyset$, $R(\bar{x}) \neq \emptyset$ und $c^\top x = c^\top \bar{x}$. Sei nun

   $$b := \min_{\widehat{x} \in \{0,1\}^n} \{a^\top \widehat{x} : \ c^\top x < c^\top \widehat{x}\} \text{ und } y := \max\{b_u, a^\top x, a^\top \bar{x}\}.$$

   Da $c^\top x = c^\top \bar{x}$ gilt, ist somit

   $$R(x) = [b_u; b_o] \cap [a^\top x; b) \text{ und } R(\bar{x}) = [b_u; b_o] \cap [a^\top \bar{x}; b).$$

   Wegen $R(x) \neq \emptyset$ und $R(\bar{x}) \neq \emptyset$ gilt somit

   $$\begin{aligned} &\max\{a^\top x, b_u\} < b \quad \text{und} \quad \max\{a^\top x, b_u\} \leq b_o \\ \text{bzw. } &\max\{a^\top \bar{x}, b_u\} < b \quad \text{und} \quad \max\{a^\top \bar{x}, b_u\} \leq b_o. \end{aligned}$$

   Somit gilt auch $y < b$ und $y \leq b_o$. Folglich ist $y \in R(x) \cap R(\bar{x})$, d.h. $R(x) \cap R(\bar{x}) \neq \emptyset$.

3. Sei $R(x) \cap R(\bar{x}) \neq \emptyset$ und $a^\top x \leq a^\top \bar{x}$ für $x, \bar{x} \in \{0,1\}^n$. Auf Grund der zweiten Aussage des Theorems gilt somit $c^\top x = c^\top \bar{x}$. Sei nun $y \in R(\bar{x})$ beliebig. Dann ist $y \in [b_u; b_o]$. Weiter gilt $a^\top x \leq y$ wegen $y \in R(\bar{x})$ und $a^\top x \leq a^\top \bar{x}$. Aus $y \in R(\bar{x})$ und $c^\top x = c^\top \bar{x}$ folgt mit Formel (5.6) die Ungleichung $y < \min_{\widehat{x} \in \{0,1\}^n} \{a^\top \widehat{x} : \ c^\top x < c^\top \widehat{x}\}$. Somit gilt $y \in R(x)$. Also ist $R(\bar{x}) \subseteq R(x)$.

□

Desweiteren interessiert uns natürlich, für welche Punkte $x \in \{0,1\}^n$ der zugehörige Stabilitätsbereich leer ist. Es gilt folgendes Lemma

**Lemma 5.2.** *Für jedes $x \in \{0,1\}^n$ gilt $R(x) = \emptyset$ genau dann, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:*

1. *Es gilt $b_o < a^\top x$, d.h. der Punkt $x$ ist für kein $y \in Y$ zulässig.*
2. *Es existiert ein Punkt $\bar{x} \in \{0,1\}^n$ mit $c^\top x < c^\top \bar{x}$ und $a^\top x \geq a^\top \bar{x}$, d.h. der Punkt $x$ wird von $\bar{x}$ dominiert.*
3. *Es existiert ein Punkt $\bar{x} \in \{0,1\}^n$ mit $c^\top x < c^\top \bar{x}$ und $a^\top \bar{x} \leq b_u$.*

*Beweis.* Der Beweis folgt direkt aus Formel (5.6). □

Weiter gilt folgendes Lemma:

**Lemma 5.3.** *1. Seien $x, u \in \{0,1\}^n$ zwei Punkte mit $x + u \in \{0,1\}^n$ und $a^\top x > b_0$. Dann gilt $a^\top(x + u) > b_o$ und somit $R(x + u) = \emptyset$.*

*2. Seien $x, \bar{x} \in \{0,1\}^n$ zwei Punkte mit $c^\top \bar{x} > c^\top x$ und $a^\top \bar{x} \leq a^\top x$. Sei weiter ein Punkt $u \in \{0,1\}^n$ gegeben mit $x+u, \bar{x}+u \in \{0,1\}^n$. Dann wird $x + u$ von $\bar{x} + u$ dominiert, d.h. es gilt $R(x + u) = \emptyset$.*

*Beweis.* Die Behauptung ist trivial wegen $a_i > 0$ und $c_i > 0$ für alle $i = 1, \ldots, n$. □

Dieses Lemma können wir nun nutzen, um die Menge $\bar{X}$ zu bestimmen. Hierfür verwenden wir den folgenden Algorithmus von Lawler [17].

**Algorithmus 5.1.** *Eingabe: $a, c, b_o, b_u$*

1. *Setze $M^0 := \{(0, \ldots, 0)^\top\}$ und $k := 1$.*
2. *Berechne $M^k := M^{k-1} \cup \{x + e^k : \ x \in M^{k-1}\}$.*
3. *Lösche alle $x \in M^k$, für welche $a^\top x > b_o$ gilt oder für welche ein $\bar{x} \in M^k$ existiert mit $c^\top \bar{x} > c^\top x$ und $a^\top \bar{x} \leq a^\top x$.*
4. *Gilt $k < n$, so setze $k := k + 1$ und gehe zu Schritt 2. Gilt $k = n$, so lösche alle $x \in M^n$, für welche ein $\bar{x} \in M^n$ existiert mit $c^\top \bar{x} > c^\top x$ und $a^\top \bar{x} \leq b_u$.*

   *Ausgabe: $M^n$*

**Theorem 5.4.** *Der Algorithmus 5.1 berechnet die Menge $\bar{X}$.*

*Beweis.* Es ist $M^n = \bar{X}$ zu zeigen.
Sei $x \in M^n$. Da $x$ nicht gelöscht wurde in Schritt 3 oder Schritt 4 einer Iteration des Algorithmus, ist keine der Bedingungen des Lemmas 5.2 erfüllt. Somit gilt $x \in \bar{X}$. Es folgt also $M^n \subseteq \bar{X}$.

Sei $x \in \bar{X} \backslash M^n$. Dann existiert eine Indexmenge $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$, so dass $x = \sum_{i \in I} e^i$ gilt. Weiter existiert ein $k \in \{1, \ldots, n\}$, so dass

$$x' := \sum_{i \in I,\, i \leq k} e^i$$

in der k-ten Iteration aus $M^k$ gelöscht wird. Also ist für $x'$ mindestens eine Bedingung aus Lemma 5.2 erfüllt.

Angenommen die erste Bedingung ist erfüllt, d.h. es ist $a^\top x' > b_o$. Dann folgt mit $u := x - x'$ und Lemma 5.3 $R(x) = \emptyset$.

Angenommen die zweite Bedingung ist erfüllt, d.h. es existiert ein $\bar{x} \in M^k$, welches $x'$ dominiert. Sei

$$u := x - x' = \sum_{i \in I,\, i > k} e^i.$$

Dann gilt $x' + u \in \{0,1\}^n$ und $\bar{x} + u \in \{0,1\}^n$. Mit Lemma 5.3 folgt nun $R(x) = \emptyset$.
Angenommen die dritte Bedingung ist erfüllt. Dann gilt $k = n$ und $x' = x$. Aus Lemma 5.2 folgt somit $R(x) = \emptyset$.

$R(x) = \emptyset$ ist aber ein Widerspruch zu $x \in \bar{X}$. Also gilt $\bar{X} = M^n$. □

Die Elemente der Menge $\bar{X} = \{x^1, x^2, \ldots, x^N\}$ können so geordnet werden, dass

$$c^\top x^1 \le c^\top x^2 \le \ldots \le c^\top x^N \quad \text{und} \quad a^\top x^1 \le a^\top x^2 \le \ldots \le a^\top x^N \tag{5.8}$$

gilt. Diese Sortierung kann nun genutzt werden, um die Stabilitätsbereiche schneller zu bestimmen.

**Theorem 5.5.** *Sei $x \in \bar{X}$ und sei die Menge $\bar{X}$ entsprechend (5.8) sortiert. Weiter sei $i \in \{1, \ldots, N\}$ der größte Index mit $c^\top x = c^\top x^i$. Dann gilt*

$$\begin{aligned} R(x) &= [\max\{b_u, a^\top x\}; b_o] && \textit{falls } i = N \textit{ und} \\ R(x) &= [\max\{b_u, a^\top x\}; a^\top x^{i+1}) && \textit{falls } i < N \textit{ ist.} \end{aligned}$$

*Beweis.* Angenommen es ist $i = N$. Wegen der Sortierung (5.8) bedeutet dies, dass kein $\bar{x} \in \bar{X}$ existiert mit $c^\top \bar{x} > c^\top x$. Mit Formel (5.7) folgt nun $R(x) = [\max\{b_u, a^\top x\}; b_o]$.
Angenommen es ist $i < N$. Auf Grund der Definition des Index $i$ gilt dann $c^\top x^i < c^\top x^{i+1}$. Wegen der Sortierung (5.8) bedeutet dies, dass

$$a^\top x^{i+1} = \min_{\bar{x} \in \bar{X}} \{a^\top \bar{x} : \ c^\top \bar{x} > c^\top x\}$$

ist. Außerdem gilt $a^\top x^{i+1} \le b_o$ wegen $x^{i+1} \in \bar{X}$. Somit folgt mit Formel (5.7) $R(x) = [\max\{b_u, a^\top x\}; a^\top x^{i+1})$. □

**Beispiel 5.1.** *Sei $a = (1,2)^\top$, $c = (1,1)^\top$, $b_u = 1$ und $b_o = 3$ (siehe Beispiel 2.11). Wir berechnen nun die Menge $\bar{X}$ mit Hilfe von Algorithmus 5.1. Dann erhalten wir*

$$\begin{aligned} M^0 &= \{(0,0)^\top\}, \\ M^1 &= \{(0,0)^\top, (1,0)^\top\} \quad \textit{und} \\ M^2 &= \{(0,0)^\top, (1,0)^\top, (0,1)^\top, (1,1)^\top\}. \end{aligned}$$

*Kein Punkt wird dabei von einem anderen Punkt dominiert oder ist unzulässig. Im letzten Schritt der zweiten Iteration wird der Punkt $(0,0)^\top$ gelöscht, da $a^\top (0,0)^\top < a^\top (1,0)^\top \le b_u$ und $c^\top (0,0)^\top < c^\top (1,0)^\top$ gilt. Also ist*

$$\bar{X} = \{(1,0)^\top, (0,1)^\top, (1,1)^\top\}.$$

*Ordnen wir diese Punkte wie in (5.8), so ist*

$$x^1 = (1,0)^\top, \quad x^2 = (0,1)^\top \quad \textit{und} \quad x^3 = (1,1)^\top.$$

*Zur Berechnung der Stabilitätsbereiche verwenden wir nun Theorem 5.5. Dann erhalten wir für $x^1$ und $x^2$ den Index $i = 2$ und für $x^3$ den Index $i = 3$. Somit gilt also*

$$R(x^1) = [1;3), \quad R(x^2) = [2;3) \quad \textit{und} \quad R(x^3) = \{3\}.$$

**Beispiel 5.2.** *Sei $c = (7,3,2,2,1)^\top$, $a = (2,1,1,2,3)^\top$, $b_u = 1$ und $b_o = 5$. Wiederum wollen wir die Menge $\bar{X}$ mit Hilfe von Algorithmus 5.1 berechnen. Bezeichne $\mathbf{0}$ den Nullvektor. Dann gilt*

$$\begin{aligned}
M^0 &= \{\mathbf{0}\}, \\
M^1 &= \{\mathbf{0}, e^1\}, \\
M^2 &= \{\mathbf{0}, e^1, e^2, e^1 + e^2\} \quad \textit{und} \\
M^3 &= \{\mathbf{0}, e^2, e^1, e^1 + e^2, e^3, e^2 + e^3, e^1 + e^3, e^1 + e^2 + e^3\}.
\end{aligned}$$

*Bei der dritten Iteration des Algorithmus werden die Punkte $e^3$, $e^2 + e^3$ und $e^1 + e^3$ gelöscht, da sie von $e^2$, $e^1$ bzw. $e^1 + e^2$ dominiert werden. Also erhalten wir*

$$M^3 = \{\mathbf{0}, e^2, e^1, e^1 + e^2, e^1 + e^2 + e^3\}.$$

*Weiter gilt*

$$M^4 = \{\mathbf{0}, e^2, e^1, e^1+e^2, e^1+e^2+e^3, e^4, e^2+e^4, e^1+e^4, e^1+e^2+e^4, e^1+e^2+e^3+e^4\}.$$

*Aus dieser Menge werden die Punkte $e^4$, $e^2 + e^4$ und $e^1 + e^4$ gelöscht, da sie von $e^1$ bzw. $e^1 + e^2$ dominiert werden. Der Punkt $e^1 + e^2 + e^3 + e^4$ wird gelöscht weil er nicht zulässig ist. Also bleibt*

$$M^4 = \{\mathbf{0}, e^2, e^1, e^1 + e^2, e^1 + e^2 + e^3, e^1 + e^2 + e^4\}.$$

*In der 5. Iteration des Algorithmus erhalten wir nach dem Löschen aller dominierten und unzulässigen Punkte*

$$M^5 = \{\mathbf{0}, e^2, e^1, e^1 + e^2, e^1 + e^2 + e^3, e^1 + e^2 + e^4\} = M^4.$$

*Als nächstes wird der Nullvektor gelöscht wegen $c^\top \mathbf{0} < c^\top e^2$ und $a^\top e^2 \leq b_u$. Folglich ist*

$$\bar{X} = \{e^2, e^1, e^1 + e^2, e^1 + e^2 + e^3, e^1 + e^2 + e^4\}.$$

*Hierbei sind die Elemente bereits entsprechend (5.8) geordnet. Mit Theorem 5.5 erhalten wir nun*

$$\begin{gathered}
R(e^2) = [1;2), \quad R(e^1) = [2;3), \quad R(e^1 + e^2) = [3,4), \\
R(e^1 + e^2 + e^3) = [4;5] \qquad \textit{und} \qquad R(e^1 + e^2 + e^4) = \{5\}.
\end{gathered}$$

*Offenbar gilt hier $R(e^1 + e^2 + e^4) \subseteq R(e^1 + e^2 + e^3)$. Dieses Ergebnis stimmt mit den Aussagen von Theorem 5.1 überein wegen*

$$c^\top(e^1 + e^2 + e^3) = c^\top(e^1 + e^2 + e^4) \textit{ und } a^\top(e^1 + e^2 + e^3) < a^\top(e^1 + e^2 + e^4).$$

## 5.3 Die Lösungsmengen

Bekanntlich war die Lösungsmenge

$$\Psi(y) = \underset{x}{\operatorname{argmax}}\{c^\top x : \; a^\top x \le y, \; x \in \{0,1\}^n\}$$

die Menge aller global optimalen Lösungen der unteren Ebene in Abhängigkeit von $y \in Y$. Weiter gilt auch

$$\Psi(y) = \{x \in \bar{X} : \; y \in R(x)\}.$$

Es gibt sehr viele Methoden, um eine Lösung eines 0-1–Knapsack-Problems zu bestimmen. Die besten Algorithmen haben dabei eine pseudo-polynomiale Laufzeit. Einen Überblick über vorhandene Lösungsmethoden kann man z.B. in [18, 21] finden. Im Gegensatz zu den meisten Methoden wollen wir nicht nur eine sondern alle optimalen Lösungen berechnen.

Im folgenden gehen wir davon aus, dass die Menge $\bar{X}$ bereits berechnet wurde. Sei also $\bar{X} = \{x^1, x^2, \ldots, x^N\}$ gegeben und so geordnet, dass (5.8)

$$c^\top x^1 \le c^\top x^2 \le \ldots \le c^\top x^N \quad \text{und} \quad a^\top x^1 \le a^\top x^2 \le \ldots \le a^\top x^N$$

gilt.

**Theorem 5.6.** *Sei $y \in [b_u; b_o]$. Sei weiter $i_0$ der größte Index, für welchen $y \ge a^\top x^{i_0}$ gilt, und $j_0$ der kleinste Index, für welchen $c^\top x^{j_0} = c^\top x^{i_0}$ gilt. Dann ist*

$$\Psi(y) = \{x^{j_0}, x^{j_0+1}, \ldots, x^{i_0}\}.$$

*Beweis.* Sei ein Index $i$ gegeben mit $j_0 \le i \le i_0$. Dann gilt

$$a^\top x^i \le y \quad \text{und} \quad c^\top x^{j_0} = c^\top x^i = c^\top x^{i_0}$$

wegen der Wahl der Indizes $i_0, j_0$ und wegen der Sortierung der Elemente von $\bar{X}$. Sei $x^k \in \bar{X}$ ein Punkt mit $c^\top x^i < c^\top x^k$. Wegen (5.8) gilt dann $k > i_0$. Wegen der Wahl von $i_0$ bedeutet dies aber $y < a^\top x^k$. Somit gilt

$$y < \min_{x \in \bar{X}}\{a^\top x : \; c^\top x^i < c^\top x\}.$$

Mit (5.7) folgt nun $y \in R(x^i)$. Also ist $\{x^{j_0}, x^{j_0+1}, \ldots, x^{i_0}\} \subseteq \Psi(y)$.

Wir nehmen nun an, die Inklusion $\{x^{j_0}, x^{j_0+1}, \ldots, x^{i_0}\} \supseteq \Psi(y)$ gilt nicht. Dann existiert ein $x^k \in \Psi(y)$, so dass entweder $k > i_0$ oder $k < j_0$ ist.

Angenommen es ist $k > i_0$. Wegen der Wahl von $i_0$ gilt dann $y < a^\top x^k$. Also ist $y \notin R(x^k)$ und somit $x^k \notin \Psi(y)$.

Angenommen es ist $k < j_0$. Wegen der Wahl von $j_0$ gilt dann $c^\top x^k < c^\top x^{j_0}$ und $a^\top x^{j_0} \le y$. Aus (5.5) folgt somit $y \notin R(x^k)$, d.h. $x^k \notin \Psi(y)$. Somit ist $\Psi(y) \subseteq \{x^{j_0}, x^{j_0+1}, \ldots, x^{i_0}\}$. $\square$

Ist also die Menge $\bar{X}$ gegeben und so geordnet, dass (5.8) gilt, so können wir also für jedes $y \in Y$ die Lösungsmenge $\Psi(y)$ durch Ermitteln der Indizes $i_0$ und $j_o$ bestimmen. Dies soll nochmals im folgenden Beispiel demonstriert werden.

**Beispiel 5.3.** *Sei erneut die Aufgabe aus Beispiel 5.1 gegeben, d.h. es sei* $a = (1,2)^\top$, $c = (1,1)^\top$, $b_u = 1$ *und* $b_o = 3$. *Dann war* $\bar{X} = \{x^1,\ x^2,\ x^3\}$ *mit*

$$x^1 = (1,0)^\top, \quad x^2 = (0,1)^\top \quad \text{und} \quad x^3 = (1,1)^\top.$$

*Sei* $y = 2$. *Wir wollen nun Theorem 5.6 anwenden, um* $\Psi(y)$ *zu berechnen. Wegen*

$$a^\top x^1 = 1 < a^\top x^2 = 2 = y < a^\top x^3 = 3$$

*gilt* $i_0 = 2$. *Weiter folgt* $j_0 = 1$ *aus* $c^\top x^1 = c^\top x^2 = 1$. *Also ist* $\Psi(y) = \{x^1, x^2\}$.

## 5.4 Die erweiterten Lösungsmengen

In diesem Abschnitt wollen wir die erweiterten Lösungsmengen $\bar{\Psi}(y)$ mit $y \in Y$ für unser Problem (5.1) bestimmen. Dabei ist

$$\bar{\Psi}(y) := \{x \in \bar{X} :\ y \in \operatorname{cl} R(x)\}$$

(siehe Definition 2.3). Wir benötigen also zunächst für alle $x \in \bar{X}$ eine Formel für die Mengen $\operatorname{cl} R(x)$. Mit (5.7) folgt offensichtlich

$$\operatorname{cl} R(x) = \left[\max\left\{b_u, a^\top x\right\}; \min\left\{b_o, \min_{\bar{x} \in \bar{X}} \left\{a^\top \bar{x} :\ c^\top x < c^\top \bar{x}\right\}\right\}\right] \tag{5.9}$$

für alle $x \in \bar{X}$. Sei $x \in \bar{X}$ und sei die Menge $\bar{X}$ entsprechend (5.8) sortiert. Weiter sei $i \in \{1, \ldots, N\}$ der größte Index mit $c^\top x = c^\top x^i$. Dann erhalten wir mit Theorem 5.5 die folgende alternative Formulierung

$$\begin{aligned} \operatorname{cl} R(x) &= [\max\{b_u, a^\top x\}; b_o] && \text{falls } i = N \text{ und} \\ \operatorname{cl} R(x) &= [\max\{b_u, a^\top x\}; a^\top x^{i+1}] && \text{falls } i < N \text{ ist.} \end{aligned} \tag{5.10}$$

Desweiteren werden wir folgendes allgemeine Lemma nutzen, welches nicht nur für Aufgabe (5.1), sondern allgemein für Problem (2.1) gilt.

**Lemma 5.7.** *Sei* $y^0 \in Y$. *Dann gilt* $x \in \bar{\Psi}(y^0)$ *genau dann, wenn für alle* $\epsilon > 0$ *ein* $y \in Y$ *mit* $\|y - y^0\| < \epsilon$ *und* $x \in \Psi(y)$ *existiert.*

*Beweis.* Es ist $x \in \bar{\Psi}(y^0)$ genau dann, wenn $y^0 \in \operatorname{cl} R(x)$ gilt. Dies ist der Fall genau dann, wenn für alle $\epsilon > 0$ ein ein $y \in Y$ existiert mit $\|y - y^0\| < \epsilon$ und $y \in R(x)$. Aus der Äquivalenz der Aussagen $y \in R(x)$ und $x \in \Psi(y)$ folgt nun die Behauptung des Lemmas. □

Sei also im folgenden die Menge $\bar{X} = \{x^1, x^2, \ldots, x^N\}$ bekannt und entsprechend (5.8) sortiert. Dann gilt das folgende Theorem.

**Theorem 5.8.** *Sei $y^0 \in Y$ gegeben. Sei weiter $i_0$ der größte Index mit $y^0 \geq a^\top x^{i_0}$ und $j_0$ der kleinste Index mit $c^\top x^{j_0} = c^\top x^{i_0}$.*

1. *Gilt $a^\top x^{j_0} < y^0$ oder $j_0 = 1$, so ist*
$$\bar{\Psi}(y^0) = \Psi(y^0) = \{x^{j_0}, x^{j_0+1}, \ldots, x^{i_0}\}.$$

2. *Gilt $a^\top x^{j_0} = y^0$ und $j_0 > 1$, so ist*
$$\bar{\Psi}(y^0) = \Psi(y^0) \cup \{x^{k_0}, \ldots, x^{j_0-1}\} = \{x^{k_0}, \ldots, x^{j_0}, \ldots, x^{i_0}\},$$
*wobei $k_0$ der kleinste Index ist mit $c^\top x^{k_0} = c^\top x^{j_0-1}$.*

*Beweis.* Für den Beweis des Theorems werden wir Lemma 5.7 verwenden. Weiter gelten im Fall $j_0 > 1$ die Ungleichungen $c^\top x^{j_0-1} < c^\top x^{j_0}$ und $a^\top x^{j_0-1} < a^\top x^{j_0}$ wegen der Definition von Index $j_0$ und wegen $x^{j_0-1} \in \bar{X}$. Außerdem gelten im Fall $i_0 < N$ die Ungleichungen $c^\top x^{i_0} \leq c^\top x^{i_0+1}$ und $a^\top x^{i_0} \leq y^0 < a^\top x^{i_0+1}$. Wir zeigen nun die Behauptung des Theorems, indem wir eine Umgebung um den Punkt $y^0$ konstruieren und die Lösungsmengen der in der Umgebung enthaltenen Punkte untersuchen.

1. Fall: Sei $y^0 > a^\top x^{j_0}$ oder $j_0 = 1$. Sei weiter $\epsilon > 0$ beliebig mit
$$\epsilon < |y^0 - a^\top x^{j_0}| \quad \text{falls } j_0 > 1 \text{ gilt} \quad \text{und} \quad \epsilon < |a^\top x^{i_0+1} - y^0| \quad \text{falls } i_0 < N \text{ gilt}$$
und sei $y \in Y$ beliebig mit $|y - y^0| < \epsilon$.
Angenommen es ist $y > y^0$. Dann ist
$$y < y^0 + \epsilon < a^\top x^{i_0+1} \quad \text{falls } i_0 < N \text{ gilt} \quad \text{und} \quad a^\top x^{i_0} \leq y^0 < y.$$
Aus Theorem 5.6 folgt somit $\Psi(y) = \Psi(y^0)$.
Angenommen es ist $y < y^0$. Dann ist $a^\top x^{i_0+1} > y^0 > y$. Wenn also $i$ den größten Index bezeichnet mit $a^\top x^i \leq y$, so gilt $i \leq i_0$. Sei $j$ der kleinste Index mit $c^\top x^i = c^\top x^j$. Dann gilt also $\Psi(y) = \{x^j, \ldots, x^i\}$ wegen Theorem 5.6.
Angenommen es ist $j_0 = 1$. Dann ist offenbar $j_0 \leq j$. Somit folgt $\Psi(y) \subseteq \Psi(y^0)$.
Angenommen es ist $j_0 > 1$. Dann gilt $\epsilon < |y^0 - a^\top x^{j_0}|$. Somit folgt $a^\top x^{j_0} < y^0 - \epsilon < y$, d.h. es ist $j_0 \leq i \leq i_0$. Dies impliziert aber $j_0 \leq j \leq i_0$ wegen $c^\top x^j = c^\top x^i = c^\top x^{i_0} = c^\top x^{j_0}$. Also gilt $\Psi(y) \subseteq \Psi(y^0)$.
Falls $y^0 > a^\top x^{j_0}$ oder $j_0 = 1$ gelten, erhalten wir also $\bar{\Psi}(y^0) = \Psi(y^0) = \{x^{j_0}, \ldots, x^{i_0}\}$ unter Verwendung von Lemma 5.7.

2. Fall: Sei nun $y^0 = a^\top x^{j_0}$ und $j_0 > 1$. Dann kann $\epsilon > 0$ mit
$$\epsilon < |a^\top x^{j_0} - a^\top x^{j_0-1}| = |y^0 - a^\top x^{j_0-1}|$$
und im Fall $i_0 < N$ mit $\epsilon < |a^\top x^{i_0+1} - y^0|$ beliebig gewählt werden. Weiter sei $y \in Y$ mit $|y - y^0| < \epsilon$ beliebig.
Angenommen es ist $y > y^0$. Dann ist
$$a^\top x^{i_0} \leq y^0 < y \qquad \text{und} \qquad y < y^0 + \epsilon < a^\top x^{i_0+1} \quad \text{falls } i_0 < N \text{ gilt.}$$

Aus Theorem 5.6 folgt somit $\Psi(y) = \Psi(y^0)$.
Angenommen es ist $y < y^0$. Dann ist

$$a^\top x^{j_0-1} \leq y^0 - \epsilon < y < y^0 = a^\top x^{j_0}.$$

Somit folgt $\Psi(y) = \{x^{k_0}, \ldots, x^{j_0-1}\}$ wegen der Wahl von $k_0$. Unter Verwendung von Lemma 5.7 erhalten wir also $\bar{\Psi}(y) = \{x^{k_0}, \ldots, x^{i_0}\}$, falls $y^0 = a^\top x^{j_0}$ und $j_0 > 1$ gelten. □

Ist die Menge $\bar{X}$ gegeben und gemäß (5.8) geordnet, so haben wir mit Theorem 5.8 also ein Berechnungsverfahren für die erweiterten Lösungsmengen. Dieses soll am folgenden kleinen Beispiel demonstriert werden.

**Beispiel 5.4.** *Sei erneut die Aufgabe aus Beispiel 5.1 bzw. Beispiel 5.3 gegeben, d.h. es sei* $a = (1,2)^\top$, $c = (1,1)^\top$, $b_u = 1$ *und* $b_o = 3$. *Dann war* $\bar{X} = \{x^1,\ x^2,\ x^3\}$ *mit*

$$x^1 = (1,0)^\top, \quad x^2 = (0,1)^\top \quad \textit{und} \quad x^3 = (1,1)^\top.$$

*Sei* $y = 3$. *Wir wollen nun Theorem 5.8 anwenden, um* $\bar{\Psi}(y)$ *zu berechnen. Wegen*

$$a^\top x^1 = 1 < a^\top x^2 = 2 < y = a^\top x^3 = 3$$

*müssen wir den zweiten Fall des Theorems anwenden. Offensichtlich gilt hier* $k_0 = 1$, $j_0 = 3$ *und* $i_0 = 3$. *Somit ist* $\bar{\Psi}(y) = \{x^1, x^2, x^3\} = \bar{X}$.

## 5.5 Lösungsfunktionen

In diesem Abschnitt wollen wir die optimistische und die pessimistische Lösungsfunktion für das Problem (5.1) bestimmen. Außerdem sollen die Mengen $O(x)$ und $P(x)$ (siehe Definition 2.4) untersucht werden.

Wie wir aus (2.12) und (2.13) wissen, gilt

$$\phi_o(y) = \min_{x \in \Psi(y)} g(x,y) \qquad \text{und} \qquad \phi_p(y) = \max_{x \in \Psi(y)} g(x,y). \tag{5.11}$$

Bei unserer Problemstellung (5.1) ist dabei $g(x,y) = d^\top x + fy$. Im folgenden sei wiederum die Menge $\bar{X}$ bekannt und entsprechend (5.8) geordnet. Wenn wir nun unsere Kenntnisse zur Lösungsmenge $\Psi(y)$ verwenden, so erhalten wir das folgende Ergebnis.

**Theorem 5.9.** *Sei* $y \in [b_u; b_o]$. *Sei weiter* $i_0$ *der größte Index, für welchen* $y \geq a^\top x^{i_0}$ *gilt, und* $j_0$ *der kleinste Index, für welchen* $c^\top x^{j_0} = c^\top x^{i_0}$ *gilt. Dann ist*

$$\phi_o(y) = \min\{d^\top x^{j_0}, d^\top x^{j_0+1}, \ldots, d^\top x^{i_0}\} + fy \tag{5.12}$$
$$\phi_p(y) = \max\{d^\top x^{j_0}, d^\top x^{j_0+1}, \ldots, d^\top x^{i_0}\} + fy. \tag{5.13}$$

*Beweis.* Der Beweis folgt direkt aus (5.11) und aus Theorem 5.6. □

Wir betrachten nun die Mengen $O(x)$ und $P(x)$. Dies sind die Mengen aller $y \in Y$, in welchen der Punkt $x \in X$ beim optimistischen bzw. pessimistischen Zugang ausgewählt werden kann, d.h.

$$\begin{aligned} O(x) &= \{y \in R(x) : \phi_o(y) = g(x,y)\} \text{ und} \\ P(x) &= \{y \in R(x) : \phi_p(y) = g(x,y)\}. \end{aligned}$$

Im folgenden Theorem wollen wir diese Mengen genauer untersuchen.

**Theorem 5.10.** *Sei ein Punkt $\bar{x} \in \bar{X}$ gegeben und bezeichne $i_0$ den größten Index mit $c^\top \bar{x} = c^\top x^{i_0}$. Sei weiter*

$$\begin{aligned} J_o &:= \{x \in \Psi(a^\top x^{i_0}) : d^\top x < d^\top \bar{x}\} \quad \textit{und} \\ J_p &:= \{x \in \Psi(a^\top x^{i_0}) : d^\top x > d^\top \bar{x}\}. \end{aligned}$$

1. *Gilt $J_o = \emptyset$, so ist $O(\bar{x}) = R(\bar{x})$. Sonst gilt*

$$O(\bar{x}) = \left[\max\{b_u, a^\top \bar{x}\},\ \min_{x \in J_o} a^\top x\right).$$

2. *Gilt $J_p = \emptyset$, so ist $P(\bar{x}) = R(\bar{x})$. Sonst gilt*

$$P(\bar{x}) = \left[\max\{b_u, a^\top \bar{x}\},\ \min_{x \in J_p} a^\top x\right).$$

*Beweis.* Wir wollen die Aussagen für die Menge $O(\bar{x})$ zeigen. Für die Menge $P(\bar{x})$ ist der Beweis analog.

Zunächst wollen wir eine Beziehung zeigen zwischen der Menge $\Psi(a^\top x^{i_0})$ und den Mengen $\Psi(y)$ mit $y \in R(\bar{x})$, welche wir für den Beweis benötigen werden.

Auf Grund von Theorem 5.6 ist

$$\Psi(a^\top x^{i_0}) = \{x^{j_0}, x^{j_0+1}, \ldots, x^{i_0}\},$$

wobei $j_0$ der kleinste Index ist mit $c^\top x^{j_0} = c^\top x^{i_0}$. Auf Grund der Wahl von $i_0$ und $j_0$ entspricht dies der Menge aller $x \in \bar{X}$ mit $c^\top x = c^\top \bar{x}$. Weiter folgt aus $\bar{x} \in \Psi(y)$ und Theorem 5.6

$$\Psi(y) = \{x \in \Psi(a^\top x^{i_0}) : a^\top x \le y\} \quad \text{für alle } y \in R(\bar{x}). \tag{5.14}$$

Diese Aussage benutzen wir nun, um die Menge $O(\bar{x})$ zu charakterisieren.

Angenommen es ist $J_o = \emptyset$. Dann gilt $d^\top x \ge d^\top \bar{x}$ für alle $x \in \Psi(a^\top x^{i_0})$. Wegen $\Psi(y) \subseteq \Psi(a^\top x^{i_0})$ für alle $y \in R(\bar{x})$ (siehe (5.14)) gilt also $d^\top x \ge d^\top \bar{x}$ für alle $y \in R(\bar{x})$ und alle $x \in \Psi(y)$, d.h. es ist

$$g(\bar{x}, y) = \min_x \{g(x,y) : x \in \Psi(y)\} \text{ für alle } y \in R(\bar{x}).$$

Aus (5.11) folgt somit $\phi_o(y) = g(\bar{x}, y)$ für alle $y \in R(\bar{x})$. Also ist $R(\bar{x}) = O(\bar{x})$.

Angenommen es ist $J_o \neq \emptyset$. Sei $y \in O(\bar{x})$. Wegen (5.14) und (5.11) impliziert dies ($a^\top x > y$ oder $d^\top \bar{x} \leq d^\top x$) für alle $x \in \Psi(a^\top x^{i_0})$. Somit gilt $y < a^\top x$ für alle $x \in J_o$. Weiter ist $y \geq \max\{b_u, a^\top \bar{x}\}$ wegen $y \in R(\bar{x})$ (siehe Theorem 5.5 und Definition 2.4). Hieraus folgt nun $y \in [\max\{b_u, a^\top \bar{x}\}, \min_{x \in J_o} a^\top x)$. Somit ist

$$O(\bar{x}) \subseteq \left[\max\{b_u, a^\top \bar{x}\}, \min_{x \in J_o} a^\top x\right).$$

Sei ein $y \in Y$ gegeben mit $\max\{b_u, a^\top \bar{x}\} \leq y < a^\top x$ für alle $x \in J_o$. Dann gilt offensichtlich $y \in R(\bar{x})$ (siehe auch Theorem 5.5). Weiter folgt $x \notin \Psi(y)$ für alle $x \in J_o$. Also ist $\Psi(y) \cap J_o = \emptyset$. Wegen $\Psi(y) \subseteq \Psi(a^\top x^{i_0})$ folgt somit $d^\top \bar{x} \leq d^\top x$ für alle $x \in \Psi(y)$. Dies impliziert nun $\phi_o(y) = g(\bar{x}, y)$, d.h. $y \in O(x)$. Weil $y \in R(\bar{x})$ beliebig gewählt wurde, erhalten wir also

$$O(\bar{x}) \supseteq \left[\max\{b_u, a^\top \bar{x}\}, \min_{x \in J_o} a^\top x\right),$$

d.h. die Behauptung des Theorems gilt. □

Mit Hilfe von Theorem 5.10 können wir nun leicht weitere Erkenntnisse über die Mengen $O(x)$ und $P(x)$ erlangen.

**Folgerung 5.11.** *Sei $\bar{x} \in \bar{X}$ und seien die Mengen $J_o$ und $J_p$ wie in Theorem 5.10 definiert. Dann gilt*

1. *$O(\bar{x}) = \emptyset$ genau dann, wenn ein $x \in J_o$ mit $a^\top x \leq \max\{b_u, a^\top \bar{x}\}$ existiert.*
2. *$P(\bar{x}) = \emptyset$ genau dann, wenn ein $x \in J_p$ mit $a^\top x \leq \max\{b_u, a^\top \bar{x}\}$ existiert.*

*Beweis.* Der Beweis folgt direkt aus Theorem 5.10. □

**Folgerung 5.12.** *Sei $\bar{x} \in \bar{X}$ und seien der Index $i_0$ und die Mengen $J_o$ und $J_p$ wie in Theorem 5.10 definiert.*

1. *Angenommen es ist $O(\bar{x}) \neq \emptyset$ und $J_o \neq \emptyset$. Dann gilt*

$$\operatorname{cl} O(\bar{x}) = \left[\max\{b_u, a^\top \bar{x}\}, \min_{x \in J_o} a^\top x\right].$$

2. *Angenommen es ist $P(\bar{x}) \neq \emptyset$ und $J_p \neq \emptyset$. Dann gilt*

$$\operatorname{cl} P(\bar{x}) = \left[\max\{b_u, a^\top \bar{x}\}, \min_{x \in J_p} a^\top x\right].$$

*Beweis.* Der Beweis folgt direkt aus Theorem 5.10. □

Weiterhin können nun auch die Mengen

$$\begin{aligned} L_o(x) &= \operatorname*{locmin}_y \{g(x,y) : \; y \in \operatorname{cl} O(x)\} \quad \text{und} \\ L_p(x) &= \operatorname*{locmin}_y \{g(x,y) : \; y \in \operatorname{cl} P(x)\} \end{aligned}$$

(siehe (2.21), (2.22)) mit Hilfe von Theorem 5.10 berechnet werden. Da $g(x,y) = d^\top x + fy$ ist und die Mengen $\operatorname{cl} O(x)$ und $\operatorname{cl} P(x)$ abgeschlossene Intervalle sind, entsprechen die Mengen $L_o(x)$ und $L_p(x)$ den Lösungsmengen von linearen Optimierungsaufgaben mit einer Variablen. Gilt $f < 0$, so wird hierbei die eindeutige Lösung jeweils am rechten Rand des Intervalls angenommen. Ist $f > 0$, so entspricht die eindeutige Lösung dem linken Randpunkt des Intervalls. Und gilt $f = 0$, so ist $L_o(x) = \operatorname{cl} O(x)$ und $L_p(x) = \operatorname{cl} P(x)$.

## 5.6 Die Mengen $\widehat{\Psi}_o(y)$ und $\widehat{\Psi}_p(y)$

In diesem Abschnitt werden wir die Mengen $\widehat{\Psi}_o(y)$ und $\widehat{\Psi}_p(y)$ für das Problem (5.1) untersuchen. Wie in den Abschnitten 2.6, 2.7 und 2.8 ersichtlich ist, werden diese Mengen für die Berechnung der schwachen Lösungsfunktionen, für Optimalitätsbedingungen und für die Berechnung von lokal optimalen Lösungen benötigt. Die Mengen $\widehat{\Psi}_o(y)$ und $\widehat{\Psi}_p(y)$ wurden in Abschnitt 2.6 wie folgt definiert:

$$\widehat{\Psi}_o(y) := \{x \in \bar{X} : \; y \in \operatorname{cl} O(x)\} \tag{5.15}$$

$$\widehat{\Psi}_p(y) := \{x \in \bar{X} : \; y \in \operatorname{cl} P(x)\} \tag{5.16}$$

Diese Mengen geben an, welche Elemente $x \in \bar{X}$ in der Umgebung eines Punktes $y \in Y$ beim optimistischen bzw. pessimistischen Zugang ausgewählt werden können.

Sei wiederum im folgenden die Menge $\bar{X} = \{x^1, x^2, \ldots, x^N\}$ bekannt und entsprechend (5.8) sortiert. Dann gilt folgendes Theorem.

**Theorem 5.13.** *Sei $y^0 \in Y$ gegeben. Sei weiter*

$$\bar{\Psi}(y^0) = \{x^{l_0}, \ldots, x^{i_0}\}$$

*die erweiterte Lösungsmenge im Punkt $y^0$, wobei die Elemente entsprechend (5.8) sortiert sind. Dann definieren wir zunächst folgende Zahlen:*

$$w_o^1 := \min_{x \in \bar{\Psi}(y^0)} \{d^\top x : \; a^\top x < y^0\}, \quad w_o^2 := \min_{x \in \bar{\Psi}(y^0)} \{d^\top x : \; a^\top x = y^0\}$$

$$w_p^1 := \max_{x \in \bar{\Psi}(y^0)} \{d^\top x : \; a^\top x < y^0\}, \quad w_p^2 := \max_{x \in \bar{\Psi}(y^0)} \{d^\top x : \; a^\top x = y^0\}.$$

*Dabei werden die Werte $w_o^1$, $w_o^2$ auf $\infty$ und die Werte $w_p^1$, $w_p^2$ auf $-\infty$ gesetzt, wenn die entsprechenden zulässigen Bereiche leer sind.*

1. *Gilt* $w_o^1 < w_o^2$ *und* $c^\top x^{l_0} = c^\top x^{i_0}$*, so ist*

$$\widehat{\Psi}_o(y^0) = \left\{x \in \bar{\Psi}(y^0) : \, d^\top x = w_o^1\right\}.$$

   *Sonst ist*

$$\begin{aligned}\widehat{\Psi}_o(y^0) &= \left\{x \in \bar{\Psi}(y^0) : \, d^\top x = w_o^1, \; a^\top x < y^0\right\} \\ &\cup \left\{x \in \bar{\Psi}(y^0) : \, d^\top x = w_o^2, \; a^\top x = y^0\right\}.\end{aligned}$$

2. *Gilt* $w_p^1 > w_p^2$ *und* $c^\top x^{l_0} = c^\top x^{i_0}$*, so ist*

$$\widehat{\Psi}_p(y^0) = \left\{x \in \bar{\Psi}(y^0) : \, d^\top x = w_p^1\right\}.$$

   *Sonst ist*

$$\begin{aligned}\widehat{\Psi}_p(y^0) &= \left\{x \in \bar{\Psi}(y^0) : \, d^\top x = w_p^1, \; a^\top x < y^0\right\} \\ &\cup \left\{x \in \bar{\Psi}(y^0) : \, d^\top x = w_p^2, \; a^\top x = y^0\right\}.\end{aligned}$$

*Beweis.* Wir beweisen die Aussagen des Theorems für den pessimistischen Fall. Für den optimistischen Fall ist der Beweis analog.

a) Sei $w_p^1 > w_p^2$ und $c^\top x^{l_0} = c^\top x^{i_0}$. Es ist $\widehat{\Psi}_p(y^0) = \left\{x \in \bar{\Psi}(y^0) : \, d^\top x = w_p^1\right\}$ zu zeigen.

   Sei also $\bar{x} \in \bar{\Psi}(y^0)$ mit $d^\top \bar{x} = w_p^1$ beliebig. Da wegen $c^\top x^{l_0} = c^\top x^{i_0}$ $\Psi(y^0) = \bar{\Psi}(y^0)$ gilt (siehe Theorem 5.8), ist $\bar{x} \in \Psi(y^0)$. Aus $w_p^1 > w_p^2$ und $d^\top \bar{x} = w_p^1$ folgt weiter $d^\top \bar{x} \geq d^\top x$ für alle $x \in \bar{\Psi}(y^0) = \Psi(y^0)$. Dies impliziert $\phi_p(y^0) = g(\bar{x}, y^0)$. Also gilt $y^0 \in P(\bar{x})$ und somit $x \in \widehat{\Psi}_p(y^0)$. Folglich ist

$$\widehat{\Psi}_p(y^0) \supseteq \left\{x \in \bar{\Psi}(y^0) : \, d^\top x = w_p^1\right\}.$$

   Angenommen es existiert ein $\bar{x} \in \widehat{\Psi}_p(y^0)$ mit

$$\bar{x} \notin \left\{x \in \bar{\Psi}(y^0) : \, d^\top x = w_p^1\right\}.$$

   Da $\widehat{\Psi}_p(y^0) \subseteq \bar{\Psi}(y^0)$ ist (siehe (2.20)), gilt also $w_p^1 \neq d^\top \bar{x}$. Aus $w_p^1 > w_p^2$ folgt weiter $w_p^1 \geq d^\top x$ für alle $x \in \bar{\Psi}(y^0)$. Somit existiert ein $x \in \bar{\Psi}(y^0)$ mit $w_p^1 = d^\top x > d^\top \bar{x}$ und $a^\top x < y^0$. Weiter ist $c^\top x = c^\top \bar{x}$ wegen $c^\top x^{l_0} = c^\top x^{i_0}$. Wenn wir die Bezeichnungen aus Theorem 5.10 verwenden, so folgt hieraus $x \in J_p$. Folgerung 5.12 und $a^\top x < y^0$ implizieren somit $y^0 \notin \operatorname{cl} P(\bar{x})$. Dies ist ein Widerspruch zu $\bar{x} \in \widehat{\Psi}_p(y^0)$. Folglich ist

$$\widehat{\Psi}_p(y^0) = \left\{x \in \bar{\Psi}(y^0) : \, d^\top x = w_p^1\right\}.$$

b) Sei $w_p^1 \leq w_p^2$ oder $c^\top x^{l_0} < c^\top x^{i_0}$. Es ist

$$\begin{array}{rcl} \widehat{\Psi}_p(y^0) & = & \left\{x \in \bar{\Psi}(y^0) : d^\top x = w_p^1,\ a^\top x < y^0\right\} \\ & \cup & \left\{x \in \bar{\Psi}(y^0) : d^\top x = w_p^2,\ a^\top x = y^0\right\} \end{array}$$

zu zeigen.

„ $\supseteq$ “ : Sei $\bar{x} \in \bar{\Psi}(y^0) \backslash \widehat{\Psi}_p(y^0)$. Dann gilt $y^0 \in \operatorname{cl} R(\bar{x})$ und $y^0 \notin \operatorname{cl} P(\bar{x})$. $y^0 \in \operatorname{cl} R(\bar{x})$ impliziert $a^\top \bar{x} \leq y^0$. Verwenden wir die Bezeichnungen aus Theorem 5.10 und Folgerung 5.11, so existiert wegen $R(\bar{x}) \neq P(\bar{x})$ ein $x \in J_p$ mit $c^\top x = c^\top \bar{x}$ und $d^\top x > d^\top \bar{x}$. Weiter gilt entweder

$$\begin{array}{rcll} P(\bar{x}) = \emptyset & \text{und somit} & a^\top x = a^\top \bar{x} \leq y^0 & \text{oder} \\ P(\bar{x}) \neq \emptyset \text{ aber } y^0 \notin \operatorname{cl} P(\bar{x}) & \text{und somit} & a^\top \bar{x} < a^\top x < y^0. & \end{array}$$

Dann folgt $x \in \bar{\Psi}(y^0)$ aus $\bar{x} \in \bar{\Psi}(y^0)$, $a^\top x \leq y^0$ und $c^\top x = c^\top \bar{x}$ (siehe Theorem 5.8).

Wir unterscheiden nun die Fälle $a^\top \bar{x} < y^0$ und $a^\top \bar{x} = y^0$.

1. Fall: Sei $a^\top \bar{x} < y^0$. Dann folgt auch $a^\top x < y^0$. Mit $x \in \bar{\Psi}(y^0)$ und $d^\top x > d^\top \bar{x}$ folgt also $w_p^1 \geq d^\top x > d^\top \bar{x}$. Somit ist

$$\bar{x} \notin \left\{x \in \bar{\Psi}(y^0) : d^\top x = w_p^1,\ a^\top x < y^0\right\}.$$

2. Fall: Sei $a^\top \bar{x} = y^0$. Dann gilt auch $a^\top x = y^0$. Mit $x \in \bar{\Psi}(y^0)$ und $d^\top x > d^\top \bar{x}$ folgt also $w_p^2 \geq d^\top x > d^\top \bar{x}$. Somit ist

$$\bar{x} \notin \left\{x \in \bar{\Psi}(y^0) : d^\top x = w_p^2,\ a^\top x = y^0\right\}.$$

Es folgt somit

$$\begin{array}{rcl} \widehat{\Psi}_p(y^0) & \supseteq & \left\{x \in \bar{\Psi}(y^0) : d^\top x = w_p^1,\ a^\top x < y^0\right\} \\ & \cup & \left\{x \in \bar{\Psi}(y^0) : d^\top x = w_p^2,\ a^\top x = y^0\right\}. \end{array}$$

„ $\subseteq$ “ : Sei $\bar{x} \in \widehat{\Psi}_p(y^0)$. Dann gilt $\bar{x} \in \bar{\Psi}(y^0)$ (siehe (2.20)) und entweder $a^\top \bar{x} < y^0$ oder $a^\top \bar{x} = y^0$.

Sei $a^\top \bar{x} < y^0$. Da $y^0 \in \operatorname{cl} P(\bar{x})$ aus $\bar{x} \in \widehat{\Psi}_p(y^0)$ folgt, gilt $d^\top x \leq d^\top \bar{x}$ für alle $x \in \bar{\Psi}(y^0)$ mit $a^\top x < y^0$. Also ist

$$\bar{x} \in \left\{x \in \bar{\Psi}(y^0) : d^\top x = w_p^1,\ a^\top x < y^0\right\}.$$

Sei $a^\top \bar{x} = y^0$. Da $y^0 \in \operatorname{cl} P(\bar{x})$ aus $\bar{x} \in \widehat{\Psi}_p(y^0)$ folgt und $c^\top \bar{x} = c^\top x$ ist für alle $x \in \bar{\Psi}(y^0)$ mit $a^\top x = y^0$, gilt $d^\top x \leq d^\top \bar{x}$ für alle $x \in \bar{\Psi}(y^0)$ mit $a^\top x = y^0$. Also ist

$$\bar{x} \in \left\{x \in \bar{\Psi}(y^0) : d^\top x = w_p^2,\ a^\top x = y^0\right\}.$$

Folglich ist

$$\begin{aligned}\widehat{\Psi}_p(y^0) &\subseteq \left\{x \in \bar{\Psi}(y^0) : d^\top x = w_p^1,\ a^\top x < y^0\right\}\\ &\cup \left\{x \in \bar{\Psi}(y^0) : d^\top x = w_p^2,\ a^\top x = y^0\right\},\end{aligned}$$

d.h. das Theorem gilt.

□

**Beispiel 5.5.** *Sei erneut die Aufgabe aus den Beispielen 5.1, 5.3 und 5.4 gegeben, d.h. es sei $a = (1,2)^\top$, $c = (1,1)^\top$, $b_u = 1$ und $b_o = 3$. Außerdem sei nun $d = (1,-1)^\top$ und $f = -1$. Dann war $\bar{X} = \{x^1,\ x^2,\ x^3\}$ mit*

$$x^1 = (1,0)^\top, \quad x^2 = (0,1)^\top \quad \text{und} \quad x^3 = (1,1)^\top.$$

*Sei $y = 3$. In Beispiel 5.4 hatten wir für diesen Punkt*

$$\bar{\Psi}(y) = \{x^1, x^2, x^3\} = \bar{X}$$

*berechnet. Wir wollen nun $\widehat{\Psi}_o(y)$ und $\widehat{\Psi}_p(y)$ ermitteln mit Hilfe von Theorem 5.13. Hierzu berechnen wir zunächst die Werte*

$$w_o^1 = -1, \quad w_o^2 = 0, \quad w_p^1 = 1 \quad \text{und} \quad w_p^2 = 0.$$

*Wegen $c^\top x^1 < c^\top x^3$ erhalten wir nun*

$$\widehat{\Psi}_o(3) = \{x^2, x^3\} \quad \text{und} \quad \widehat{\Psi}_p(3) = \{x^1, x^3\}.$$

*Sei $y = 2$. Dann folgt $\bar{\Psi}(y) = \{x^1, x^2\}$ aus Theorem 5.8. Weiter gilt*

$$w_o^1 = w_p^1 = 1 \quad \text{und} \quad w_o^2 = w_p^2 = -1.$$

*Unter Verwendung von Theorem 5.13 erhalten wir nun*

$$\widehat{\Psi}_o(2) = \{x^1, x^2\} \quad \text{und} \quad \widehat{\Psi}_p(2) = \{x^1\}.$$

*Diese Ergebnisse können wir durch die Berechnung der Mengen $O(x)$ und $P(x)$ für alle $x \in \bar{X}$ nochmals überprüfen. Mit Theorem 5.10 erhalten wir*

$$O(x^1) = [1;2), \quad O(x^2) = [2;3), \quad O(x^3) = \{3\}$$

*und*

$$P(x^1) = [1;3), \quad P(x^2) = \emptyset, \quad P(x^3) = \{3\}.$$

*Wenn wir nun die Abschließungen zu diesen Mengen und die Definitionen (5.15) und (5.16) betrachten, so erhalten wir ebenfalls die Mengen $\widehat{\Psi}_o(y)$ und $\widehat{\Psi}_p(y)$ für $y = 3$ und $y = 2$.*

Da wir nun die Mengen $\widehat{\Psi}_o(y)$ und $\widehat{\Psi}_p(y)$ berechnen können, ist es auch möglich die Funktionswerte für die schwachen Lösungsfunktionen zu ermitteln. Auf Grund von Theorem 2.6 gilt

$$\bar{\phi}_o(y) = \min_{x\in\widehat{\Psi}_o(y)} d^\top x + fy \quad \text{und} \quad \bar{\phi}_p(y) = \min_{x\in\widehat{\Psi}_p(y)} d^\top x + fy. \tag{5.17}$$

Wir können also nun alle Mengen und Funktionswerte berechnen, welche wir zum Prüfen von lokaler Optimalität benötigen (siehe Abschnitt 2.7). Auch die Berechnung von schwach lokal optimistischen und pessimistischen Lösungen ist selbstverständlich nun möglich (siehe Abschnitt 2.8).

Um die Kardinalität der verwendeten Mengen so klein wie möglich zu halten und um weitere Betrachtungen so einfach wie möglich zu gestalten, werden wir jedoch optimistische und pessimistische Auswahlfunktionen für die weiteren Ausführungen verwenden.

## 5.7 Optimistische und pessimistische Auswahlfunktionen

Optimistische und pessimistische Auswahlfunktionen sind spezielle Auswahlfunktionen, welche wir bereits im Abschnitt 3.4 betrachtet haben.

Dabei ist eine Funktion $\sigma_o : Y \to X$ eine optimistische Auswahlfunktion, falls

$$\sigma_o(y) \in \Psi(y) \quad \text{und} \quad \phi_o(y) = g(\sigma_o(y), y) \tag{5.18}$$

für alle $y \in Y$ gilt (siehe Definition 3.1 und Definition 3.4). Analog hierzu heißt eine Funktion $\sigma_p : Y \to X$ pessimistische Auswahlfunktion, falls

$$\sigma_p(y) \in \Psi(y) \quad \text{und} \quad \phi_p(y) = g(\sigma_p(y), y) \tag{5.19}$$

für alle $y \in Y$ gilt (siehe Definition 3.1 und Definition 3.5). Mit $\mathfrak{S}_o$ wird dabei die Mengen aller optimistischen Auswahlfunktionen und mit $\mathfrak{S}_p$ wird die Mengen aller pessimistischen Auswahlfunktionen bezeichnet.

Für die Angabe von einer optimistischen und einer pessimistischen Auswahlfunktion berechnen wir ausgehend von der Menge $\bar{X} = \{x^1, \ldots, x^N\}$ zunächst zwei Mengen $\bar{X}_o$ und $\bar{X}_p$. Die Berechnung der Mengen $\bar{X}_o$ und $\bar{X}_p$ erfolgt durch die folgenden beiden Algorithmen. Dabei sei die Menge $\bar{X}$ wiederum so sortiert, dass

$$c^\top x^1 \le c^\top x^2 \le \ldots \le c^\top x^N \quad \text{und} \quad a^\top x^1 \le a^\top x^2 \le \ldots \le a^\top x^N$$

gilt.

**Algorithmus 5.2. (Berechnung von $\bar{X}_o$)**
*Eingabe:* $\bar{X}$, $a$, $c$, $d$

*Lösche alle Elemente $x^i \in \bar{X}$, für welche ein $j \in \{1, \dots, N\}$ existiert mit $c^\top x^i = c^\top x^j$, $a^\top x^j \leq a^\top x^i$ und entweder $d^\top x^j < d^\top x^i$ oder $j < i$, $d^\top x^j \leq d^\top x^i$.*

*Lösche alle Elemente $x^i \in \bar{X}$, für welche ein $j > i$ existiert mit $a^\top x^j \leq b_u$.*

*Ausgabe: $\bar{X}_o$*

**Algorithmus 5.3. (Berechnung von $\bar{X}_p$)**
*Eingabe: $\bar{X}$, $a$, $c$, $d$*

*Lösche alle Elemente $x^i \in \bar{X}$, für welche ein $j \in \{1, \dots, N\}$ existiert mit $c^\top x^i = c^\top x^j$, $a^\top x^j \leq a^\top x^i$ und entweder $d^\top x^j > d^\top x^i$ oder $j < i$, $d^\top x^j \geq d^\top x^i$.*

*Lösche alle Elemente $x^i \in \bar{X}$, für welche ein $j > i$ existiert mit $a^\top x^j \leq b_u$.*

*Ausgabe: $\bar{X}_p$*

Wir berechnen in den beiden Algorithmen zwei Teilmengen $\bar{X}_o$ bzw. $\bar{X}_p$ von der Menge $\bar{X}$. Dabei werden alle Punkte $x \in \bar{X}$ gelöscht, für welche ein Punkt $\bar{x} \in \bar{X}$ existiert mit $R(x) \subseteq R(\bar{x})$ und

$$g(\bar{x}, y) \leq g(x, y) \quad \text{bzw.} \quad g(\bar{x}, y) \geq g(x, y) \quad \text{für alle } y \in R(x).$$

Gilt $R(x) = R(\bar{x})$ und $g(\bar{x}, y) = g(x, y)$ für alle $y \in R(x)$, so werden nicht beide Punkte gelöscht.

Es stellt sich also nun die Frage, welche Eigenschaften diese Mengen besitzen. Um dies zu untersuchen sei die Menge $\bar{X}_o = \{x^1, \dots, x^{N_o}\}$ so geordnet, dass

$$c^\top x^1 \leq c^\top x^2 \leq \ldots \leq c^\top x^{N_o} \quad \text{und} \quad a^\top x^1 \leq a^\top x^2 \leq \ldots \leq a^\top x^{N_o} \tag{5.20}$$

gilt. Auch die Menge $\bar{X}_p = \{\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^{N_p}\}$ sei so geordnet, dass

$$c^\top \bar{x}^1 \leq c^\top \bar{x}^2 \leq \ldots \leq c^\top \bar{x}^{N_p} \quad \text{und} \quad a^\top \bar{x}^1 \leq a^\top \bar{x}^2 \leq \ldots \leq a^\top \bar{x}^{N_p} \tag{5.21}$$

gilt. Dann erhalten wir das folgende Lemma.

**Lemma 5.14.** *1. Sei die Menge $\bar{X}_o = \{x^1, \dots, x^{N_o}\}$ entsprechend (5.20) sortiert. Dann ist*

$$a^\top x^1 \leq b_u < a^\top x^2 < \ldots < a^\top x^{N_o}.$$

*Weiter gilt $d^\top x^i > d^\top x^j$ für alle Indizes $i < j$ mit $c^\top x^i = c^\top x^j$.*

*2. Sei die Menge $\bar{X}_p = \{\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^{N_p}\}$ entsprechend (5.21) sortiert. Dann ist*

$$a^\top \bar{x}^1 \leq b_u < a^\top \bar{x}^2 < \ldots < a^\top \bar{x}^{N_p}.$$

*Weiter gilt $d^\top \bar{x}^i < d^\top \bar{x}^j$ für alle Indizes $i < j$ mit $c^\top \bar{x}^i = c^\top \bar{x}^j$.*

*Beweis.* Wir zeigen die Behauptungen für die Menge $\bar{X}_o$. Für die Menge $\bar{X}_p$ ist der Beweis analog. Die Aussage $a^\top x^1 \leq b_u < a^\top x^2$ folgt direkt aus dem Algorithmus.

Angenommen es existieren zwei Indizes $i < j$ mit $x^i, x^j \in \bar{X}_o$ und $a^\top x^i = a^\top x^j$. Dann gilt $c^\top x^i = c^\top x^j$, da sonst einer der Punkte den anderen dominieren würde (siehe Lemma 5.2). Weiter ist entweder $d^\top x^i \leq d^\top x^j$ oder $d^\top x^i > d^\top x^j$. Dann löscht Algorithmus 5.2 im ersten Fall den Punkt $x^j$ und im zweiten Fall den Punkt $x^i$, d.h. wenn $a^\top x^i = a^\top x^j$ gilt, so können nicht beide Punkte zur Menge $\bar{X}_o$ gehören. Also ist $a^\top x^i < a^\top x^j$ für alle Indizes $i > j$.

Angenommen es existieren zwei Indizes $i < j$ mit $c^\top x^i = c^\top x^j$ und $d^\top x^i \leq d^\top x^j$. Dann gilt $a^\top x^i < a^\top x^j$ wegen $i < j$. Somit löscht Algorithmus 5.2 den Punkt $x^j$. Also gilt $d^\top x^i > d^\top x^j$ für alle Punkte $x^i, x^j \in \bar{X}_o$ mit $i < j$ und $c^\top x^i = c^\top x^j$. □

Mit Hilfe der Mengen $\bar{X}_o$ und $\bar{X}_p$ können wir nun optimistische und pessimistische Auswahlfunktionen berechnen.

**Theorem 5.15.** *1. Sei $\bar{X}_o = \{x^1, \ldots, x^{N_o}\}$ gemäß (5.20) sortiert. Dann ist die Funktion $\sigma_o : Y \to X$ mit*

$$\sigma_o(y) := x^i \qquad \text{für alle } y \in Y$$

*eine optimistische Auswahlfunktion. Dabei bezeichne $i$ den größten Index mit $a^\top x^i \leq y$.*

*2. Sei $\bar{X}_p = \{\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^{N_p}\}$ gemäß (5.21) sortiert. Dann ist die Funktion $\sigma_p : Y \to X$ mit*

$$\sigma_p(y) := \bar{x}^i \qquad \text{für alle } y \in Y$$

*eine pessimistische Auswahlfunktion. Dabei bezeichne $i$ den größten Index mit $a^\top \bar{x}^i \leq y$.*

*Beweis.* Wir zeigen die Gültigkeit von (5.19) für die pessimistische Auswahlfunktion. Für die optimistische Auswahlfunktion ist der Beweis analog.

Als erstes zeigen wir, dass $\sigma_p : Y \to X$ eine Auswahlfunktion ist. Angenommen dies ist nicht der Fall. Dann existiert ein $y \in Y$ und ein $x = \sigma_p(y)$ mit $x \notin \Psi(y)$. Da $a^\top x \leq y$ gilt, existiert also ein Element $\bar{x} \in \bar{X}$ mit $a^\top \bar{x} \leq y$ und $c^\top \bar{x} > c^\top x$. Wegen $x, \bar{x} \in \bar{X}$ und (5.8) muss somit $a^\top x < a^\top \bar{x} \leq y$ sein. Auf Grund der Wahl von $\sigma_p(y)$ folgt nun $\bar{x} \notin \bar{X}_p$. Der Punkt $\bar{x}$ wurde also in Algorithmus 5.3 gelöscht. Somit existiert ein Punkt $x' \in \bar{X}_p$ mit

$$c^\top x' = c^\top \bar{x} > c^\top x \quad \text{ und } \quad a^\top x' \leq a^\top \bar{x}.$$

Wegen $x', x \in \bar{X}_p$ und (5.8) gilt nun $a^\top x < a^\top x' \leq a^\top \bar{x} \leq y$. Dies ist ein Widerspruch zur Wahl von $x = \sigma_p(y)$. Somit ist $x \in \Psi(y)$, d.h. $\sigma_p : Y \to X$ ist eine Auswahlfunktion.

Angenommen es existiert ein $y \in Y$ und ein $x = \sigma_p(y)$ mit $\phi_p(y) \neq g(x, y)$. Dann existiert ein $\bar{x} \in \Psi(y)$ mit $\phi_p(y) = g(\bar{x}, y) > g(x, y)$, d.h. $d^\top \bar{x} > d^\top x$. Weiter folgt $c^\top x = c^\top \bar{x}$ aus $x, \bar{x} \in \bar{X}$. Da der Punkt $x$ in Algorithmus 5.3 nicht gelöscht wurde, muss also $a^\top x < a^\top \bar{x} \leq y$ sein. Auf Grund der Wahl von $x = \sigma_p(y)$ gilt somit $\bar{x} \notin \bar{X}_p$. Da der Punkt $\bar{x}$ im Algorithmus 5.3 gelöscht wurde, existiert ein Punkt $x' \in \bar{X}$ mit

$$c^\top x' = c^\top \bar{x} = c^\top x, \quad a^\top x' \leq a^\top \bar{x} \leq y \quad \text{und} \quad d^\top x' \geq d^\top \bar{x} > d^\top x.$$

Aus $x, x' \in \bar{X}_p$ und Lemma 5.14 folgt nun $a^\top x < a^\top x' \leq y$. Dies ist ein Widerspruch zur Wahl von $x = \sigma_p(y)$. Somit ist $\sigma_p : Y \to X$ eine pessimistische Auswahlfunktion. □

Aus der Definition der Funktionen $\sigma_o : Y \to X$ bzw. $\sigma_p : Y \to X$ und mit Hilfe von Lemma 5.14 können wir nun leicht die Mengen

$$S_{\sigma_o}(x) = \{y \in Y : \ x = \sigma_o(y)\} \quad \text{und} \quad S_{\sigma_p}(x) = \{y \in Y : \ x = \sigma_p(y)\}$$

für alle $x \in X$ bestimmen. Es gilt das folgende Theorem.

**Theorem 5.16.** *1. Sei $x^i \in \bar{X}_o$ und sei $\bar{X}_o = \{x^1, \ldots, x^{N_o}\}$ gemäß (5.20) sortiert. Dann gilt*

$$S_{\sigma_o}(x^i) = \begin{cases} [\max\{b_u, a^\top x^i\}, a^\top x^{i+1}) & \text{für } i < N_o \\ [\max\{b_u, a^\top x^i\}, b_o] & \text{für } i = N_o. \end{cases}$$

*Für alle $x \notin \bar{X}_o$ gilt $S_{\sigma_o}(x) = \emptyset$.*

*2. Sei $\bar{x}^i \in \bar{X}_p$ und sei $\bar{X}_p = \{\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^{N_p}\}$ gemäß (5.21) sortiert. Dann gilt*

$$S_{\sigma_p}(\bar{x}^i) = \begin{cases} [\max\{b_u, a^\top \bar{x}^i\}, a^\top \bar{x}^{i+1}) & \text{für } i < N_p \\ [\max\{b_u, a^\top \bar{x}^i\}, b_o] & \text{für } i = N_p. \end{cases}$$

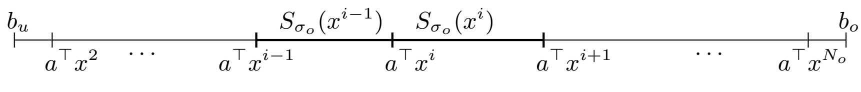
*Für alle $x \notin \bar{X}_p$ gilt $S_{\sigma_p}(x) = \emptyset$.*

*Beweis.* Der Beweis folgt unmittelbar aus Theorem 5.15. □

Wir können nun die Mengen $S_{\sigma_o}(x)$ und $S_{\sigma_p}(x)$ verwenden, um die Mengen

$$\widehat{\Psi}_{\sigma_o}(y) = \{x \in \bar{X} : \ y \in \operatorname{cl} S_{\sigma_o}(x)\} \quad \text{und} \quad \widehat{\Psi}_{\sigma_p}(y) = \{x \in \bar{X} : \ y \in \operatorname{cl} S_{\sigma_p}(x)\}$$

zu bestimmen. Dies können wir anhand der folgenden Skizze verdeutlichen.




Die Mengen $S_{\sigma_o}(x)$ bzw. $S_{\sigma_p}(x)$ sind für alle $x \in \bar{X}_o$ bzw. $x \in \bar{X}_p$ also disjunkte Intervalle. Wir erhalten somit das folgende Theorem.

**Theorem 5.17.** *1. Sei $\bar{X}_o = \{x^1, \dots, x^{N_o}\}$ gemäß (5.20) sortiert und sei $y \in Y$. Sei weiter $i$ der größte Index mit $a^\top x^i \le y$. Dann gilt*

$$\widehat{\Psi}_{\sigma_o}(y) = \begin{cases} \{x^i\} & \text{für } i = 1 \text{ oder } a^\top x^i < y \\ \{x^{i-1}, x^i\} & \text{für } i > 1 \text{ und } a^\top x^i = y. \end{cases}$$

*2. Sei $\bar{X}_p = \{\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^{N_p}\}$ gemäß (5.21) sortiert und sei $y \in Y$. Sei weiter $i$ der größte Index mit $a^\top \bar{x}^i \le y$. Dann gilt*

$$\widehat{\Psi}_{\sigma_p}(y) = \begin{cases} \{\bar{x}^i\} & \text{für } i = 1 \text{ oder } a^\top \bar{x}^i < y \\ \{\bar{x}^{i-1}, \bar{x}^i\} & \text{für } i > 1 \text{ und } a^\top \bar{x}^i = y. \end{cases}$$

*Beweis.* Der Beweis folgt unmittelbar aus Theorem 5.16. □

Mit Hilfe von Theorem 5.16 können wir außerdem noch die Mengen

$$\begin{aligned} L_{\sigma_o}(x) &= \operatorname*{locmin}_y \{g(x, y) : \ y \in \operatorname{cl} S_{\sigma_o}(x)\} \quad \text{und} \\ L_{\sigma_p}(x) &= \operatorname*{locmin}_y \{g(x, y) : \ y \in \operatorname{cl} S_{\sigma_p}(x)\} \end{aligned}$$

berechnen. Da $g(x, y) = d^\top x + fy$ ist und die Mengen $\operatorname{cl} S_{\sigma_o}(x)$ und $\operatorname{cl} S_{\sigma_p}(x)$ abgeschlossene Intervalle sind, entsprechen die Mengen $L_{\sigma_o}(x)$ und $L_{\sigma_p}(x)$ den Lösungsmengen von linearen Optimierungsaufgaben mit einer Variablen. Gilt $f < 0$, so wird hierbei die eindeutige Lösung jeweils am rechten Rand des Intervalls angenommen. Ist $f > 0$, so entspricht die eindeutige Lösung dem linken Randpunkt des Intervalls. Und gilt $f = 0$, so ist $L_{\sigma_o}(x) = \operatorname{cl} S_{\sigma_o}(x)$ und $L_{\sigma_p}(x) = \operatorname{cl} S_{\sigma_p}(x)$. Es gilt somit das folgende Theorem.

**Theorem 5.18.** *Sei $\bar{X}_o = \{x^1, \dots, x^{N_o}\}$ gemäß (5.20) sortiert. Dann gilt*

1. *falls $f > 0$ ist $L_{\sigma_o}(x^i) = \{\max\{b_u, a^\top x^i\}\}$,*
2. *falls $f = 0$ ist*

$$L_{\sigma_o}(x^i) = \begin{cases} [\max\{b_u, a^\top x^i\}; a^\top x^{i+1}] & \text{für } i < N_o \\ [\max\{b_u, a^\top x^i\}; b_o] & \text{für } i = N_o \end{cases}$$

*und*

3. *falls $f < 0$ ist*

$$L_{\sigma_o}(x^i) = \begin{cases} \{a^\top x^{i+1}\} & \text{für } i < N_o \\ \{b_o\} & \text{für } i = N_o \end{cases}$$

*für alle $x^i \in \bar{X}_o$.*

*Für die pessimistische Auswahlfunktion $\sigma_p : Y \to X$ werden die Mengen $L_{\sigma_p}(x^i)$ analog für alle $\bar{x}^i \in \bar{X}_p$ berechnet.*

## 5.8 Optimalitätsbedingungen

In diesem Abschnitt werden wir uns mit Optimalitätsbedingungen für das Problem (5.1) beschäftigen. Wir wollen insbesondere die Menge aller (schwach) lokal optimistischen bzw. pessimistischen Lösungen bestimmen. Hierfür werden wir die optimistische bzw. die pessimistische Auswahlfunktion aus Theorem 5.15 verwenden, denn es gilt

$$\phi_{\sigma_o}(y) = \phi_o(y) = g(\sigma_o(y), y) \quad \text{und} \quad \phi_{\sigma_p}(y) = \phi_p(y) = g(\sigma_p(y), y)$$

für alle $y \in Y$ (siehe (3.10) und (3.11)). Weiter ist

$$\bar{\phi}_{\sigma_o}(y) = \bar{\phi}_o(y) \quad \text{und} \quad \bar{\phi}_{\sigma_p}(y) = \bar{\phi}_p(y)$$

für alle $y \in Y$ (siehe (3.12) und (3.13)). Aus Theorem 3.3 folgt somit

$$\bar{\phi}_o(y) = \min_{x \in \widehat{\Psi}_{\sigma_o}(y)} d^\top x + fy \quad \text{und} \quad \bar{\phi}_p(y) = \min_{x \in \widehat{\Psi}_{\sigma_p}(y)} d^\top x + fy \tag{5.22}$$

für alle $y \in Y$. Verwenden wir nun Theorem 5.17 und die Bezeichnungen aus diesem Theorem, so erhalten wir für alle $y \in Y$

$$\bar{\phi}_o(y) = \begin{cases} d^\top x^i + fy & \text{für } i = 1 \text{ oder } a^\top x^i < y \\ \min\{d^\top x^{i-1}, d^\top x^i\} + fy & \text{für } i > 1 \text{ und } a^\top x^i = y \end{cases} \tag{5.23}$$

beziehungsweise

$$\bar{\phi}_p(y) = \begin{cases} d^\top \bar{x}^i + fy & \text{für } i = 1 \text{ oder } a^\top \bar{x}^i < y \\ \min\{d^\top \bar{x}^{i-1}, d^\top \bar{x}^i\} + fy & \text{für } i > 1 \text{ und } a^\top \bar{x}^i = y. \end{cases} \tag{5.24}$$

In den weiteren Betrachtungen werden wir die Fälle $f > 0$, $f < 0$ und $f = 0$ unterscheiden.

### 5.8.1 Der Fall $f > 0$

Zunächst untersuchen wir die Menge aller schwach lokal optimistischen bzw. pessimistischen Lösungen. Es gilt das folgende Theorem.

**Theorem 5.19.** *Sei $f > 0$.*

1. *Sei $\bar{X}_o = \{x^1, \ldots, x^{N_o}\}$ nach (5.20) sortiert. Dann gilt*

   $$\operatorname{locmin}\{\bar{\phi}_o(y) : \ y \in Y\} = \{b_u\} \cup \{a^\top x^i : \ 2 \le i \le N_o, \ d^\top x^i < d^\top x^{i-1}\}.$$

2. *Sei $\bar{X}_p = \{\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^{N_p}\}$ nach (5.21) sortiert. Dann gilt*

   $$\operatorname{locmin}\{\bar{\phi}_p(y) : \ y \in Y\} = \{b_u\} \cup \{a^\top \bar{x}^i : \ 2 \le i \le N_p, \ d^\top \bar{x}^i < d^\top \bar{x}^{i-1}\}.$$

*Beweis.* Wir zeigen die Behauptung für den optimistischen Fall. Für den pessimistischen Fall ist der Beweis analog. Wegen $\bar{\phi}_o(y) = \bar{\phi}_{\sigma_o}(y)$ für alle $y \in Y$ können wir Theorem 3.5 für den Beweis verwenden.

Sei $y^0 \in \text{locmin}\{\bar{\phi}_o(y) : \ y \in Y\}$. Dann existiert ein $x^i \in \bar{X}_o$ mit $x^i \in \widehat{\Psi}_{\sigma_o}(y^0)$ und $\bar{\phi}_o(y^0) = g(x^i, y^0)$. Für dieses $x^i$ gilt $y^0 \in L_{\sigma_o}(x^i)$. Aus Theorem 5.18 folgt also $y^0 = \max\{b_u, a^\top x^i\}$. Wegen Lemma 5.14 gilt dann $y^0 = b_u$ für $i = 1$ und $y^0 = a^\top x^i$ für $i > 1$. Angenommen es ist $y^0 = a^\top x^i$ für $i > 1$. Dann ist $\widehat{\Psi}_{\sigma_o}(y^0) = \{x^{i-1}, x^i\}$ (siehe Theorem 5.17). Wegen $\bar{\phi}_o(y^0) = g(x^i, y^0)$ muss also $d^\top x^{i-1} \geq d^\top x^i$ sein. Gleichheit kann dabei allerdings nicht gelten, da $a^\top x^i > \max\{b_u, a^\top x^{i-1}\}$ und somit $y^0 \notin L_{\sigma_o}(x^{i-1})$ ist. Es folgt also

$$\text{locmin}\{\bar{\phi}_o(y) : \ y \in Y\} \subseteq \{b_u\} \cup \{a^\top x^i : \ 2 \leq i \leq N_o, \ d^\top x^i < d^\top x^{i-1}\}.$$

Angenommen es ist $y^0 = b_u$. Dann ist $\widehat{\Psi}_{\sigma_o}(y^0) = \{x^1\}$ und $y^0 \in L_{\sigma_o}(x^1)$. Also folgt $y^0 \in \text{locmin}\{\bar{\phi}_o(y) : \ y \in Y\}$ wegen Theorem 3.5.

Angenommen es ist $y^0 = a^\top x^i$ und $d^\top x^{i-1} > d^\top x^i$ für ein $i \in \{2, \ldots, N_o\}$. Dann gilt $\widehat{\Psi}_{\sigma_o}(y^0) = \{x^{i-1}, x^i\}$. Weiter gilt $\bar{\phi}_o(y^0) = g(x^i, y^0) < g(x^{i-1}, y^0)$ und $y^0 \in L_{\sigma_o}(x^i)$. Aus Theorem 3.5 folgt somit $y^0 \in \text{locmin}\{\bar{\phi}_o(y) : \ y \in Y\}$. Also gilt die Behauptung des Theorems. □

Mit Hilfe von Theorem 5.19 und Folgerung 3.7 können wir nun alle lokal optimistischen bzw. pessimistischen Lösungen berechnen.

**Theorem 5.20.** *Sei $f > 0$. Dann gilt*

$$\begin{aligned} \text{locmin}\{\bar{\phi}_o(y) : \ y \in Y\} &= \text{locmin}\{\phi_o(y) : \ y \in Y\} \quad \textit{und} \\ \text{locmin}\{\bar{\phi}_p(y) : \ y \in Y\} &= \text{locmin}\{\phi_p(y) : \ y \in Y\}. \end{aligned}$$

*Beweis.* Die Inklusion $\text{locmin}\{\bar{\phi}_o(y) : \ y \in Y\} \supseteq \text{locmin}\{\phi_o(y) : \ y \in Y\}$ folgt aus Lemma 2.7. Sei nun $y^0$ eine schwach lokal optimistische Lösung. Sei weiter $\bar{X}_o = \{x^1, \ldots, x^{N_o}\}$ nach (5.20) sortiert. Laut Theorem 5.19 gilt dann $y^0 = b_u$ oder $y^0 = a^\top x^i$ mit $d^\top x^{i-1} > d^\top x^i$ für ein $i \in \{2, \ldots, N_o\}$. Gilt $y^0 = b_u$, so ist $\sigma_o(y^0) = x^1$ und $\widehat{\Psi}_{\sigma_o}(y^0) = \{x^1\}$ und somit $\bar{\phi}_o(y^0) = \phi_o(y^0) = g(x^1, y^0)$. Gilt $y^0 = a^\top x^i$ mit $d^\top x^{i-1} > d^\top x^i$ für ein $i \in \{2, \ldots, N_o\}$, so ist $\sigma_o(y^0) = x^i$. Hieraus folgt nun $\phi_o(y^0) = g(x^i, y^0) = \bar{\phi}_o(y^0)$. Mit Folgerung 3.7 erhalten wir also $y^0 \in \text{locmin}\{\phi_o(y) : \ y \in Y\}$.

Der Beweis für den pessimistischen Fall ist analog. □

### 5.8.2 Der Fall $f < 0$

Wiederum untersuchen wir zuerst die Menge aller schwach lokal optimistischen bzw. pessimistischen Lösungen. Es gilt das folgende Theorem.

**Theorem 5.21.** *Sei $f < 0$.*

1. *Sei $\bar{X}_o = \{x^1, \dots, x^{N_o}\}$ nach (5.20) sortiert. Dann gilt*

$$\operatorname{locmin}\{\bar{\phi}_o(y) : \ y \in Y\} = \{b_o\} \cup \{a^\top x^{i+1} : \ i < N_o, \ d^\top x^i < d^\top x^{i+1}\}.$$

2. *Sei $\bar{X}_p = \{\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^{N_p}\}$ nach (5.21) sortiert. Dann gilt*

$$\operatorname{locmin}\{\bar{\phi}_p(y) : \ y \in Y\} = \{b_o\} \cup \{a^\top \bar{x}^{i+1} : \ i < N_p, \ d^\top \bar{x}^i < d^\top \bar{x}^{i+1}\}.$$

*Beweis.* Wegen $\bar{\phi}_o(y) = \bar{\phi}_{\sigma_o}(y)$ für alle $y \in Y$ können wir Theorem 3.5 für den Beweis verwenden.

Sei $y^0 \in \operatorname{locmin}\{\bar{\phi}_o(y) : \ y \in Y\}$. Dann existiert ein $x^i \in \bar{X}_o$ mit $x^i \in \widehat{\Psi}_{\sigma_o}(y^0)$ und $\bar{\phi}_o(y^0) = g(x^i, y^0)$. Für dieses $x^i$ gilt $y^0 \in L_{\sigma_o}(x^i)$. Aus Theorem 5.18 folgt also $y^0 = a^\top x^{i+1}$ für $i < N_o$ und $y^0 = b_o$ sonst. Angenommen es ist $y^0 = a^\top x^{i+1} < b_o$ für $i < N_o$. Dann ist $\widehat{\Psi}_{\sigma_o}(y^0) = \{x^i, x^{i+1}\}$ (siehe Theorem 5.17). Wegen $\bar{\phi}_o(y^0) = g(x^i, y^0)$ muss also $d^\top x^{i+1} \geq d^\top x^i$ sein. Gleichheit kann dabei allerdings nicht gelten, da sonst $y^0 \notin L_{\sigma_o}(x^{i+1})$ wegen $a^\top x^{i+1} < b_o$ ist. Es folgt also

$$\operatorname{locmin}\{\bar{\phi}_o(y) : \ y \in Y\} \subseteq \{b_o\} \cup \{a^\top x^{i+1} : \ i < N_o, \ d^\top x^i < d^\top x^{i+1}\}.$$

Angenommen es ist $y^0 = b_o$. Dann ist $\widehat{\Psi}_{\sigma_o}(y^0) = \{x^{N_o}\}$ und $y^0 \in L_{\sigma_o}(x^{N_o})$ falls $a^\top x^{N_o} < b_o$ ist. Gilt $a^\top x^{N_o} = b_o$, so ist $\widehat{\Psi}_{\sigma_o}(y^0) = \{, x^{N_o-1}, x^{N_o}\}$ und $y^0 \in L_{\sigma_o}(x^{N_o}) = L_{\sigma_o}(x^{N_o-1})$. Also folgt $y^0 \in \operatorname{locmin}\{\bar{\phi}_o(y) : \ y \in Y\}$ wegen Theorem 3.5.

Angenommen es ist $y^0 = a^\top x^{i+1} < b_o$ und $d^\top x^{i+1} > d^\top x^i$ für ein $i < N_o$. Dann gilt $\widehat{\Psi}_{\sigma_o}(y^0) = \{x^i, x^{i+1}\}$. Weiter gilt $\bar{\phi}_o(y^0) = g(x^i, y^0) < g(x^{i+1}, y^0)$ und $y^0 \in L_{\sigma_o}(x^i)$. Aus Theorem 3.5 folgt somit $y^0 \in \operatorname{locmin}\{\bar{\phi}_o(y) : \ y \in Y\}$. Also gilt die Behauptung des Theorems. Der Beweis für den pessimistischen Fall ist analog. □

Mit Hilfe von Theorem 5.21 und Folgerung 3.7 können wir nun alle lokal optimistischen bzw. pessimistischen Lösungen berechnen.

**Theorem 5.22.** *Sei $f < 0$. Dann gilt*

$$\begin{aligned} \operatorname{locmin}\{\phi_o(y) : \ y \in Y\} &= \{b_o\} \quad \textit{falls } \phi_o(b_o) = \bar{\phi}_o(b_o) \textit{ ist} \quad \textit{und} \\ \operatorname{locmin}\{\phi_p(y) : \ y \in Y\} &= \{b_o\} \quad \textit{falls } \phi_p(b_o) = \bar{\phi}_p(b_o) \textit{ ist.} \end{aligned}$$

*Sind die Bedingungen nicht erfüllt, so sind die jeweiligen Mengen leer.*

*Beweis.* Zur Menge $\operatorname{locmin}\{\phi_o(y) : \ y \in Y\}$ gehören laut Folgerung 3.7 alle Punkte $y^0 \in \operatorname{locmin}\{\bar{\phi}_o(y) : \ y \in Y\}$ mit $\phi_o(y^0) = \bar{\phi}_o(y^0)$. Sei $y^0 = a^\top x^{i+1}$ mit $d^\top x^i < d^\top x^{i+1}$ für ein $i < N_o$. Dann ist $\sigma_o(y^0) = x^{i+1}$ und somit

$$\phi_o(y^0) = g(x^{i+1}, y^0) > g(x^i, y^0) = \bar{\phi}_o(y^0),$$

d.h. es gilt $y^0 \notin \operatorname{locmin}\{\phi_o(y) : \ y \in Y\}$. Hieraus folgt die Behauptung des Theorems. Der Beweis für den pessimistischen Fall ist analog. □

### 5.8.3 Der Fall $f = 0$

Bei dem Fall $f = 0$ ist es sinnvoll zu fragen, welcher Punkt keine (schwach) lokal optimistische bzw. pessimistische Lösung ist.

**Theorem 5.23.** *Sei $f = 0$. Dann ist*

$$\operatorname{locmin}\{\bar{\phi}_o(y) : \ y \in Y\} = Y = \operatorname{locmin}\{\bar{\phi}_p(y) : \ y \in Y\}.$$

*Weiter seien $\bar{X}_o = \{x^1, \ldots, x^{N_o}\}$ bzw. $\bar{X}_p = \{\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^{N_p}\}$ nach (5.20) bzw. (5.21) sortiert. Dann gilt*

$$\begin{aligned} \operatorname{locmin}\{\phi_o(y) : \ y \in Y\} &= Y \backslash \{a^\top x^i : \ x^i \in \bar{X}_o, \ i > 1, \ d^\top x^{i-1} < d^\top x^i\} \\ \operatorname{locmin}\{\phi_p(y) : \ y \in Y\} &= Y \backslash \{a^\top \bar{x}^i : \ \bar{x}^i \in \bar{X}_p, \ i > 1, \ d^\top \bar{x}^{i-1} < d^\top \bar{x}^i\}. \end{aligned}$$

*Beweis.* Wir zeigen die Behauptung des Theorems wiederum nur für den optimistischen Fall. Für den pessimistischen Fall ist der Beweis analog.

Sei $y \in Y$. Dann gilt offenbar $y \in L_{\sigma_o}(x)$ für alle $x \in \widehat{\Psi}(y)$. Somit ist $Y = \operatorname{locmin}\{\bar{\phi}_o(y) : \ y \in Y\}$.

Folglich gilt $y \notin \operatorname{locmin}\{\phi_o(y) : \ y \in Y\}$ genau dann, wenn $\phi_o(y) \neq \bar{\phi}_o(y)$ ist (siehe Folgerung 3.7). Sei $\sigma_o(y) = x^i$. Dann ist dies genau dann der Fall, wenn $i > 1$, $y = a^\top x^i$ und $d^\top x^{i-1} < d^\top x^i$ gilt. Somit gilt die Behauptung des Theorems. □

**Beispiel 5.6.** *Sei $a = (1, 2)^\top$, $c = (1, 1)^\top$, $b_u = 1$, $b_o = 3$, $d = (1, -1)^\top$ und $f = -1$. Dann ist $\bar{X} = \{e^1, e^2, e^1 + e^2\}$ (siehe Beispiel 5.1). Wir verwenden nun die Algorithmen 5.2 und 5.3 zur Berechnung der Mengen $\bar{X}_o$ und $\bar{X}_p$. Offenbar gilt*

$$\bar{X}_o = \{e^1, e^2, e^1 + e^2\} \quad \text{und} \quad \bar{X}_p = \{e^1, e^1 + e^2\}.$$

*Unter Verwendung von Theorem 5.21 erhalten wir nun*

$$\operatorname{locmin}\{\bar{\phi}_o(y) : \ y \in Y\} = \operatorname{locmin}\{\bar{\phi}_p(y) : \ y \in Y\} = \{3\}.$$

*Weiter gilt $\bar{\phi}_o(3) = -4 < \phi_o(3) = -3$ und $\bar{\phi}_p(3) = -3 = \phi_p(3)$. Aus Theorem 5.22 folgt somit*

$$\operatorname{locmin}\{\phi_o(y) : \ y \in Y\} = \emptyset \quad \text{und} \quad \operatorname{locmin}\{\phi_p(y) : \ y \in Y\} = \{3\}.$$

*Angenommen es gilt $b_o = 3.5$ und $d = (1, 1)^\top$. Alle anderen Daten seien unverändert. Dann gilt wiederum $\bar{X} = \{e^1, e^2, e^1 + e^2\}$. Nun ist aber*

$$\bar{X}_o = \bar{X}_p = \{e^1, e^1 + e^2\}.$$

*Weiter gilt*

$$\operatorname{locmin}\{\phi_o(y) : \ y \in Y\} = \operatorname{locmin}\{\phi_p(y) : \ y \in Y\} = \{3.5\}.$$

*Jede globale optimistische bzw. pessimistische Lösung muss offenbar auch eine lokale optimistische bzw. pessimistische Lösung sein. Es gilt jedoch*

$$\phi_o(2.9) = \phi_p(2.9) = -1.9 < \phi_o(3.5) = \phi_p(3.5) = -1.5.$$

*Somit existiert weder eine globale optimistische noch eine globale pessimistische Lösung.*

## 5.9 Global optimale Lösungen

In diesem Abschnitt wollen wir uns mit der Berechnung von globalen optimistischen und globalen pessimistischen Lösungen beschäftigen, d.h. wir wollen die Mengen

$$\operatorname*{argmin}_y\{\phi_o(y) : \; y \in Y\} \quad \text{und} \quad \operatorname*{argmin}_y\{\phi_p(y) : \; y \in Y\}$$

ermitteln. Weiter werden wir die Optimalwerte der Lösungsfunktionen

$$\phi_o^* := \min_y\{\phi_o(y) : \; y \in Y\} \quad \text{und} \quad \phi_p^* := \min_y\{\phi_p(y) : \; y \in Y\}$$

bestimmen. Wie wir bereits im Beispiel 5.6 gezeigt haben, müssen weder globale optimistische noch globale pessimistische Lösungen existieren. Ist dies der Fall, so werden wir uns mit $\varepsilon$-optimalen Lösungen beschäftigen. Für diese Betrachtungen unterscheiden wir erneut die Fälle $f > 0$, $f < 0$ und $f = 0$.

### 5.9.1 Der Fall $f > 0$

Seien die Mengen $\bar{X}_o = \{x^1, \ldots, x^{N_o}\}$ und $\bar{X}_p = \{\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^{N_p}\}$ nach (5.20) und (5.21) sortiert. Dann wissen wir aus Theorem 5.19 und Theorem 5.20, dass

$$\begin{aligned} \operatorname{locmin}\{\phi_o(y) : \; y \in Y\} &= \operatorname{locmin}\{\bar{\phi}_o(y) : \; y \in Y\} \\ &= \{b_u\} \cup \{a^\top x^i : \; 2 \le i \le N_o, \; d^\top x^i < d^\top x^{i-1}\} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \operatorname{locmin}\{\phi_p(y) : \; y \in Y\} &= \operatorname{locmin}\{\bar{\phi}_p(y) : \; y \in Y\} \\ &= \{b_u\} \cup \{a^\top \bar{x}^i : \; 2 \le i \le N_p, \; d^\top \bar{x}^i < d^\top \bar{x}^{i-1}\} \end{aligned}$$

gilt. Unter Verwendung von Folgerung 3.13 und Lemma 3.14 erhalten wir somit das folgende Theorem (siehe auch Theoreme 5 und 6 in [9]).

**Theorem 5.24.** *Sei $\bar{X}_o = \{x^1, \ldots, x^{N_o}\}$ bzw. $\bar{X}_p = \{\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^{N_p}\}$ nach (5.20) bzw. (5.21) sortiert. Dann gilt*

$$\begin{aligned} \phi_o^* &= \min\{d^\top x^i + f \max\{b_u, a^\top x^i\} : \; i = 1, \ldots, N_o\} \quad \textit{und} \\ \phi_p^* &= \min\{d^\top \bar{x}^i + f \max\{b_u, a^\top \bar{x}^i\} : \; i = 1, \ldots, N_p\}. \end{aligned}$$

*Weiter entspricht die Menge*

$$\left\{\max\{b_u, a^\top x^i\} :\ 1 \leq i \leq N_o,\ d^\top x^i + f \max\{b_u, a^\top x^i\} = \phi_o^*\right\}$$

*der Menge aller globalen optimististischen Lösungen und die Menge*

$$\left\{\max\{b_u, a^\top \bar{x}^i\} :\ 1 \leq i \leq N_p,\ d^\top \bar{x}^i + f \max\{b_u, a^\top \bar{x}^i\} = \phi_p^*\right\}$$

*entspricht der Menge aller globalen pessimistischen Lösungen.*

*Beweis.* Wir zeigen die Aussagen des Theorems für den optimistischen Fall. Für den pessimistischen Fall ist der Beweis analog.

Da die Funktion $\bar{\phi}_o : Y \to \mathbb{R}$ unterhalbstetig und die Menge $Y$ nichtleer und kompakt ist, existiert ein $y \in Y$ mit $\bar{\phi}_o(y) = \bar{\phi}_o^*$. Somit gilt $y \in \operatorname{locmin}_y\{\bar{\phi}_o(y) : y \in Y\}$. Mit Theorem 5.20 und Folgerung 2.12 erhalten wir nun $\phi_o(y) = \bar{\phi}_o(y)$. Dann impliziert Folgerung 3.13 $y \in \operatorname{argmin}_y\{\phi_o(y) :\ y \in Y\}$, d.h. es existiert eine globale optimistische Lösung.

Sei nun $y^0 \in \operatorname{argmin}_y\{\phi_o(y) :\ y \in Y\}$ beliebig, d.h. es sei $\phi_o^* = \phi_o(y^0)$. Dann ist $y^0 \in \operatorname{locmin}_y\{\phi_o(y) :\ y \in Y\}$. Wegen Theorem 5.19 existiert also ein Index $i > 1$ mit $y^0 = a^\top x^i$ und $d^\top x^{i-1} > d^\top x^i$, d.h. $\phi_o(y^0) = \bar{\phi}_o(y^0) = d^\top x^i + f y^0$ oder es gilt $y^0 = b_u$ und somit $\phi_o(y^0) = \bar{\phi}_o(y^0) = d^\top x^1 + f y^0$. Also ist $\phi_o(y^0) = d^\top x^i + f \max\{b_u, a^\top x^i\}$ und $y^0 = \max\{b_u, a^\top x^i\}$ für einen Index $i$ (siehe auch Lemma 5.14). Hieraus folgt nun

$$\phi_o^* = \phi_o(y^0) \geq \min\{d^\top x^i + f \max\{b_u, a^\top x^i\} :\ i = 1, \ldots, N_o\}$$

und

$$y^0 \in \left\{\max\{b_u, a^\top x^i\} :\ 1 \leq i \leq N_o,\ d^\top x^i + f \max\{b_u, a^\top x^i\} = \phi_o^*\right\}.$$

Umgekehrt, sei $i$ ein beliebiger Index und sei $y^0 = \max\{b_u, a^\top x^i\}$. Dann ist $\widehat{\Psi}_{\sigma_o}(y^0) = \{x^1\}$ für $i = 1$ und $\widehat{\Psi}_{\sigma_o}(y^0) = \{x^{i-1}, x^i\}$ für $i > 1$. Somit gilt

$$\phi_o^* \leq \phi_o(y^0) \leq d^\top x^i + f \max\{b_u, a^\top x^i\}.$$

Ist also $\phi_o^* = d^\top x^i + f \max\{b_u, a^\top x^i\}$, so ist $\phi_o^* = \phi_o(y^0)$ und somit $y^0 \in \operatorname{argmin}\{\phi_o(y) :\ y \in Y\}$. Außerdem war der Index $i$ beliebig gewählt. Somit folgt

$$\phi_o^* \leq \min\{d^\top x^i + f \max\{b_u, a^\top x^i\} :\ i = 1, \ldots, N_o\}.$$

Es gelten also die Behauptungen des Theorems. □

### 5.9.2 Der Fall $f < 0$

Seien die Mengen $\bar{X}_o = \{x^1, \ldots, x^{N_o}\}$ und $\bar{X}_p = \{\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^{N_p}\}$ nach (5.20) und (5.21) sortiert. Dann wissen wir aus Theorem 5.21, dass

$$\operatorname{locmin}\{\bar{\phi}_o(y) :\ y \in Y\} = \{b_o\} \cup \{a^\top x^{i+1} :\ i < N_o,\ d^\top x^i < d^\top x^{i+1}\}$$

und

$$\text{locmin}\{\bar{\phi}_p(y):\ y \in Y\} = \{b_o\} \cup \{a^\top \bar{x}^{i+1}:\ i < N_p,\ d^\top \bar{x}^i < d^\top \bar{x}^{i+1}\}$$

gilt. Somit erhalten wir das folgende Theorem.

**Theorem 5.25.** *Sei $\bar{X}_o = \{x^1, \ldots, x^{N_o}\}$ bzw. $\bar{X}_p = \{\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^{N_p}\}$ nach (5.20) bzw. (5.21) sortiert. Dann gilt*

$$\begin{aligned} \phi_o^* &= \min\{d^\top x^{N_o} + fb_o,\ \min_{i<N_o}(d^\top x^i + fa^\top x^{i+1})\} \\ \phi_p^* &= \min\{d^\top \bar{x}^{N_o} + fb_o,\ \min_{i<N_o}(d^\top \bar{x}^i + fa^\top \bar{x}^{i+1})\}. \end{aligned}$$

*Beweis.* Wir zeigen die Aussagen des Theorems für den optimistischen Fall. Für den pessimistischen Fall ist der Beweis analog.

Auf Grund von Lemma 3.14 gilt $\phi_o^* = \bar{\phi}_o^*$. Zusammen mit $x^{N_o} \in \widehat{\Psi}_{\sigma_o}(b_o)$ folgt somit

$$\phi_o^* = \bar{\phi}_o^* \leq \bar{\phi}_o(b_o) \leq d^\top x^{N_o} + fb_o.$$

Weiter gilt $x^i \in \widehat{\Psi}_{\sigma_o}(a^\top x^{i+1})$ für alle Indizes $i < N_o$ und somit

$$\phi_o^* = \bar{\phi}_o^* \leq \bar{\phi}_o(a^\top x^{i+1}) \leq d^\top x^i + fa^\top x^{i+1}.$$

Demzufolge ist

$$\phi_o^* \leq \min\{d^\top x^{N_o} + fb_o,\ \min_{i<N_o}(d^\top x^i + fa^\top x^{i+1})\}.$$

Da die Funktion $\bar{\phi}_o : Y \to \mathbb{R}$ unterhalbstetig und die Menge $Y$ nichtleer und kompakt ist, existiert ein $y^0 \in Y$ mit $\bar{\phi}_o(y^0) = \bar{\phi}_o^*$. Dieser Punkt $y^0$ ist wegen (3.14) und Lemma 2.7 auch eine schwach lokal optimistische Lösung. Wegen Theorem 5.21 ist also entweder $y^0 = b_o$ mit $a^\top x^{N_o} < b_0$ und somit $\bar{\phi}_o(y^0) = d^\top x^{N_o} + fb_o$ oder es existiert ein Index $i < N_o$ mit $y^0 = a^\top x^{i+1}$ und $d^\top x^i < d^\top x^{i+1}$ und somit $\bar{\phi}_o(y^0) = d^\top x^i + fa^\top x^{i+1}$. Hieraus folgt nun

$$\phi_o^* = \min\{d^\top x^{N_o} + fb_o,\ \min_{i<N_o}(d^\top x^i + fa^\top x^{i+1})\}.$$

□

Weiter gilt

$$\begin{aligned} \text{locmin}\{\phi_o(y):\ y \in Y\} &= \{b_o\} \quad \text{falls } \phi_o(b_o) = \bar{\phi}_o(b_o) \text{ ist} \quad \text{und} \\ \text{locmin}\{\phi_p(y):\ y \in Y\} &= \{b_o\} \quad \text{falls } \phi_p(b_o) = \bar{\phi}_p(b_o) \text{ ist.} \end{aligned}$$

Sind die Bedingungen nicht erfüllt, so sind die jeweiligen Mengen leer (Theorem 5.22). Da jeder global optimale Punkt auch lokal optimal ist, kann somit nur $y^0 = b_o$ eine globale optimistische bzw. pessimistische Lösung sein. Wir müssen also überprüfen, ob der Punkt $b_o$ die Bedingungen von Folgerung 3.13 erfüllt. Wir erhalten somit das folgende Theorem.

**Theorem 5.26.** *Sei* $\bar{X}_o = \{x^1, \ldots, x^{N_o}\}$ *bzw.* $\bar{X}_p = \{\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^{N_p}\}$ *nach (5.20) bzw. (5.21) sortiert. Dann ist*

1. $\operatorname{argmin}\{\phi_o(y) : \ y \in Y\} = \{b_o\}$ *falls* $d^\top x^{N_o} + f b_o \leq d^\top x^i + f a^\top x^{i+1}$ *für alle Indizes* $i < N_o$ *gilt.*
2. $\operatorname{argmin}\{\phi_p(y) : \ y \in Y\} = \{b_o\}$ *falls* $d^\top \bar{x}^{N_p} + f b_o \leq d^\top \bar{x}^i + f a^\top \bar{x}^{i+1}$ *für alle Indizes* $i < N_p$ *gilt.*

*Sind die Bedingungen nicht erfüllt, so sind die jeweiligen Mengen leer.*

*Beweis.* Wiederum zeigen wir die Aussagen des Theorems nur für den optimistischen Fall. Für den pessimistischen Fall ist der Beweis analog.

Der Punkt $b_o$ ist die einzige mögliche globale optimistische Lösung wegen Theorem 5.22. Ist also $b_o$ nicht global optimal, so ist die Menge $\operatorname{argmin}\{\phi_o(y) : y \in Y\}$ leer. Unter welchen Bedingungen ist also $b_o$ eine globale optimistische Lösung? Auf Grund von Folgerung 3.13 ist $b_o$ eine globale optimistische Lösung genau dann, wenn $\phi_o^* = \phi_o(b_o) = \bar{\phi}_o(b_o)$ gilt.

Sei also $\phi_o^* = \phi_o(b_o) = \bar{\phi}_o(b_o)$. Wegen Theorem 5.25 und $\phi_o(b_o) = d^\top x^{N_o} + f b_o$ gilt dann

$$\phi_o(b_o) = d^\top x^{N_o} + f b_o = \min\{d^\top x^{N_o} + f b_o, \min_{i<N_o} (d^\top x^i + f a^\top x^{i+1})\}$$

und somit $d^\top x^{N_o} + f b_o \leq d^\top x^i + f a^\top x^{i+1}$ für alle Indizes $i < N_o$.

Umgekehrt, sei $d^\top x^{N_o} + f b_o \leq d^\top x^i + f a^\top x^{i+1}$ für alle Indizes $i < N_o$. Wegen Theorem 5.25 und $\phi_o(b_o) = d^\top x^{N_o} + f b_o$ gilt dann

$$\phi_o^* = \phi_o(b_o) = d^\top x^{N_o} + f b_o.$$

Wegen $\bar{\phi}_o^* \leq \bar{\phi}_o(b_o) \leq \phi_o(b_o) = \phi_o^*$ und $\bar{\phi}_o^* = \phi_o^*$ folgt somit $\phi_o^* = \phi_o(b_o) = \bar{\phi}_o(b_o)$.
Also gelten die Aussagen des Theorems. □

Es ist bereits bekannt, dass die Menge $\operatorname{argmin}\{\phi_o(y) : \ y \in Y\}$ im Fall $f < 0$ leer sein kann. Aus diesem Grund sind wir in diesem Fall an der Bestimmung von $\varepsilon$-optimalen Lösungen interessiert (siehe Definition 3.6). Dabei heißt ein Punkt $y^0 \in Y$

1. $\varepsilon$-optimale optimistische Lösung, wenn $\phi_o(y^0) < \phi_o^* + \varepsilon$ gilt
2. $\varepsilon$-optimale pessimistische Lösung, wenn $\phi_p(y^0) < \phi_p^* + \varepsilon$ gilt

für $\varepsilon > 0$. Unter Verwendung von Theorem 3.15 erhalten wir nun das folgende Theorem (siehe auch Theorem 7 in [9]).

**Theorem 5.27.** *Sei* $\bar{X}_o = \{x^1, \dots, x^{N_o}\}$ *bzw.* $\bar{X}_p = \{\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^{N_p}\}$ *nach (5.20) bzw. (5.21) sortiert. Weiter sei* $\varepsilon > 0$.

1. *Sei* $\operatorname{argmin}\{\phi_o(y) : y \in Y\} = \emptyset$ *und sei* $i_0 < N_o$ *ein Index mit*

$$d^\top x^{i_0} + f a^\top x^{i_0+1} \leq d^\top x^i + f a^\top x^{i+1} \quad \text{für alle } i < N_o.$$

*Dann ist jeder Punkt*

$$y \in \left(\max\left\{a^\top x^{i_0}, a^\top x^{i_0+1} - \varepsilon/|f|\right\}; a^\top x^{i_0+1}\right)$$

*eine* $\varepsilon$*-optimale optimistische Lösung.*

2. *Sei* $\operatorname{argmin}\{\phi_p(y) : y \in Y\} = \emptyset$ *und sei* $i_0 < N_p$ *ein Index mit*

$$d^\top \bar{x}^{i_0} + f a^\top \bar{x}^{i_0+1} \leq d^\top \bar{x}^i + f a^\top \bar{x}^{i+1} \quad \text{für alle } i < N_p.$$

*Dann ist jeder Punkt*

$$y \in \left(\max\left\{a^\top \bar{x}^{i_0}, a^\top \bar{x}^{i_0+1} - \varepsilon/|f|\right\}; a^\top \bar{x}^{i_0+1}\right)$$

*eine* $\varepsilon$*-optimale pessimistische Lösung.*

*Beweis.* Wiederum zeigen wir die Aussagen des Theorems nur für den optimistischen Fall. Für den pessimistischen Fall ist der Beweis analog.

Auf Grund von $\operatorname{argmin}\{\phi_o(y) : y \in Y\} = \emptyset$ gilt $\phi_o^* < \phi_o(b^0) = d^\top x^{N_o} + f b_o$. Aus Theorem 5.25 folgt somit, dass ein Index $i_0 < N_o$ existiert mit $\phi_o^* = d^\top x^{i_0} + f a^\top x^{i_0+1}$. Sei $y^0 := a^\top x^{i_0+1}$. Dann gilt also $\bar{\phi}_o^* = \phi_o^* = \phi_o(y^0)$. Weiter ist $x^{i_0} \in \widehat{\Psi}_{\sigma_o}(a^\top x^{i_0+1})$ und $\bar{\phi}_o(y^0) = g(x^{i_0}, y^0)$. Dann impliziert Theorem 3.15, dass alle Punkte $y \in S_{\sigma_o}(x^{i_0})$ mit $g(x^{i_0}, y) < g(x^{i_0}, y^0) + \varepsilon$ $\varepsilon$-optimale optimistische Lösungen sind. Die Behauptung des Theorems folgt nun aus $S_{\sigma_o}(x^{i_0}) = [a^\top x^{i_0}, a^\top x^{i_0+1})$ und aus

$$\begin{aligned} g(x^{i_0}, y) - g(x^{i_0}, y^0) &= d^\top x^{i_0} + f y - d^\top x^{i_0} - f y^0 = f y - f y^0 \\ &< f a^\top x^{i_0+1} + \varepsilon - f y^0 = \varepsilon \end{aligned}$$

für alle $y > a^\top x^{i_0+1} + \varepsilon/f$. $\square$

### 5.9.3 Der Fall $f = 0$

Sei erneut $\bar{X}_o = \{x^1, \dots, x^{N_o}\}$ bzw. $\bar{X}_p = \{\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^{N_p}\}$ nach (5.20) bzw. (5.21) sortiert. Im Fall $f = 0$ gilt dann offenbar

$$\begin{aligned} &\phi_o(y) = d^\top x^i \quad \text{für alle} \quad y \in S_{\sigma_o}(x^i) \quad \text{und alle } i = 1, \dots, N_o \quad \text{sowie} \\ &\phi_p(y) = d^\top \bar{x}^i \quad \text{für alle} \quad y \in S_{\sigma_p}(\bar{x}^i) \quad \text{und alle } i = 1, \dots, N_p. \end{aligned}$$

Da die Mengen $S_{\sigma_o}(x^i)$ bzw. $S_{\sigma_p}(\bar{x}^i)$ die Menge $Y$ überdecken, folgt somit

$$\begin{aligned} \phi_o^* &= \inf\{\phi_o(y) : y \in Y\} = \min\{d^\top x^i : i = 1, \ldots, N_o\} \quad \text{und} && (5.25)\\ \phi_p^* &= \inf\{\phi_p(y) : y \in Y\} = \min\{d^\top \bar{x}^i : i = 1, \ldots, N_p\}. && (5.26)\end{aligned}$$

Demzufolge existieren stets Indizes $i_0 \in \{1, \ldots, N_o\}$ und $j_0 \in \{1, \ldots, N_p\}$ mit

$$\phi_o^* = d^\top x^{i_0} \quad \text{und} \quad \phi_p^* = d^\top \bar{x}^{j_0}.$$

Es gilt somit $\phi_o^* = \phi_o(y)$ für alle $y \in S_{\sigma_o}(x^{i_0})$ und $\phi_p^* = \phi_p(y)$ für alle $y \in S_{\sigma_p}(\bar{x}^{j_0})$. Folglich ist

$$S_{\sigma_o}(x^{i_0}) \subseteq \operatorname*{argmin}_y\{\phi_o(y) : y \in Y\} \quad \text{und} \quad S_{\sigma_p}(x^{j_0}) \subseteq \operatorname*{argmin}_y\{\phi_p(y) : y \in Y\}.$$

Sei nun $y^0 \in \operatorname{argmin}_y\{\phi_o(y) : y \in Y\}$. Dann existiert ein $i_0 \in \{1, \ldots, N_o\}$ mit $\sigma_o(y^0) = x^{i_0}$. Für diesen Index $i_0$ gilt dann $\phi_o^* = \phi_o(y^0) = d^\top x^{i_0}$. Für den pessimistischen Fall erhalten wir eine analoge Aussage. Somit gilt das folgende Theorem.

**Theorem 5.28.** *Sei $\bar{X}_o = \{x^1, \ldots, x^{N_o}\}$ bzw. $\bar{X}_p = \{\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^{N_p}\}$ nach (5.20) bzw. (5.21) sortiert. Weiter sei $f = 0$. Dann gilt*

$$\begin{aligned} \phi_o^* &= \inf\{\phi_o(y) : y \in Y\} = \min\{d^\top x^i : i = 1, \ldots, N_o\},\\ \phi_p^* &= \inf\{\phi_p(y) : y \in Y\} = \min\{d^\top \bar{x}^i : i = 1, \ldots, N_p\}\end{aligned}$$

*sowie*

$$\begin{aligned} \operatorname*{argmin}_y\{\phi_o(y) : y \in Y\} &= \bigcup_{i: d^\top x^i = \phi_o^*} S_{\sigma_o}(x^i) \quad \textit{und}\\ \operatorname*{argmin}_y\{\phi_p(y) : y \in Y\} &= \bigcup_{j: d^\top \bar{x}^j = \phi_p^*} S_{\sigma_p}(\bar{x}^j).\end{aligned}$$

**Beispiel 5.7.** *Sei $a = (1, 2)^\top$, $c = (1, 1)^\top$, $b_u = 1$, $b_o = 3$ und $d = (1, -1)^\top$. Dann ist*

$$\bar{X}_o = \{e^1, e^2, e^1 + e^2\} \quad \textit{und} \quad \bar{X}_p = \{e^1, e^1 + e^2\}$$

*(siehe Beispiel 5.6). Wir wollen nun globale optimistische bzw. pessimistische Lösungen für verschiedene Werte von $f$ untersuchen.*

1. *Sei $f = 1$. Dann erhalten wir aus Theorem 5.24*

$$\phi_o^* = \min\{2, 1, 3\} = 1 \quad \textit{und} \quad \phi_p^* = \min\{2, 3\} = 2 \quad \textit{sowie}$$

$$\operatorname*{argmin}_y\{\phi_o(y) : y \in Y\} = \{2\} \quad \textit{und} \quad \operatorname*{argmin}_y\{\phi_p(y) : y \in Y\} = \{1\}.$$

2. *Sei $f = -1$. Dann erhalten wir aus Theorem 5.25*

$$\phi_o^* = \min\{0-3, \min\{1-2, -1-3\}\} = -4 \text{ und } \phi_p^* = \min\{0-3, 1-2\} = -3.$$

*Weiter folgen*

$$\operatorname*{argmin}_y\{\phi_o(y) : \ y \in Y\} = \emptyset \quad \text{und} \quad \operatorname*{argmin}_y\{\phi_p(y) : \ y \in Y\} = \{b_o\}$$

*aus Theorem 5.26 wegen $d^\top x^{N_o} + fb_o = -3 \not\leq d^\top x^2 + fa^\top x^3 = -4$ und $d^\top \bar{x}^{N_p} + fb_o = -3 \leq d^\top \bar{x}^1 + fa^\top \bar{x}^2$. Somit sind wir auch an $\varepsilon$-optimalen optimistischen Lösungen interessiert. Sei also $\varepsilon > 0$. Wir verwenden nun Theorem 5.27. Zuerst muss hierfür ein Index $i_0 < N_o$ mit*

$$d^\top x^{i_0} + fa^\top x^{i_0+1} \leq d^\top x^i + fa^\top x^{i+1} \quad \text{für alle } i < N_o$$

*bestimmt werden. Dieser Index beträgt hier $i_0 = 2$. Also sind alle Punkte des Intervalls $(\max\{2, 3-\varepsilon\}; 3)$ $\varepsilon$-optimale optimistische Lösungen.*

3. *Sei $f = 0$. Dann erhalten wir aus Theorem 5.28*

$$\phi_o^* = \min\{1, -1, 0\} = -1 \quad \text{und} \quad \phi_p^* = \min\{1, 0\} = 0 \quad \text{sowie}$$

$$\operatorname*{argmin}_y\{\phi_o(y) : \ y \in Y\} = [2; 3) \quad \text{und} \quad \operatorname*{argmin}_y\{\phi_p(y) : \ y \in Y\} = \{3\}.$$

# Kapitel 6

# Das Assortment Pricing Problem

## 6.1 Problemstellung

In der Wirtschaft existiert ein permanenter Wettbewerb zwischen Konsumenten und verschiedenen Produzenten. Im folgenden betrachten wir eine Situation mit einem Produzenten und einem Konsumenten. Wir nehmen an, der Produzent verkauft $n$ verschiedene Produkte, welche wir mit $i = 1, \ldots, n$ bezeichnen, für einen Preis $p_i$, $i = 1, \ldots, n$. Dabei hat er Produktionskosten $c_i$ für die Produkte $i = 1, \ldots, n$. Das Kaufverhalten des Konsumenten kann durch einen Vektor $x \in \mathbb{Z}^n$ beschrieben werden, wobei jedes $x_i \in \mathbb{Z}$ angibt, wie oft der Konsument das Produkt $i$ kauft. In Abhängigkeit vom Kaufverhalten des Konsumenten und des vom Produzenten gewählten Preisvektors $p \in \mathbb{R}^n$ erhält der Produzent also einen Profit $E(x, p) = (p - c)^\top x$. Wenn der Produzent seinen Profit maximieren möchte, so muss er demzufolge das Kaufverhalten des Konsumenten in Abhängigkeit vom Preisvektor $p$ kennen. Wie kann dieses also beschrieben werden?

Der Konsument hat eine begrenzte Menge $b$ an Geld zur Verfügung. Somit gilt die Restriktion $x^\top p \leq b$. Das vorhandene Geld wird der Konsument so einsetzen, dass er seine Bedürfnisse so gut wie möglich befriedigt. Wir gehen im folgenden davon aus, dass seine Zufriedenheit mit einem Warenkorb $x \in \mathbb{Z}^n$ proportional zu dem Quotienten aus Leistungsumfang und gezahltem Entgeld ist, wobei der Leistungsumfang durch $a^\top x$ und das Entgeld durch $p^\top x$ gegeben sind. Somit maximiert der Konsument den Quotienten $a^\top x / p^\top x$ über alle möglichen Warenkörbe $x \in \mathbb{Z}^n \backslash \{\mathbf{0}\}$. Kauft der Konsument nichts, so beschreiben wir seine Zufriedenheit durch eine nichtnegative Konstante [24].

Wenn wir davon ausgehen, dass es für alle Produkte $i = 1, \ldots, n$ eine obere

Preisschranke $u_i > 0$ und eine maximale Verfügbarkeit $\beta_i \geq 1$ gibt, so erhalten wir also das folgende Zwei-Ebenen-Problem

$$\begin{cases} \text{„}\max_p\text{“}\{E(x,p) :\ p \in Y,\ x \in \Psi(y)\} \\ \text{mit} \\ \Psi(y) = \operatorname*{argmin}_x\{f(x,p) :\ p^\top x \leq b,\ x \in X\} \end{cases} \tag{6.1}$$

mit $E(x,p) = (p-c)^\top x$ und

$$Y \quad := \quad \{p \in \mathbb{R}^n :\ 0 \leq p_i \leq u_i \ \text{ für alle } i = 1, \ldots, n\}, \tag{6.2}$$

$$X \quad := \quad \{x \in \mathbb{Z}_+^n :\ x_i \leq \beta_i \qquad \text{für alle } i = 1, \ldots, n\}. \tag{6.3}$$

Weiter sei $c \in \mathbb{R}^n$, $\beta \in \mathbb{N}^n$, $b \in \mathbb{R}$, $b > 0$ und $a \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^n$ mit $a_i > 0$, $u_i > 0$ für alle $i = 1, \ldots, n$. Die Funktion $f(x,p)$ ist definiert als

$$f(x,p) := \begin{cases} M & \text{für } x = \mathbf{0} \\ \dfrac{p^\top x}{a^\top x} & \text{für } x \neq \mathbf{0} \end{cases} \tag{6.4}$$

mit $M \in \mathbb{R}$, $M > 0$. Diese Funktion ist wohldefiniert wegen $a^\top x > 0$ für alle $x \in \mathbb{Z}_+^n$ mit $x \neq \mathbf{0}$.

Somit haben wir ein Zwei-Ebenen-Problem zu lösen mit einem diskreten hyperbolischen Problem in der unteren Ebene und einem linearen Problem in der oberen Ebene. Hyperbolische Zwei-Ebenen-Probleme mit stetigen Variablen wurden bereits in [5] untersucht. Weiter existieren Betrachtungen zu diskreten hyperbolischen Optimierungsproblemen [22] aber keine zu Zwei-Ebenen-Problemen mit einem diskreten hyperbolischen Optimierungsproblem in der unteren Ebene.

## 6.2 Stabilitätsbereiche

Um lokal optimale Lösungen für das Zwei-Ebenen-Problem (6.1) zu finden, müssen wir die Lösungsmengen $\Psi(p)$ für alle $p \in Y$ kennen. Diese stehen in Relation zu den Stabilitätsbereichen

$$R(x) := \{p \in Y :\ x \in \Psi(p)\}$$

für alle $x \in X$. $R(x)$ ist also die Menge aller Parameter $p \in Y$, für welche ein gegebener Punkt $x \in X$ eine optimale Lösung des Problems der unteren Ebene ist. Somit gilt für alle $x \in X$

$$R(x) = \left\{p \in Y :\ p^\top x \leq b,\ \big(f(x,p) \leq f(y,p)\ \vee\ p^\top y > b\big)\ \forall y \in X\right\}, \tag{6.5}$$

d.h. $x \in X$ ist zulässig und alle anderen Elemente $y \in X$ sind entweder unzulässig oder haben einen größeren Funktionswert als $x$.

Die Stabilitätsbereiche haben interessante Eigenschaften mit Hinblick auf Summen. Dies zeigen wir im folgenden Lemma.

**Lemma 6.1.** *Seien $x, x^1, x^2 \in X \backslash \{\mathbf{0}\}$ mit $x = x^1 + x^2$. Dann gilt $R(x) \subseteq R(x^1) \cap R(x^2)$ und $f(x,p) = f(x^1,p) = f(x^2,p)$ für alle $p \in R(x)$.*

*Beweis.* Sei ein beliebiger Punkt $p \in R(x)$ gegeben. Dann gilt $b \geq p^\top x = p^\top(x^1+x^2)$. Wegen $x \geq \mathbf{0}$ und $p \geq \mathbf{0}$ erhalten wir somit $b \geq p^\top x^1$ und $b \geq p^\top x^2$. Die Punkte $x^1, x^2 \in X$ sind also zulässig. Demzufolge haben sie einen größeren Zielfunktionswert als $x$, d.h. es gilt $f(x,p) \leq f(x^1,p)$ und $f(x,p) \leq f(x^2,p)$. Aus der Ungleichung $f(x,p) \leq f(x^1,p)$ folgt nun

$$\begin{aligned} \frac{p^\top x}{a^\top x} &\leq \frac{p^\top x^1}{a^\top x^1} \\ p^\top(x^1+x^2)a^\top x^1 &\leq p^\top x^1 a^\top(x^1+x^2) \\ p^\top x^2 a^\top x^1 &\leq p^\top x^1 a^\top x^2 \\ f(x^2,p) &\leq f(x^1,p). \end{aligned}$$

Auf analoge Weise impliziert $f(x,p) \leq f(x^2,p)$ die umgekehrte Umgleichung $f(x^2,p) \geq f(x^1,p)$. Somit gilt $f(x^1,p) = f(x^2,p)$. Aus der Umkehrung der obigen Rechnung unter Verwendung des Gleichheitszeichens erhalten wir demzufolge

$$f(x,p) = f(x^1,p) = f(x^2,p).$$

Wegen $p \in R(x)$ gilt für alle $y \in X$ somit entweder $p^\top y > b$ oder

$$f(x^1,p) = f(x^2,p) = f(x,p) \leq f(y,p).$$

Mit (6.5) erhalten wir also $p \in R(x^1)$ und $p \in R(x^2)$. Da $p \in R(x)$ beliebig gewählt wurde, folgt hieraus nun $R(x) \subseteq R(x^1) \cap R(x^2)$. □

Sei

$$I(x) := \{i \in \{1,\ldots,n\} : \; x_i > 0\}. \tag{6.6}$$

Dann gilt $(x - e^i) \in X$ für alle $x \in X \backslash \{\mathbf{0}\}$ und für alle Indizes $i \in I(x)$. Somit erhalten wir mit Hilfe von Lemma 6.1 das folgende Ergebnis.

**Lemma 6.2.** *Sei $x \in X$ mit $x \neq \mathbf{0}$. Dann gilt $R(x) \subseteq \bigcap_{i \in I(x)} R(e^i)$ und $f(x,p) = f(e^i,p)$ für alle $i \in I(x)$ und alle $p \in R(x)$.*

*Beweis.* Ist $x \in X$ ein Einheitsvektor, so ist die Behauptung offensichtlich. Wir nehmen im folgenden also an, dass dies nicht der Fall ist. Sei $i \in I(x)$ beliebig. Dann können wir $x$ in der Form $x = e^i + (x - e^i)$ schreiben. Wenn $x$ kein Einheitsvektor ist und $i \in I(x)$, gilt weiter $x - e^i \geq \mathbf{0}$ und $x - e^i \neq \mathbf{0}$. Außerdem gilt offensichtlich $x - e^i \leq \beta$. Demzufolge ist also $x - e^i \in X \backslash \{\mathbf{0}\}$. Durch Anwenden von Lemma 6.1 erhalten wir nun $R(x) \subseteq R(e^i)$ und $f(x,p) = f(e^i,p)$ für alle $p \in R(x)$. Da der Index $i \in I(x)$ beliebig gewählt wurde, gelten somit alle Behauptungen des Lemmas. □

Sei $x \in X$ mit $x \neq \mathbf{0}$. Dann gilt bekanntlich $f(x,p) = f(e^i,p)$ für alle Punkte $p \in R(x)$ und alle Indizes $i \in I(x)$ (Lemma 6.2). Demzufolge müssen wir den Punkt $x$ nur mit dem Nullvektor und mit allen zulässigen Einheitvektoren vergleichen, um die Menge $R(x)$ zu bestimmen. Es gilt somit das folgende Theorem.

**Theorem 6.3.** *Sei $x \in X \backslash \{\mathbf{0}\}$ und sei $i_0 \in I(x)$. Dann gilt*

$$\begin{aligned} R(x) = \{p \in Y \ : \quad & x^\top p \leq b,\ p_{i_0} a_i = p_i a_{i_0}\ \forall i \in I(x)\backslash\{i_0\}, \\ & (p_k a_{i_0} \geq p_{i_0} a_k\ \vee\ p_k > b)\ \forall k \notin I(x),\ p_{i_0} \leq M a_{i_0}\}. \end{aligned} \tag{6.7}$$

*Beweis.* „ $\subseteq$ ": Sei $p \in R(x)$. Dann gilt $x^\top p \leq b$ und $f(x,p) = f(e^i,p)$ für alle $i \in I(x)$ (Lemma 6.2). Hieraus folgt $f(e^{i_0},p) = f(e^i,p)$ für alle $i \in I(x)\backslash\{i_0\}$, d.h. es ist $p_{i_0} a_i = p_i a_{i_0}$ für alle Indizes $i \in I(x)\backslash\{i_0\}$.
Sei $k \notin I(x)$. Wegen $p \in R(x)$ gilt $p_k > b$ oder $f(x,p) = f(e^{i_0},p) \leq f(e^k,p)$ (siehe (6.5)). Dies impliziert $p_k > b$ oder $p_{i_0}/a_{i_0} \leq p_k/a_k$. Demzufolge gilt also

$$(p_k a_{i_0} \geq p_{i_0} a_k \ \text{ oder } \ p_k > b) \qquad \text{für alle } k \notin I(x).$$

Weiter ist $p_{i_0} \leq M a_{i_0}$ wegen $f(x,p) = f(e^{i_0},p) \leq f(\mathbf{0},p)$. Wir haben nun also gezeigt, dass die Menge $R(x)$ in der rechten Menge enthalten ist.

„ $\supseteq$ ": Angenommen, für einen Punkt $p \in Y$ gelten die Gleichungen und Ungleichungen der rechten Menge. Wir zeigen nun unter Verwendung von (6.5), dass $p \in R(x)$ gilt.
Aus den Gleichungen $a_i p_{i_0} = a_{i_0} p_i$ für alle $i \in I(x)$ folgt

$$0 = \sum_{i \in I(x)} x_i (p_i a_{i_0} - p_{i_0} a_i) = a_{i_0} p^\top x - p_{i_0} a^\top x.$$

Es gilt somit $f(x,p) = f(e^{i_0},p) = f(e^i,p)$ für alle $i \in I(x)$.

Sei $y \in X\backslash\{\mathbf{0}\}$ mit $p^\top y \leq b$. Dann gilt $p_j \leq b$ für alle Indizes $j \in I(y)$. Auf Grund der Voraussetzung folgt hieraus $p_j a_{i_0} \geq p_{i_0} a_j$ für alle $j \in I(y)$. Demzufolge ist

$$\begin{aligned} \sum_{j \in I(y)} y_j p_j a_{i_0} &\geq \sum_{j \in I(y)} y_j p_{i_0} a_j \\ a_{i_0} p^\top y &\geq p_{i_0} a^\top y \\ f(y,p) &\geq f(e^{i_0},p) = f(x,p). \end{aligned}$$

Außerdem gilt $f(x,p) = f(e^{i_0},p) \leq f(0,p)$ wegen $M a_{i_0} \geq p_{i_0}$. Wir erhalten somit $p^\top y > b$ oder $f(x,p) \leq f(y,p)$ für alle Punkte $y \in X$. Somit ist $p \in R(x)$ (siehe (6.5)). □

Der Index $i_0 \in I(x)$ in Theorem 6.3 kann beliebig gewählt werden, da die Bedingungen $f(x,p) = f(e^i,p)$ für alle $i \in I(x)$ und $p_{i_0} a_i = p_i a_{i_0}$ für alle $i \in I(x)$ zueinander äquivalent sind.

Sei $\bar{x} \in X$ mit $\bar{x}_i = \beta_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$ derjenige Punkt, für welchen alle Komponenten ihren maximalen Wert besitzen. Dann impliziert Lemma 6.1, dass $R(\bar{x}) \subseteq R(x)$ gilt für alle $x \neq \mathbf{0}$. Wenn wir also einen Punkt $p \in R(\bar{x})$ kennen, so können wir für jedes $x \in X \backslash \{\mathbf{0}\}$ ein Element des Stabilitätsbereichs $R(x)$ angeben. Es ist also für uns von Interesse, die Menge $R(\bar{x})$ näher zu untersuchen.

**Lemma 6.4.** *Sei $\bar{x}_i = \beta_i$, $i = 1, \ldots, n$. Dann gilt*

$$R(\bar{x}) = \left\{ p = t \cdot a : \ t \in \left[0, \min \left\{ \frac{b}{a^\top \bar{x}}, M, \min_{i=1,\ldots,n} \frac{u_i}{a_i} \right\} \right] \right\}.$$

*Beweis.* Aus Theorem 6.3 wissen wir bereits, dass

$$R(\bar{x}) = \{ p \in Y : \ \bar{x}^\top p \leq b, \ p_1 \leq M a_1, \ p_i a_1 = p_1 a_i \ \forall i = 2, \ldots, n \}$$

gilt. Somit müssen wir nur die angegebenen Bedingungen umformulieren. Unter Verwendung der Bedingungen $\sum_{i=1}^n \bar{x}_i p_i \leq b$ und $p_i = p_1 \frac{a_i}{a_1}$ erhalten wir die Bedingung $p_1 \sum_{i=1}^n \bar{x}_i \frac{a_i}{a_1} \leq b$ und somit $p_1 \leq \frac{b a_1}{a^\top \bar{x}}$. Sei $t := p_1 / a_1$. Dann ist $t \leq M$. Durch Substitution von $p_1 = t a_1$ erhalten wir nun $p_i = t a_i$, $i = 1, \ldots, n$, und $t \leq b / a^\top \bar{x}$. Aus $p \geq 0$ und $a > 0$ folgt $t \geq 0$. Weiter ist $t \leq u_i / a_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$ wegen $p_i \leq u_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$. Wir erhalten somit

$$R(\bar{x}) = \left\{ p = t \cdot a : \ t \in \left[0, \min \left\{ \frac{b}{a^\top \bar{x}}, M, \min_{i=1,\ldots,n} \frac{u_i}{a_i} \right\} \right] \right\}.$$

□

Wir haben bis jetzt nur Stabilitätsbereiche für Punkte $x \neq \mathbf{0}$ betrachtet. Im folgenden Theorem werden wir noch die Menge $R(\mathbf{0})$ charakterisieren.

**Theorem 6.5.** *Es gilt*

$$R(\mathbf{0}) = \{ p \in Y : \ (p_i > b \ \text{oder} \ p_i \geq M a_i) \quad \forall i = 1, \ldots, n \}.$$

*Beweis.* „ $\subseteq$ “: Sei $p \in R(\mathbf{0})$ beliebig. Dann gilt offensichtlich $p \in Y$ und $f(0, p) \leq f(e^i, p)$ oder $p_i > b$ für alle $i = 1, \ldots, n$. Somit sind die Ungleichungen der rechten Menge erfüllt.

„ $\supseteq$ “: Angenommen, für $p \in Y$ sind die Ungleichungen der rechten Menge erfüllt. Sei weiter $x \in X \backslash \{\mathbf{0}\}$ beliebig. Wir wollen nun zeigen, dass mindestens eine der Bedingungen $p^\top x > b$ und $f(\mathbf{0}, p) \leq f(x, p)$ erfüllt ist. Angenommen die erste Bedingung gilt nicht. Es sei also $p^\top x \leq b$. Dann gilt $p_i \leq b$ für alle Indizes $i \in I(x)$. Da die Ungleichungen der rechten Menge erfüllt sind, folgt hieraus $M a_i \leq p_i$ für alle $i \in I(x)$. Dies bedeutet, dass

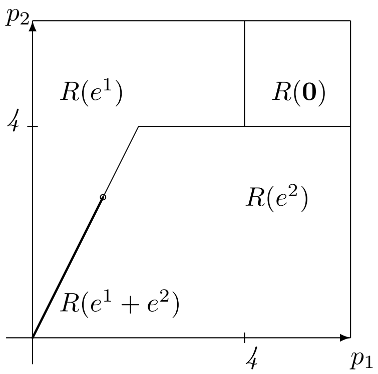
$$\sum_{i \in I(x)} x_i M a_i \leq \sum_{i \in I(x)} x_i p_i \quad \text{und somit} \quad M a^\top x \leq p^\top x$$

gilt. Wir erhalten also $f(\mathbf{0}, p) \leq f(x, p)$. Da $x \in X \backslash \{\mathbf{0}\}$ beliebig gewählt wurde, folgt somit $p \in R(\mathbf{0})$. □

**Beispiel 6.1.** *Seien $n = 2$, $a = (1,2)^\top$, $u = (6,6)^\top$, $\beta = (1,1)^\top$, $M = 6$ und $b = 4$. Dann erhalten wir aus Theorem 6.3, Lemma 6.4 und Theorem 6.5 die Stabiltitätsbereiche*

$$\begin{aligned} R(\mathbf{0}) &= \{p \in \mathbb{R}^2 : \; 4 < p_1 \leq 6,\, 4 < p_2 \leq 6\} \\ R(e^1 + e^2) &= \{p = ta : \; t \in [0, 4/3]\} \\ R(e^1) &= \{p \in \mathbb{R}^2 : \; 0 \leq p_1 \leq 4,\; (4 < p_2 \leq 6 \textit{ oder } 2p_1 \leq p_2 \leq 6)\} \\ R(e^2) &= \{p \in \mathbb{R}^2 : \; 0 \leq p_2 \leq 4,\; (4 < p_1 \leq 6 \textit{ oder } 0.5p_2 \leq p_1 \leq 6)\}. \end{aligned}$$

*Diese Stabilitätsbereiche werden in der nachfolgenden Abbildung dargestellt.*




*Wie man leicht sieht, sind die Stabilitätsbereiche im allgemeinen weder offen noch abgeschlossen. Außerdem sind sie nicht immer konvex.*

Da die Stabilitätsbereiche selbst im allgemeinen nicht abgeschlossen sind, sind wir an ihrer Abschließung interessiert. Diese werden wir unter anderem für die Berechnung der erweiterten Lösungsmengen benötigen (siehe Kapitel 2.4) und für die Berechnung der Mengen $\bar{L}(x)$ (siehe (2.24)).

Für den Nullvektor ist die Abschließung des Stabilitätsbereichs auf Grund von Theorem 6.5 offensichtlich

$$\operatorname{cl} R(\mathbf{0}) = \begin{cases} \emptyset & \text{für } R(\mathbf{0}) = \emptyset \\ \bigotimes_{i=1}^{n} [\min\{b, Ma_i\}, u_i] & \text{für } R(\mathbf{0}) \neq \emptyset. \end{cases} \tag{6.8}$$

Dabei gilt $R(\mathbf{0}) = \emptyset$ genau dann, wenn ein Index $i \in \{1, \ldots, n\}$ existiert mit $u_i \leq b$ und $u_i < Ma_i$ (siehe Theorem 6.5).

Im folgenden untersuchen wir die Mengen $\operatorname{cl} R(x)$ für alle Punkte $x \in X \backslash \{\mathbf{0}\}$. Dafür verwenden wir die Formel (6.7) aus Theorem 6.3. Zuerst formulieren wir die Formel für $R(x)$ um, indem wir für alle Indizes $i \in I(x) \backslash \{i_0\}$ die Variablen $p_i$ durch $p_i = p_{i_0} \frac{a_i}{a_{i_0}}$ ersetzen. Dadurch erhalten wir

$$p^\top x = \sum_{i \in I(x)} x_i p_i = p_{i_0} \sum_{i \in I(x)} x_i \frac{a_i}{a_{i_0}} = \frac{p_{i_0}}{a_{i_0}} a^\top x \leq b \quad \text{und} \quad p_{i_0} \frac{a_i}{a_{i_0}} \leq u_i.$$

Somit erfüllt die Variable $p_{i_0}$ die Bedingungen

$$0 \leq p_{i_0} \leq u_{i_0}, \quad p_{i_0} \leq M a_{i_0}, \quad p_{i_0} \leq \frac{b a_{i_0}}{a^\top x} \quad \text{und} \quad p_{i_0} \leq u_i \frac{a_{i_0}}{a_i}$$

für alle Indizes $i \in I(x)$. Außerdem gilt die Ungleichung $p_{i_0}/a_{i_0} \leq p_k/a_k$ für alle Indizes $k \notin I(x)$, für welche die Ungleichung $u_k \leq b$ erfüllt ist. Für diese Indizes gilt demzufolge auch $p_{i_0} \leq u_k \frac{a_{i_0}}{a_k}$. Somit erhalten wir

$$
\begin{aligned}
R(x) \;=\; \{p \in \mathbb{R}^n :\; & p_i = p_{i_0} \frac{a_i}{a_{i_0}} \;\forall i \in I(x) \backslash \{i_0\}, \\
& 0 \leq p_{i_0} \leq \min\{M a_{i_0}, \min_{i \in I(x)} u_i \frac{a_{i_0}}{a_i}, \min_{k \notin I(x): u_k \leq b} u_k \frac{a_{i_0}}{a_k}, \frac{b a_{i_0}}{a^\top x}\}, \\
& (p_{i_0} \frac{a_k}{a_{i_0}} \leq p_k \leq u_k \text{ oder } b < p_k \leq u_k) \;\forall k \notin I(x)\}.
\end{aligned} \tag{6.9}
$$

**Theorem 6.6.** *Seien $x \in X$ und $i_0 \in I(x)$ gegeben. Dann gilt*

$$
\begin{aligned}
\operatorname{cl} R(x) \quad = \quad \{p \in \mathbb{R}^n :\; & p_i = p_{i_0} \frac{a_i}{a_{i_0}} \;\; \textit{für alle } i \in I(x) \backslash \{i_0\}, \\
& p_{i_0} \in [0, \min\{M a_{i_0}, \min_{i \in I(x)} u_i \frac{a_{i_0}}{a_i}, \min_{k \notin I(x): u_k \leq b} u_k \frac{a_{i_0}}{a_k}, \frac{b a_{i_0}}{a^\top x}\}] \\
& p_k \in [p_{i_0} \frac{a_k}{a_{i_0}}, u_k] \qquad \textit{für alle } k \notin I(x) \textit{ mit } u_k \leq b, \\
& p_k \in [\min\{b, p_{i_0} \frac{a_k}{a_{i_0}}\}, u_k] \;\; \textit{für alle } k \notin I(x) \textit{ mit } u_k > b\}.
\end{aligned}
$$

*Beweis.* „ $\subseteq$ “: Sei $p \in \operatorname{cl} R(x)$ beliebig. Dann existiert eine Folge $\{p^l\} \subseteq R(x)$ mit $p = \lim_{l \to \infty} p^l$. Somit gilt

$$
\begin{aligned}
p_i^l = p_{i_0}^l \frac{a_i}{a_{i_0}} \;\forall i \in I(x) \backslash \{i_0\} \qquad & \forall l, \\
p_{i_0}^l \in [0, \min\{M a_{i_0}, \min_{i \in I(x)} u_i \frac{a_{i_0}}{a_i}, \min_{k \notin I(x): u_k \leq b} u_k \frac{a_{i_0}}{a_k}, \frac{b a_{i_0}}{a^\top x}\}] \qquad & \forall l, \\
(p_{i_0}^l \frac{a_k}{a_{i_0}} \leq p_k^l \leq u_k \;\text{ oder }\; b < p_k^l \leq u_k) \;\forall k \notin I(x) \qquad & \forall l.
\end{aligned}
$$

Wir lassen nun in diesen Gleichungen und Ungleichungen den Index $l$ gegen Unendlich streben. Dann folgt $p_i = p_{i_0} \frac{a_i}{a_{i_0}}$ für alle $i \in I(x) \backslash \{i_0\}$ und

$$
p_{i_0} \in [0, \min\{M a_{i_0}, \min_{i \in I(x)} u_i \frac{a_{i_0}}{a_i}, \min_{k \notin I(x): u_k \leq b} u_k \frac{a_{i_0}}{a_k}, \frac{b a_{i_0}}{a^\top x}\}].
$$

Gilt $u_k > b$ für einen Index $k \notin I(x)$, so erhalten wir $p_k^l \in [\min\{b, p_{i_0}^l \frac{a_k}{a_{i_0}}\}, u_k]$ für alle Indizes $l$ und somit $p_k \in [\min\{b, p_{i_0} \frac{a_k}{a_{i_0}}\}, u_k]$. Gilt $u_k \leq b$ für einen Index $k \notin I(x)$, so erhalten wir $p_k^l \in [p_{i_0}^l \frac{a_k}{a_{i_0}}, u_k]$ für alle Indizes $l$ und somit $p_k \in [p_{i_0} \frac{a_k}{a_{i_0}}, u_k]$. Der Punkt $p$ liegt demzufolge in der rechten Menge. Da $p \in \operatorname{cl} R(x)$ beliebig gewählt wurde, ist damit die Inklusion „ $\subseteq$ “ gezeigt.

„ $\supseteq$ “: Wir nehmen nun an, ein beliebig gewählter Punkt $p \in \mathbb{R}^n$ erfüllt alle Gleichungen und Ungleichungen der rechten Menge. Weiter sei $\bar{p} \in \mathbb{R}^n$ ein Punkt mit

$$\bar{p}_i := \begin{cases} p_i & \text{für} \quad i \in I(x) \\ p_i & \text{für} \quad i \notin I(x) \text{ mit } u_i \leq b \\ u_i & \text{für} \quad i \notin I(x) \text{ mit } u_i > b. \end{cases}$$

Wir wollen nun zeigen, dass $(1-\lambda)p + \lambda\bar{p} \in R(x)$ ist für alle $\lambda \in (0, 1]$. Wir müssen demzufolge die Gültigkeit von allen Gleichungen und Ungleichungen in Formel (6.9) überprüfen.

Offensichtlich gilt $p_i = (1-\lambda)p_i + \lambda\bar{p}_i$ für alle $\lambda \in (0, 1]$ und für alle Indizes $i \in I(x)$ und $i \notin I(x)$ mit $u_i \leq b$. Demzufolge gelten für diese Indizes auch die entsprechenden Gleichungen bzw. Ungleichungen in der Formel (6.9).

Sei beliebiger Index $k \notin I(x)$ mit $u_k > b$ gegeben. Dann ist $\bar{p}_k = u_k > b$. Wir unterscheiden nun die Fälle $b \leq p_k \leq u_k$ und $p_{i_0}\frac{a_k}{a_{i_0}} \leq p_k \leq u_k$. Im Fall $b \leq p_k \leq u_k$ gilt

$$(1-\lambda)p_k + \lambda\bar{p}_k \geq (1-\lambda)b + \lambda b = b.$$

Angenommen, es ist $p_{i_0}\frac{a_k}{a_{i_0}} \leq p_k \leq u_k$. Dann gilt wegen $\bar{p}_k = u_k$

$$(1-\lambda)p_k + \lambda\bar{p}_k \geq (1-\lambda)p_{i_0}\frac{a_k}{a_{i_0}} + \lambda p_{i_0}\frac{a_k}{a_{i_0}} = p_{i_0}\frac{a_k}{a_{i_0}}.$$

Die Gültigkeit der Ungleichung $(1-\lambda)p_k + \lambda\bar{p}_k \leq u_k$ ist offensichtlich. Somit haben wir also $(1-\lambda)p_k + \lambda\bar{p}_k \in R(x)$ gezeigt für alle $\lambda \in (0, 1]$. Hieraus folgt nun $p \in \operatorname{cl} R(x)$. □

## 6.3 Eigenschaften der Stabilitätsbereiche

Im Beispiel 6.1 haben wir bereits gezeigt, dass die Stabilitätsbereiche im allgemeinen weder offen noch abgeschlossen sind. Vor allem aber sind sie nicht immer konvex. Deswegen soll gezeigt werden, dass die Stabilitätsbereiche zumindest sternförmig sind. Außerdem sind das relativ Innere und die Dimension der Mengen von Interesse.

Wir beginnen unsere Betrachtungen mit der Berechnung des relativ Inneren und der Dimension der Stabilitätsbereiche.

**Theorem 6.7.** *Sei ein Punkt $x \in X\backslash\{\mathbf{0}\}$ gegeben und ein Index $i_0 \in I(x)$. Dann ist das relativ Innere des zugehörigen Stabilitätsbereichs*

$$\begin{aligned} \operatorname{ri} R(x) \;=\; \{p \in \mathbb{R}^n :\; & p_i = p_{i_0}\frac{a_i}{a_{i_0}} \quad \textit{für alle } i \in I(x)\backslash\{i_0\}, \\ & 0 < p_{i_0} < \min\{Ma_{i_0}, \min_{i \in I(x)} u_i\frac{a_{i_0}}{a_i}, \min_{k \notin I(x): u_k \leq b} u_k\frac{a_{i_0}}{a_k}, \frac{ba_{i_0}}{a^\top x}\}, \\ & (p_{i_0}\frac{a_k}{a_{i_0}} < p_k < u_k \quad \textit{oder} \quad b < p_k < u_k) \quad \textit{für alle } k \notin I(x)\}. \end{aligned} \tag{6.10}$$

*Außerdem ist die Dimension des Stabilitätsbereichs*

$$\dim R(x) = n + 1 - \operatorname{card}(I(x)).$$

*Beweis.* Sei ein Punkt $x \in X \backslash \{\mathbf{0}\}$ gegeben und ein Index $i_0 \in I(x)$.

Wir betrachten zunächst die Formel (6.9) für den Stabilitätsbereich $R(x)$. In dieser Formel gibt es $\operatorname{card}(I(x)) - 1$ Gleichheitsbedingungen für die Punkte $p \in R(x)$. Wir müssen somit nun zeigen, dass die Vektoren $a_{i_0} e^i - a_i e^{i_0}$ linear unabhängig sind. Wir untersuchen also die Gleichung

$$\sum_{j \in I(x) \backslash \{i_0\}} \lambda_j (a_{i_0} e^j - a_j e^{i_0}) = 0.$$

Indem wir diese Gleichung für alle Indizes $j \in I \backslash \{i_0\}$ von links mit $e^{j\top}$ multiplizieren, erhalten wir $\lambda_j a_{i_0} = 0$ für alle $j \in I(x) \backslash \{i_0\}$. Aus $a > 0$ folgt somit $\lambda_j = 0$ für alle $j \in I(x) \backslash \{i_0\}$, d.h. die Vektoren $a_{i_0} e^i - a_i e^{i_0}$ sind linear unabhängig. Aus der linearen Unabhängigkeit dieser Vektoren folgt nun $\dim R(x) \leq n + 1 - \operatorname{card}(I(x))$. Außerdem gilt somit für die affine Hülle von $R(x)$

$$\operatorname{aff} R(x) \subseteq \{p \in \mathbb{R}^n : \; p_{i_0} a_i = p_i a_{i_0} \; \forall i \in I \backslash \{i_0\}\}.$$

Im Fall $I(x) = \{1, 2, \ldots, n\}$ sind nun die Behauptungen des Theorems offensichtlich. Angenommen es ist $I(x) \neq \{1, 2, \ldots, n\}$. Dann sei

$$\bar{p} := \frac{1}{2} a \cdot \min \left\{ \frac{b}{a^\top x}, M, \min_{i=1,\ldots,n} \frac{u_i}{a_i} \right\}.$$

Aus Lemma 6.4 und Lemma 6.1 folgt nun $\bar{p} \in R(x)$. Weiter gilt offensichtlich $\bar{p}_i a_{i_0} = \bar{p}_{i_0} a_i$ für alle $i \in I(x)$, $x^\top \bar{p} < b$, $M a_i > \bar{p}_i$ und $u_i > \bar{p}_i > 0$ für alle Indizes $i = 1, \ldots, n$. Als nächstes betrachten wir einen Punkt $p \in \mathbb{R}^n$ mit

$$p_i := \begin{cases} \bar{p}_i & \text{für alle } i \in I(x) \\ \frac{1}{2}(\bar{p}_i + u_i) & \text{für alle } i \notin I(x) \end{cases}.$$

Dann gilt $p_i a_{i_0} = p_{i_0} a_i$ für alle $i \in I(x)$, $x^\top p < b$, $M a_i > p_i$ und $u_i > p_i > 0$ für alle $i \in I(x)$. Außerdem gilt

$$p_{i_0} \frac{a_k}{a_{i_0}} = \bar{p}_{i_0} \frac{a_k}{a_{i_0}} = \bar{p}_k < p_k < u_k$$

für alle Indizes $k \notin I(x)$. Hieraus folgt nun $p \in R(x)$. Dabei sind alle Ungleichungen in Formel (6.9) als strenge Ungleichungen erfüllt. Demzufolge ist also $\dim R(x) = n + 1 - \operatorname{card}(I(x))$ und

$$\operatorname{aff} R(x) = \{p \in \mathbb{R}^n : \; p_{i_0} a_i = p_i a_{i_0} \; \text{ für alle } i \in I(x) \backslash \{i_0\}\}.$$

Die Formel für die Menge $\operatorname{ri} R(x)$ ist nun eine offensichtliche Folgerung hieraus. $\square$

**Bemerkungen:**

1. Für alle Einheitsvektoren $e^i$ besitzen die Stabilitätsbereiche ein nichtleeres Inneres $\operatorname{int} R(e^i) \neq \emptyset$.

2. Bekanntlich ist
$$R(\mathbf{0}) = \{p \in \mathbb{R}^n : \; b < p_i \leq u_i \text{ or } Ma_i \leq p_i \leq u_i \quad \forall i = 1, \ldots, n\}$$
(Theorem 6.5). Angenommen es ist $R(\mathbf{0}) \neq \emptyset$. Dann gilt $\dim R(\mathbf{0}) = n$ offensichtlich genau dann, wenn für alle Indizes $i = 1, \ldots, n$ mindestens eine der Ungleichungen $b < u_i$ bzw. $Ma_i < u_i$ erfüllt ist.

Weiter benötigen wir für die Betrachtung von Optimalitätsbedingungen im pessimistischen Fall das folgende Lemma.

**Lemma 6.8.** *Sei ein Punkt $p \in R(\mathbf{0})$ gegeben und sei $\operatorname{int} R(\mathbf{0}) = \emptyset$. Dann existiert ein Index $i \in \{1, \ldots, n\}$ mit $p \in R(e^i)$.*

*Beweis.* Angenommen es gilt $p \in R(\mathbf{0})$ und $\operatorname{int} R(\mathbf{0}) = \emptyset$. Dann ist offenbar $\dim R(\mathbf{0}) < n$. Demzufolge existiert ein Index $i$ mit $b \geq u_i$ und $Ma_i \geq u_i$. Für diesen Index gilt $b < u_i$ oder $Ma_i \leq p_i \leq u_i$ wegen $p \in R(\mathbf{0})$. Somit ist $p_i = Ma_i = u_i \leq b$. Wegen $p \in R(\mathbf{0})$ gilt außerdem $b < p_j \leq u_j$ oder $p_i \frac{a_j}{a_i} = Ma_j \leq p_j \leq u_j$ für alle Indizes $j \neq i$. Hieraus folgt nun $p \in R(e^i)$. $\square$

Wir wissen bereits, dass die Mengen $\operatorname{cl} R(x)$ im allgemeinen nicht konvex sind. Um dennoch gut mit den Stabilitätsbereichen arbeiten zu können, zeigen wir im folgenden, dass die Mengen $\operatorname{cl} R(x)$ sternförmig sind.

**Definition 6.1.** *Eine Menge $M$ heißt sternförmig mit einem Zentrum $a \in M$ genau dann, wenn für alle $x \in M$ und alle $\lambda \in [0; 1]$*
$$\lambda x + (1 - \lambda)a \in M \qquad \textit{gilt.}$$

Um die Sternförmigkeit der Mengen $\operatorname{cl} R(x)$ zu zeigen, beweisen wir zunächst das folgende Lemma.

**Lemma 6.9.** *Sei ein Punkt $x \in X \backslash \{\mathbf{0}\}$ gegeben und ein Index $i_0 \in I(x)$. Weiter seien $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$ reelle Zahlen mit*
$$0 \leq l_1 < l_2 \leq \min \left\{ Ma_{i_0}, \frac{ba_{i_0}}{a^\top x}, \min_{i \in I(x)} \frac{u_i a_{i_0}}{a_i}, \min_{i \notin I(x): u_i \leq b} \frac{u_i a_{i_0}}{a_i} \right\}.$$
*Dann existiert ein Punkt $\bar{p} \in \operatorname{ri} R(x)$ mit $\bar{p}_{i_0} \in (l_1; l_2)$, so dass*
$$p^\lambda := \lambda \bar{p} + (1 - \lambda)p \in \operatorname{ri} R(x) \quad \textit{gilt und} \quad p^\lambda_{i_0} \in (l_1; l_2)$$
*für alle $\lambda \in (0; 1)$ und alle Punkte $p \in \operatorname{cl} R(x)$ mit $p_{i_0} \in [l_1, l_2]$.*

*Beweis.* Offensichtlich gilt

$$l_1 < \min\{\frac{u_i a_{i_0}}{a_i} : i \notin I(x) \text{ mit } b < u_i \text{ und } l_1 < \frac{u_i a_{i_0}}{a_i}\}.$$

Dann existiert eine reelle Zahl $\bar{p}_{i_0}$ mit

$$l_1 < \bar{p}_{i_0} < \min\left\{l_2, \min\{\frac{u_i a_{i_0}}{a_i} : i \notin I(x) \text{ mit } b < u_i \text{ und } l_1 < \frac{u_i a_{i_0}}{a_i}\}\right\}.$$

Hieraus konstruieren wir nun einen Punkt $\bar{p} \in \mathbb{R}^n$ mit

$$\bar{p}_i := \begin{cases} \bar{p}_{i_0}\frac{a_i}{a_{i_0}} & \text{für alle } i \in I(x) \\ 0.5(\bar{p}_{i_0}\frac{a_i}{a_{i_0}} + u_i) & \text{für alle } i \notin I(x) \text{ mit } b \geq u_i \\ 0.5(b + u_i) & \text{für alle } i \notin I(x) \text{ mit } b < u_i,\ l_1 \geq u_i\frac{a_{i_0}}{a_i} \\ 0.5(u_i + \max\{b, \bar{p}_{i_0}\frac{a_i}{a_{i_0}}\}) & \text{für alle } i \notin I(x) \text{ mit } b < u_i,\ l_1 < u_i\frac{a_{i_0}}{a_i}. \end{cases}$$

Wir wollen nun zeigen, dass $\bar{p} \in \operatorname{ri} R(x)$ und $\bar{p}_{i_0} \in (l_1; l_2)$ gilt.

Die Eigenschaft $\bar{p}_{i_0} \in (l_1; l_2)$ folgt offensichtlich aus der Definition von $\bar{p}_{i_0}$. Weiter gilt $0 < b < \bar{p}_i < u_i$ für alle Indizes $i \notin I(x)$ mit $b < u_i$. Für alle anderen Indizes $i$ folgt $0 < \bar{p}_{i_0}\frac{a_i}{a_{i_0}} < u_i$ aus der Ungleichung $0 \leq l_1 < \bar{p}_{i_0} < u_i\frac{a_{i_0}}{a_i}$ und somit $0 < \bar{p}_i < u_i$. Demzufolge ist $0 < \bar{p}_i < u_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$. Weiter folgt aus der Definition von $\bar{p}$ offensichtlich $\bar{p}_{i_0}\frac{a_i}{a_{i_0}} = \bar{p}_i$ für alle Indizes $i \in I(x)$, $\bar{p}_{i_0}\frac{a_i}{a_{i_0}} < \bar{p}_i$ für alle Indizes $i \notin I(x)$ mit $u_i \leq b$ und $b < \bar{p}_i$ für alle Indizes $i \notin I(x)$ mit $b < u_i$. Außerdem ist

$$\bar{p}_{i_0} < \min\left\{Ma_{i_0}, \frac{ba_{i_0}}{a^\top x}, \min_{i \in I(x)} \frac{u_i a_{i_0}}{a_i}, \min_{i \notin I(x): u_i \leq b} \frac{u_i a_{i_0}}{a_i}\right\}$$

wegen $\bar{p}_{i_0} < l_2$. Aus Theorem 6.7 folgt somit $\bar{p} \in \operatorname{ri} R(x)$.

Seien nun ein beliebiger Punkt $p \in \operatorname{cl} R(x)$ mit $p_{i_0} \in [l_1; l_2]$ und eine beliebige reelle Zahl $\lambda \in (0; 1)$ gegeben. Sei weiter $p^\lambda := \lambda\bar{p} + (1 - \lambda)p$. Wir wollen nun $p^\lambda \in \operatorname{ri} R(x)$ und $p^\lambda_{i_0} \in (l_1; l_2)$ zeigen. Dazu verwenden wir Formel (6.10).

Aus $0 < \bar{p}_i < u_i$ und $0 \leq p_i \leq u_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$ folgt offensichtlich $0 < p^\lambda_i < u_i$ für alle Indizes $i = 1, \ldots, n$. Außerdem erhalten wir $p^\lambda_{i_0} \in (l_1; l_2)$ aus $\bar{p}_{i_0} \in (l_1; l_2)$ und $p_{i_0} \in [l_1, l_2]$. Weiter gilt auf Grund von

$$\begin{aligned} \bar{p}_{i_0} &< \min\left\{Ma_{i_0}, \frac{ba_{i_0}}{a^\top x}, \min_{i \in I(x)} \frac{u_i a_{i_0}}{a_i}, \min_{i \notin I(x): u_i \leq b} \frac{u_i a_{i_0}}{a_i}\right\} \text{ und} \\ p_{i_0} &\leq \min\left\{Ma_{i_0}, \frac{ba_{i_0}}{a^\top x}, \min_{i \in I(x)} \frac{u_i a_{i_0}}{a_i}, \min_{i \notin I(x): u_i \leq b} \frac{u_i a_{i_0}}{a_i}\right\} \text{ die Ungleichung} \\ p^\lambda_{i_0} &< \min\left\{Ma_{i_0}, \frac{ba_{i_0}}{a^\top x}, \min_{i \in I(x)} \frac{u_i a_{i_0}}{a_i}, \min_{i \notin I(x): u_i \leq b} \frac{u_i a_{i_0}}{a_i}\right\}. \end{aligned}$$

Für alle Indizes $i \in I(x)$ ist

$$p^\lambda_i = \lambda\bar{p}_i + (1 - \lambda)p_i = \lambda\bar{p}_{i_0}\frac{a_i}{a_{i_0}} + (1 - \lambda)p_{i_0}\frac{a_i}{a_{i_0}} = p^\lambda_{i_0}\frac{a_i}{a_{i_0}}.$$

Sei nun ein beliebiger Index $k \notin I(x)$ gegeben. Wir unterscheiden dann 3 Fälle.

1. Fall: Angenommen es ist $u_k \leq b$. Dann gilt $p_{i_0} \frac{a_k}{a_{i_0}} \leq p_k$ und $\bar{p}_{i_0} \frac{a_k}{a_{i_0}} < \bar{p}_k$. Hieraus folgt offensichtlich $p^\lambda_{i_0} \frac{a_k}{a_{i_0}} < p^\lambda_k$.

2. Fall: Angenommen es gilt $u_k > b$ und $l_1 \geq u_k \frac{a_{i_0}}{a_k}$. Dann ist $p_{i_0} \frac{a_k}{a_{i_0}} \geq l_1 \frac{a_k}{a_{i_0}} \geq u_k$ und somit $b \leq p_k$. Wegen $b < \bar{p}_k$ folgt nun $b < p^\lambda_k$.

3. Fall: Angenommen es gilt $u_k > b$ und $l_1 < u_k \frac{a_{i_0}}{a_k}$. Dann ist $b < \bar{p}_k$ und $\bar{p}_{i_0} \frac{a_k}{a_{i_0}} < \bar{p}_k$. Gilt also $b \leq p_k$, so folgt daraus $b < p^\lambda_k$, und gilt $p_{i_0} \frac{a_k}{a_{i_0}} \leq p_k$, so erhalten wir $p^\lambda_{i_0} \frac{a_k}{a_{i_0}} < p^\lambda_k$.
Somit haben wir nun $p^\lambda \in \operatorname{ri} R(x)$ und $p^\lambda_{i_0} \in (l_1; l_2)$ gezeigt (siehe Formel (6.10)). $\square$

**Folgerung 6.10.** *Die Menge* $\operatorname{cl} R(x)$ *ist sternförmig für alle* $x \in X$*. Außerdem existiert ein Zentrum* $\bar{p} \in \operatorname{ri} R(x)$ *mit* $\lambda\bar{p} + (1-\lambda)p \in \operatorname{ri} R(x)$ *für alle* $p \in \operatorname{cl} R(x)$ *und für alle* $\lambda \in (0; 1)$.

*Beweis.* Für $x = \mathbf{0}$ folgt die Behauptung direkt aus Theorem 6.5 und Formel (6.8). Für $x \neq \mathbf{0}$ erhalten wir Behauptung aus Theorem 6.6 und Lemma 6.9 mit $l_1 = 0$ und $l_2 = \min\left\{ M a_{i_0}, \frac{b a_{i_0}}{a^\top x}, \min_{i \in I(x)} \frac{u_i a_{i_0}}{a_i}, \min_{i \notin I(x): u_i \leq b} \frac{u_i a_{i_0}}{a_i} \right\}$. $\square$

## 6.4 Die Lösungsmengen $\Psi(p)$

In diesem Kapitel wollen wir eine explizite Beschreibung der Lösungsmenge $\Psi(p)$ für alle Punkte $p \in Y$ angeben. Wir können bereits für alle Punkte $x \in X$ den zugehörigen Stabilitätsbereich $R(x)$ angeben. Wegen $\Psi(p) = \{x \in X : p \in R(x)\}$ (siehe (2.9)) ist es somit möglich, die Mengen $\Psi(p)$ anhand der Stabilitätsbereiche zu bestimmen.

Um also zu überprüfen, ob für zwei gegebene Punkte $p$ und $x$ die Beziehung $x \in \Psi(p)$ gilt, kann man die Gültigkeit von $p \in R(x)$ testen. Dennoch ist es nicht sinnvoll, dies für alle $x \in X$ zu tun, um $\Psi(p)$ zu bestimmen. Anstatt dessen werden wir die folgenden Lemmas verwenden. Zunächst erhalten wir in Analogie zu Lemma 6.1 das folgende Lemma.

**Lemma 6.11.** *Sei* $p \in Y$ *und* $x \in X \backslash \{\mathbf{0}\}$.

1. *Angenommen es gilt* $x = x^1 + x^2$ *für zwei Punkte* $x^1, x^2 \in X \backslash \{\mathbf{0}\}$*. Sei weiter* $x \in \Psi(p)$*. Dann folgt* $x^1 \in \Psi(p)$ *und* $x^2 \in \Psi(p)$.
2. *Aus* $x \in \Psi(p)$ *folgt* $e^i \in \Psi(p)$ *für alle Indizes* $i \in I(x)$.

*Beweis.* 1.) Sei $x \in \Psi(p)$. Dann gilt $p \in R(x)$. Aus Lemma 6.1 erhalten wir somit $p \in R(x^1)$ und $p \in R(x^2)$. Hieraus folgt nun $x^1 \in \Psi(p)$ und $x^2 \in \Psi(p)$.

2.) Sei $x \in X\backslash\{\mathbf{0}\}$ mit $x \in \Psi(p)$. Dann gilt $p \in R(x)$. Aus Lemma 6.2 folgt somit $p \in R(e^i)$ für alle Indizes $i \in I(x)$. Demzufolge ist $e^i \in \Psi(p)$ für alle Indizes $i \in I(x)$. □

Mit Hilfe von Lemma 6.11 und in Analogie zu Lemma 6.2 können wir nun zeigen, dass jeder Punkt $x \neq \mathbf{0}$ genau dann optimal ist, wenn er zulässig ist und alle Einheitsvektoren $e^i$ mit $i \in I(x)$ optimal sind.

**Lemma 6.12.** *Sei $x \in X\backslash\{\mathbf{0}\}$ und $p \in Y$. Dann gilt $x \in \Psi(p)$ genau dann, wenn $p^\top x \leq b$ und $e^i \in \Psi(p)$ gelten für alle Indizes $i \in I(x)$.*

*Beweis.* Sei $x \in \Psi(p)$. Dann ist $x$ eine zulässige Lösung für $p \in Y$, d.h. es ist $x^\top p \leq b$. Die Eigenschaften $e^i \in \Psi(p)$ für alle Indizes $i \in I(x)$ folgen aus Lemma 6.11.

Sei $e^i \in \Psi(p)$ für alle Indizes $i \in I(x)$ und sei $p^\top x \leq b$. Dann gilt $p \in \bigcap_{i \in I(x)} R(e^i)$. Wir wollen nun $p \in R(x)$ und somit $x \in \Psi(p)$ zeigen.

Aus $p \in R(e^i)$ für alle Indizes $i \in I(x)$ folgt $f(e^{i_0}, p) = f(e^i, p)$ für alle Indizes $i \in I(x)\backslash\{i_0\}$ mit $i_0 \in I(x)$. Demzufolge gilt

$$\begin{aligned} p_i a_{i_0} &= p_{i_0} a_i \\ \sum_{i \in I(x)} x_i p_i a_{i_0} &= \sum_{i \in I(x)} x_i p_{i_0} a_i \\ a_{i_0} p^\top x &= p_{i_0} a^\top x \\ f(x,p) &= f(e^{i_0}, p). \end{aligned}$$

Wegen $p \in R(e^{i_0})$ erhalten wir also ($p^\top y > b$ oder $f(x,p) = f(e^{i_0}, p) \leq f(y,p)$) für alle Punkte $y \in X$. Zusammen mit den Voraussetzungen $p \in Y$ und $p^\top x \leq b$ folgt somit $x \in \Psi(p)$. □

Auf Grund von Lemma 6.12 ist es für uns wichtig zu wissen, welche der Einheitsvektoren in der Lösungsmenge liegen. Außerdem interessiert uns, wann der Nullvektor optimal ist.

**Lemma 6.13.** *Sei ein Punkt $p \in Y$ gegeben. Weiter seien*

$$\begin{aligned} J(p) &:= \{i \in \{1, \ldots, n\} : \ p_i \leq \min\{b, M a_i\}\} \qquad \textit{und} \\ \bar{J}(p) &:= \{j \in \{1, \ldots, n\} : \ e^j \in \Psi(p)\}. \end{aligned}$$

*Dann gelten die folgenden Behauptungen.*

1. *Sei $J(p) \neq \emptyset$. Dann ist*

$$\bar{J}(p) = \{j \in J(p) : \ \frac{p_j}{a_j} = \min_{i \in J(p)} \frac{p_i}{a_i}\}.$$

2. *Die Aussagen $J(p) = \emptyset$, $\bar{J}(p) = \emptyset$ und $\Psi(p) = \{\mathbf{0}\}$ sind zueinander äquivalent.*

3. *Es ist $\mathbf{0} \in \Psi(p)$ genau dann, wenn $J(p) = \emptyset$ oder wenn $p_i = Ma_i$ für alle Indizes $i \in J(p)$ gilt.*

*Beweis.* 1. „ $\subseteq$ “: Sei $j \in \bar{J}(p)$ beliebig. Dann gilt $e^j \in \Psi(p)$ und somit $p \in R(e^j)$. Hieraus folgt $j \in J(p)$ und $f(e^j, p) \leq f(e^i, p)$ für alle Indizes $i \in J(p)$. Demzufolge ist

$$\frac{p_j}{a_j} = \min_{i \in J(p)} \frac{p_i}{a_i}.$$

„ $\supseteq$ “: Sei $j \in J(p)$ beliebig und sei $\frac{p_j}{a_j} = \min_{i \in J(p)} \frac{p_i}{a_i}$. Dann gilt

$$p_j \leq \min\{b, Ma_j\} \quad \text{und} \quad f(e^j, p) \leq f(e^i, p)$$

für alle Indizes $i \in J(x)$. Weiter erhalten wir für alle Indizes $i \notin J(p)$

$$p_i > b \quad \text{oder} \quad p_i > Ma_i = Ma_j \frac{a_i}{a_j} \geq p_j \frac{a_i}{a_j}.$$

Hieraus folgt nun $p \in R(e^j)$, d.h. es ist $j \in \bar{J}(p)$.

2. Angenommen es gilt $J(p) = \emptyset$. Dann sind alle Einheitsvektoren unzulässig oder sie haben einen schlechteren Zielfunktionswert als $\mathbf{0}$. Somit ist kein Einheitsvektor in der Lösungsmenge, d.h. es ist $\bar{J}(p) = \emptyset$. Aus $\bar{J}(p) = \emptyset$ folgt nun, dass wegen Lemma 6.12 kein $x \neq \mathbf{0}$ in der Lösungsmenge ist. Also gilt $\Psi(p) = \{\mathbf{0}\}$. Sei $\Psi(p) = \{\mathbf{0}\}$. Dann ist $J(p) = \emptyset$ offensichtlich. Somit sind die Aussagen zueinander äquivalent.

3. Es gilt $\mathbf{0} \in \Psi(p)$ genau dann, wenn $p \in R(\mathbf{0})$ ist. Wegen Theorem 6.5 gilt dies genau dann, wenn $b < p_i \leq u_i$ oder $Ma_i \leq p_i \leq u_i$ gelten für alle Indizes $i = 1, \ldots, n$. Dies ist wiederum genau dann der Fall, wenn $J(p) = \emptyset$ oder $Ma_i = p_i$ gilt für alle $i \in J(p)$ .

□

Hieraus erhalten wir die folgende Folgerung.

**Folgerung 6.14.** *Sei ein Punkt $x \in X \backslash \{\mathbf{0}\}$ gegeben und ein Punkt $p \in \operatorname{ri} R(x)$. Dann gilt $I(x) = \bar{J}(p)$.*

*Proof.* Sei $i \in I(x)$ beliebig. Dann folgt $p \in R(e^i)$ aus $p \in R(x)$. Also ist $e^i \in \Psi(p)$, d.h. $i \in \bar{J}(p)$. Es gilt somit $I(x) \subseteq \bar{J}(p)$ und folglich auch $\bar{J}(p) \neq \emptyset$.

Sei ein beliebiger Index $k \in \{1, \ldots, n\}$ gegeben mit $k \notin I(x)$. Dann gilt $b < p_k$ oder $p_{i_0}/a_{i_0} < p_k/a_k$ wegen Theorem 6.7 und wegen $p \in \operatorname{ri} R(x)$. Dann folgt aber $k \notin \bar{J}(p)$ aus Lemma 6.13 und $\bar{J}(p) \neq \emptyset$. Somit ist $I(x) \supseteq \bar{J}(p)$, d.h. es gilt Gleichheit der Indexmengen. □

Um eine Menge $\Psi(p)$ für einen Punkt $p \in Y$ zu berechnen, bestimmen wir zunächst die Indexmenge $\bar{J}(p)$ durch Ordnen aller Indizes $i \in J(p)$ hinsichtlich des Wertes $p_i/a_i$. Danach müssen wir nur noch den Nullvektor betrachten und alle zulässigen Summen finden. Dabei ist $X = \{x \in \mathbb{Z}_+^n : \ x_i \leq \beta_i \ \forall i\}$ zu beachten (siehe (6.3)). Wir können somit den folgenden Algorithmus verwenden.

**Algorithmus 6.1.** *Eingabe:* $p \in Y$

1. *Bestimme die Menge* $J(p) := \{i \in \{1, \ldots, n\} : \ p_i \leq \min\{b, Ma_i\}\}$. *Gilt* $J(p) = \emptyset$, *so setze* $S := \{\mathbf{0}\}$; *sonst bestimme die Indexmenge*

$$\bar{J}(p) := \{j \in J(p) : \ \frac{p_j}{a_j} = \min_{i \in J(p)} \frac{p_i}{a_i}\}.$$

2. *Gilt* $J(p) \neq \emptyset$, *so setze* $S := T := \{e^i : \ i \in \bar{J}(p)\}$. *Solange* $T \neq \emptyset$ *ist, gehe wie folgt vor:*
   (a) *Setze* $T_{neu} := \emptyset$.
   (b) *Für alle Punkte* $x \in T$ *und alle Indizes* $j \in \bar{J}(p)$ *setze* $S := \{x+e^i\} \cup S$ *und* $T_{neu} := \{x + e^i\} \cup T_{neu}$ *falls die Bedingungen* $x_i < \beta_i$ *und* $p^\top(x + e^i) \leq b$ *erfüllt sind.*
   (c) *Setze* $T := T_{neu}$.
3. *Gilt* $p_i = Ma_i$ *für alle Indizes* $i \in \bar{J}(p)$, *so setze* $S := S \cup \{\mathbf{0}\}$.

   *Ausgabe:* $S$

**Theorem 6.15.** *Angenommen für einen Punkt* $p \in Y$ *wird mit Algorithmus 6.1 eine Menge* $S$ *berechnet. Dann gelten die folgenden Behauptungen.*

1. *Wird der Schritt (2) in Algorithmus 6.1 das m-te mal durchlaufen, so werden alle Punkte* $x \in \Psi(p)$ *berechnet mit* $\sum_{i=1}^n x_i = m + 1$.
2. *Die berechnete Menge* $S$ *entspricht der Lösungsmenge* $\Psi(p)$.
3. *Der Algorithmus ist endlich.*

*Beweis.* Gilt $J(p) = \emptyset$, so sind wegen Lemma 6.13 die Behauptungen des Theorems offensichtlich erfüllt. Sei also im folgenden $J(p) \neq \emptyset$. Außerdem sei $T_0 := \{e^i : \ i \in \bar{J}(p)\}$ und sei $T_k$ die Menge aller Punkte, die beim k-ten Durchlaufen von Schritt (2) berechnet werden. Wir wollen nun zeigen, dass $T_k = \{x \in \Psi(p) : \ \sum_{i=1}^n x_i = k + 1\}$ gilt. Dazu verwenden wir die Methode der vollständigen Induktion. Im Fall $k = 0$ folgt die Behauptung aus Lemma 6.13. Wir nehmen nun an, dass die Behauptung für $k - 1$ gilt.

„ $\subseteq$ “: Sei $x \in T_k$ beliebig. Dann existiert ein Punkt $x' \in T_{k-1}$ und ein Einheitsvektor $e^{i_0} \in T_0$ mit $x = x' + e^{i_0}$ und $x'_{i_0} < \beta_{i_0}$, $x^\top p \leq b$. Auf Grund der Induktionsvoraussetzung gilt nun $x' \in \Psi(p)$ und $\sum_{i=1}^n x'_i = k$. Wegen $x' \in \Psi(p)$

gilt natürlich auch $x' \in X$. Zusammen mit $x'_{i_0} < \beta_{i_0}$ erhalten wir somit $x \in X$. Aus $x' \in \Psi(p)$, $e^{i_0} \in \Psi(p)$, $p^\top x \leq b$ und Lemma 6.13 folgt nun $x \in \Psi(p)$. Außerdem ist

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1 + \sum_{i=1}^{n} x'_i = k + 1.$$

Somit gilt $x \in \{x \in \Psi(p) : \sum_{i=1}^{n} x_i = k+1\}$.

„ $\supseteq$ ": Sei $x \in \Psi(p)$ mit $\sum_{i=1}^{n} x_i = k+1$. Dann folgt $i \in \bar{J}(p)$ für alle Indizes $i \in I(x)$ wegen Lemma 6.12. Sei nun $i_0 \in I(x)$ und sei $x' := x - e^{i_0}$. Dann gilt $x'_{i_0} < x_{i_0} \leq \beta_{i_0}$ und $x^\top p \leq b$. Außerdem gilt

$$\sum_{i=1}^{n} x'_i = \sum_{i=1}^{n} x_i - 1 = k \quad \text{und} \quad x' \in \Psi(p)$$

wegen Lemma 6.11. Auf Grund der Induktionsvoraussetzung gilt somit $x' \in T_{k-1}$. Der Punkt $x$ wird somit beim k-ten Durchlauf von Schritt (2) des Algorithmus aus den Punkten $x'$ und $e^{i_0}$ generiert, d.h. es ist $x \in T_k$.

Alle anderen Behauptungen des Theorems sind einfache Folgerungen hieraus, da die Menge $X$ endlich viele Elemente enhält und $\mathbf{0} \in \Psi(p)$ im Schritt (3) des Algorithmus geprüft wird. □

**Beispiel 6.2.** *Seien $n = 2$, $a = (1,2)^\top$, $b = 4$, $\beta = (1,3)^\top$, $M = 1$, $u = (5,5)^\top$ und $p = (1,2)^\top$. Wir wollen nun die Lösungsmenge $\Psi(p)$ berechnen. Dazu verwenden wir Algorithmus 6.1. Dann gilt*

$$J(p) = \{i \in \{1,\dots,n\} : \ p_i \leq \min\{b, Ma_i\}\} = \{1,2\}.$$

*Außerdem ist $p_1/a_1 = p_2/a_2 = 1$. Die Menge der optimalen Einheitsvektoren ist demzufolge*

$$\{e^i : e^i \in \Psi(p)\} = \{e^1, e^2\}.$$

*Weiter werden im Schritt(2) des Algorithmus die Punkte $x = (1,1)^\top$ und $x = (0,2)^\top$ erzeugt. Außerdem gilt $\mathbf{0} \in \Psi(p)$ wegen $p_1/a_1 = p_2/a_2 = M$. Somit ist*

$$\Psi(p) = \{(1,0)^\top, (0,1)^\top, (1,1)^\top, (0,2)^\top, (0,0)^\top\}.$$

## 6.5 Die erweiterten Lösungsmengen $\bar{\Psi}(p)$

In diesem Kapitel wollen wir erweiterten Lösungsmengen $\bar{\Psi}(p)$ mit $p \in Y$ für unser Problem 6.1 untersuchen. Diese wurden definiert durch

$$\bar{\Psi}(p) = \{x \in X : \ p \in \operatorname{cl} R(x)\} \tag{6.11}$$

(siehe Definition 2.3). Die hierdurch gegebene erweiterte Lösungsmengenabbildung $\bar{\Psi} : Y \to 2^X$ ist die kleinste unterhalbstetige Punkt-Menge-Abbildung mit $\Psi(p) \subseteq \bar{\Psi}(p)$ für alle Punkte $p \in Y$ (siehe Theorem 2.3).

Die in der Definition verwendeten Mengen $\operatorname{cl} R(x)$ haben wir bereits in Theorem 6.6 und in (6.8) angegeben. Wir werden dies also nun nutzen, um Eigenschaften der erweiterten Lösungsmengen zu untersuchen und um Berechnungsmöglichkeiten zu entwickeln.

Im folgenden Lemma geben wir zunächst einige triviale Eigenschaften an.

**Lemma 6.16.** *1. Für alle Punkte $p \in Y$ gilt*

$$\Psi(p) \subseteq \bar{\Psi}(p) \subseteq \{x \in X : \; x^\top p \leq b, \; f(x,p) \leq M\}.$$

2. *Seien Punkte $x, x^1, x^2 \in X \backslash \{\mathbf{0}\}$ gegeben mit $x = x^1 + x^2$ und $x \in \bar{\Psi}(p)$. Dann gilt $x^1 \in \bar{\Psi}(p)$ und $x^2 \in \bar{\Psi}(p)$.*

3. *Sei $x \in X \backslash \{\mathbf{0}\}$. Weiter sei $x \in \bar{\Psi}(p)$ für $p \in Y$. Dann gilt $e^i \in \bar{\Psi}(p)$ für alle Indizes $i \in I(x)$.*

*Beweis.* Die erste Eigenschaft ist offensichlich.
Seien Punkte $x, x^1, x^2 \in X \backslash \{\mathbf{0}\}$ gegeben mit $x = x^1 + x^2$ und $x \in \bar{\Psi}(p)$. Dann gilt $p \in \operatorname{cl} R(x)$ (siehe (6.11)). Somit existiert eine Folge $\{p^k\} \subseteq R(x)$ mit $\lim_{k \to \infty} p^k = p^0$. Aus Lemma 6.1 erhalten wir nun $\{p^k\} \subseteq R(x^i)$ für $i = 1, 2$. Demzufolge ist $p^0 \in \operatorname{cl} R(x^i)$ für $i = 1, 2$. Somit gilt $x^1 \in \bar{\Psi}(p)$ und $x^2 \in \bar{\Psi}(p)$ wegen (6.11).
Die dritte Behauptung des Lemmas ist eine triviale Folgerung aus der zweiten Behauptung. □

Die Menge $\Psi(p)$ ist für alle Punkte $p \in Y$ eine Teilmenge von $\bar{\Psi}(p)$, aber im allgemeinen gilt keine Gleichheit. Sei zum Beispiel $n = 1$, $a_1 = 1$, $b = 2$, $\beta_1 = 1$ und $u_1 = 3$. Dann gilt $R(1) = [0, 2]$ und $R(0) = (2, 3]$. Demzufolge ist hier $\Psi(2) = \{1\} \neq \bar{\Psi}(2) = \{0, 1\}$.

Im folgenden sind wir an einer expliziten Darstellung der Mengen $\bar{\Psi}(p)$ interessiert. Aus diesem Grund untersuchen wir, welche Einheitsvektoren für $p \in Y$ Elemente der Menge $\bar{\Psi}(p)$ sind. Hierfür benötigen wir das folgende Lemma.

**Lemma 6.17.** *Seien ein Punkt $p \in Y$ gegeben und zwei Indizes $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ mit $i \neq j$. Weiter sei $e^j \in \bar{\Psi}(p)$, $p_i \leq b$ und $\frac{p_i}{a_i} < \frac{p_j}{a_j}$. Dann gilt $p_i = b < u_i$.*

*Beweis.* Wegen $e^j \in \bar{\Psi}(p)$ gilt $p \in \operatorname{cl} R(e^j)$ (siehe (6.11)). Aus Theorem 6.6 folgt wegen $I(e^j) = \{j\}$ und $i \neq j$ somit

$$\begin{aligned} b \leq p_i \leq u_i \quad \text{oder} \quad & p_j \frac{a_i}{a_j} \leq p_i \leq u_i \text{ im Fall } b < u_i, \\ & p_j \frac{a_i}{a_j} \leq p_i \leq u_i \text{ im Fall } b \geq u_i. \end{aligned}$$

Auf Grund der Voraussetzung $\frac{p_i}{a_i} < \frac{p_j}{a_j}$ gilt demzufolge $b < u_i$ und $b \leq p_i \leq u_i$. Zusammen mit der Voraussetzung $p_i \leq b$ erhalten wir also $p_i = b < u_i$. □

Weiter benötigen wir für die Betrachtung der erweiterten Lösungsmengen noch die folgende Definition.

**Definition 6.2.** *Sei ein Punkt $p \in Y$ gegeben und sei*

$$J(p) := \{i \in \{1, \ldots, n\} : \; p_i \leq \min\{b, Ma_i\}\}$$

*die Indexmenge aller zulässigen Einheitsvektoren, welche keinen schlechteren Zielfunktionswert als $\mathbf{0} \in X$ haben. Sei weiter*

$$J(p) = J_1 \cup \ldots \cup J_N, \; N \leq n$$

*eine Partitionierung der Indexmenge $J(p)$ in disjunkte Teilmengen. Diese Partitionierung heißt geordnet, wenn für alle Indizes $i, j \in J(p)$ mit $i \in J_s$, $j \in J_t$ und $1 \leq s \leq t \leq N$ die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

1. *Es ist $\frac{p_i}{a_i} = \frac{p_j}{a_j}$ genau dann, wenn $s = t$ gilt.*
2. *Es ist $\frac{p_i}{a_i} < \frac{p_j}{a_j}$ genau dann, wenn $s < t$ gilt.*

Mit Hilfe von Lemma 6.17 und Definition 6.2 können wir nun ermitteln, welche Einheitsvektoren in der erweiterten Lösungsmengen für einen Punkt $p \in Y$ liegen.

**Theorem 6.18.** *Sei ein Punkt $p \in Y$ gegeben und sei $J(p) \neq \emptyset$. Weiter sei $J(p) = J_1 \cup \ldots \cup J_N$ eine geordnete Partitionierung der Indexmenge $J(p)$.*

1. *Angenommen es existiert ein Index $l \in \{1, \ldots, N\}$ mit $p_i = b < u_i$ für alle Indizes $i \in J_s$ und alle $s < l$. Weiter existiere ein Index $j \in J_l$ mit $p_j < b$ oder $b = u_j$. Dann gilt*
$$\{i : \; e^i \in \bar{\Psi}(p)\} = J_1 \cup \ldots \cup J_l.$$
2. *Angenommen es gilt $p_i = b < u_i$ für alle Indizes $i \in J(p)$. Dann ist*
$$\{i : \; e^i \in \bar{\Psi}(p)\} = J(p).$$

*Beweis.* 1.) Sei $p \in Y$. Angenommen es existieren Indizes $l \in \{1, \ldots, N\}$ und $j \in J_l$ mit $p_j < b$ oder $b = u_j$ und mit $p_i = b < u_i$ für alle Indizes $i \in J_s$ und alle Indizes $s < l$. Wir zeigen nun $\{i : \; e^i \in \bar{\Psi}(p)\} = J_1 \cup \ldots \cup J_l$.

„ $\supseteq$ “: Seien beliebige Indizes $s \in \{1, \ldots, l\}$ und $i \in J_s$ gegeben. Wir wollen

$$\begin{aligned} p \in \operatorname{cl} R(e^i) \quad = \quad & \{p \in Y : \; p_i \leq \min\{Ma_i, b\}, \\ & p_k \geq p_i \frac{a_k}{a_i} \qquad \text{für alle } k \neq i \text{ mit } u_k \leq b, \\ & p_k \geq \min\{b, p_i \frac{a_k}{a_i}\} \quad \text{für alle } k \neq i \text{ mit } u_k > b\} \end{aligned}$$

zeigen (siehe auch Theorem 6.6). Die Bedingungen $p_i \leq Ma_i$ und $p_i \leq b$ folgen aus der Voraussetzung $i \in J_l \subseteq J(p)$. Wir untersuchen nun die Bedingungen für die Indizes $k \neq i$. Hierfür unterscheiden wir die Fälle $k \notin J(p)$, $k \in J_t$ mit $t < s$ und $k \in J_t$ mit $t \geq s$.

Angenommen es gilt $k \notin J(p)$. Auf Grund der Definition von $J(p)$ und wegen $i \in J(p)$ ist dann $b < p_k \leq u_k$ oder $p_i \frac{a_k}{a_i} \leq Ma_k < p_k \leq u_k$. Es liegt also der Fall $b < u_k$ vor und die Bedingungen sind erfüllt.

Angenommen es gilt $k \in J_t$ mit $t < s$. Dann gilt $p_k = b < u_k$ wegen $t < s \leq l$ und auf Grund der Wahl des Index $l$, d.h. die entsprechenden Bedingungen sind wiederum erfüllt.

Angenommen es gilt $k \in J_t$ mit $t \geq s$. Da eine geordnete Partitionierung von $J(p)$ vorliegt, gilt somit $p_i/a_i \leq p_k/a_k$. Somit sind auch in diesem Fall die entsprechenden Bedingungen erfüllt.

Demzufolge gilt $p \in \operatorname{cl} R(e^i)$ und somit $e^i \in \bar{\Psi}(p)$. Da die Indizes $i, s$ beliebig gewählt wurden, gilt also

$$\{i : \ e^i \in \bar{\Psi}(p)\} \supseteq J_1 \cup \ldots \cup J_l.$$

„ $\subseteq$ “: Angenommen es existiert ein Index $i \in \{1, \ldots, n\}$ mit $e^i \in \bar{\Psi}(p)$ und $i \notin J_1 \cup \ldots \cup J_l$. Dann folgt $p \in \operatorname{cl} R(e^i)$ aus der Annahme $e^i \in \bar{\Psi}(p)$. Somit gilt $p_i \leq b$ und $p_i \leq Ma_i$ (siehe Theorem 6.6). Es ist also $i \in J(p)$. Wegen $i \notin J_1 \cup \ldots \cup J_l$ existiert also ein Index $r > l$ mit $i \in J_r$. Da eine geordnete Partitionierung von $J(p)$ vorliegt und $l < r$ ist, gilt also $p_j/a_j < p_i/a_i$ für alle Indizes $j \in J_l$. Außerdem ist $p_j \leq b$ für alle Indizes $j \in J_l$ wegen $J_l \subseteq J(p)$. Demzufolge erhalten wir $b = p_j < u_j$ für alle Indizes $j \in J_l$ (siehe Lemma 6.17). Dies ist jedoch ein Widerspruch zur Wahl des Index $l$.
Somit gilt also

$$\{i : \ e^i \in \bar{\Psi}(p)\} = J_1 \cup \ldots \cup J_l.$$

2.) Sei $p \in Y$. Wir nehmen nun an, es gilt $p_i = b < u_i$ für alle Indizes $i \in J(p)$. Wir zeigen nun $\{i : \ e^i \in \bar{\Psi}(p)\} = J(p)$.

Sei ein beliebiger Index $i \in J(p)$ gegeben. Für diesen Index wollen wir nun $p \in \operatorname{cl} R(e^i)$ zeigen. Wir überprüfen also für alle Indizes $j \in \{1, \ldots, n\}$ die entsprechenden Ungleichungen (siehe Theorem 6.6).

Aus $i \in J(p)$ folgt die gewünschte Ungleichungen $p_i \leq \min\{Ma_i, b\}$. Außerdem gilt $p_j = b < u_j$ für alle Indizes $j \in J(p)$, d.h. auch für diese Indizes gelten die entsprechenden Bedingungen. Sei nun $j \notin J(p)$ beliebig. Dann gilt $b < p_j \leq u_j$ oder $p_i \frac{a_j}{a_i} \leq Ma_j \leq p_j \leq u_j$, d.h. auch für die Indizes $j \notin J(p)$ gelten die gewünschten Bedingungen. Demzufolge ist $p \in \operatorname{cl} R(e^i)$ und somit $e^i \in \bar{\Psi}(p)$. Da der Index $i \in J(p)$ beliebig gewählt wurde, gilt also

$$\{i : \ e^i \in \bar{\Psi}(p)\} \supseteq J(p).$$

Die umgekehrte Inklusion ist trivial (siehe auch Lemma 6.16). $\square$

Wir können nun die Aussagen von Theorem 6.18 nutzen, um die erweiterten Lösungsmengen $\bar{\Psi}(p)$ zu bestimmen.

**Theorem 6.19.** *Sei $p \in Y$. Dann gelten die folgenden Aussagen.*

1. *Ist $J(p) = \emptyset$, so gilt $\bar{\Psi}(p) = \{\mathbf{0}\}$.*
2. *Sei $J(p) \neq \emptyset$ und sei $p_i = b < u_i$ für alle Indizes $i \in J(p)$. Dann gilt*
$$\bar{\Psi}(p) = \{e^i : \ i \in J(p)\} \cup \{\mathbf{0}\}.$$
3. *Sei $J(p) \neq \emptyset$ und sei $J(p) = J_1 \cup \ldots \cup J_N$ eine geordnete Partitionierung von der Menge $J(p)$. Weiter seien $l \in \{1, \ldots, N\}$ und $j_0 \in J_l$ Indizes mit $p_{j_0} < b$ oder $b = u_{j_0}$ und mit $p_i = b < u_i$ für alle $i \in J_s$ und alle $s < l$.*
   (a) *Angenommen es gilt außerdem $Ma_{j_0} = p_{j_0}$. Dann ist*
   $$\bar{\Psi}(p) = \{e^i : \ i \in J_1 \cup \ldots \cup J_l\} \cup \{x \in X : \ I(x) \subseteq J_l, \ p^\top x \leq b\} \cup \{\mathbf{0}\}.$$
   (b) *Gilt $p_{j_0} < Ma_{j_0}$, so ist*
   $$\bar{\Psi}(p) = \{e^i : \ i \in J_1 \cup \ldots \cup J_l\} \cup \{x \in X \backslash \{\mathbf{0}\} : \ I(x) \subseteq J_l, \ p^\top x \leq b\}.$$

*Beweis.* 1.) Sei $J(p) = \emptyset$. Dann gilt $\Psi(p) = \{\mathbf{0}\} \subseteq \bar{\Psi}(p)$ (siehe Lemma 6.13, Lemma 6.16). Wegen Lemma 6.16 und Theorem 6.18 kann außerdem die Menge $\bar{\Psi}(p)$ kein weiteres Element enthalten. Somit ist $\bar{\Psi}(p) = \{\mathbf{0}\}$.

2.) Sei $J(p) \neq \emptyset$ und sei $p_i = b < u_i$ für alle Indizes $i \in J(p)$. Dann folgt $\bar{\Psi}(p) \supseteq \{e^i : \ i \in J(p)\}$ aus Theorem 6.18. Außerdem soll $\mathbf{0} \in \bar{\Psi}(p)$ gezeigt werden.
Wegen $b = p_i < u_i$ für alle Indizes $i \in J(p)$ und wegen $\min\{Ma_i, b\} < p_i \leq u_i$ für alle Indizes $i \notin I(p)$ gilt $R(\mathbf{0}) \neq \emptyset$ (siehe Theorem 6.5) und $p \in \operatorname{cl} R(\mathbf{0})$ (siehe Formel (6.8)). Demzufolge ist also $\bar{\Psi}(p) \supseteq \{e^i : \ i \in J(p)\} \cup \{\mathbf{0}\}$.

Wir zeigen nun die umgekehrte Inklusion. Sei also ein beliebiger Punkt $\mathbf{0} \neq x \in \bar{\Psi}(p)$ gegeben. Dann gilt $e^i \in \bar{\Psi}(p)$ für alle Indizes $i \in I(x)$ (Lemma 6.16). Hieraus folgt nun $I(x) \subseteq J(p)$ (siehe z.B. Theorem 6.18). Wegen der Voraussetzung gilt demnach $p_i = b$ für alle Indizes $i \in I(x)$. Wir erhalten somit
$$p^\top x = b \sum_{i \in I(x)} x_i \leq b, \text{ d.h. } x \in \{e^i : \ i \in J(p)\}.$$

Demzufolge ist also $\bar{\Psi}(p) = \{e^i : \ i \in J(p)\} \cup \{\mathbf{0}\}$.

3) Sei $J(p) \neq \emptyset$ und sei $J(p) = J_1 \cup \ldots \cup J_N$ eine geordnete Partitionierung von der Menge $J(p)$. Weiter seien $l \in \{1, \ldots, N\}$ und $j \in J_l$ Indizes mit $p_j < b$ oder $b = u_j$ und mit $p_i = b < u_i$ für alle $i \in J_s$ und alle $s < l$.

Dann gilt $\bar{\Psi}(p) \supseteq \{e^i : \ i \in J_1 \cup \ldots \cup J_l\}$ wegen Theorem 6.18. Weiter müssen wir zeigen, dass

$$\bar{\Psi}(p) \supseteq \{x \in X \backslash \{\mathbf{0}\} : \ I(x) \subseteq J_l, \ p^\top x \leq b\}$$

gilt. Sei also ein beliebiger Punkt $x \in X \backslash \{\mathbf{0}\}$ gegeben mit $I(x) \subseteq J_l$ und $p^\top x \leq b$. Weiter wählen wir ein $i_0 \in I(x)$. Wir müssen also nun $p \in \operatorname{cl} R(x)$ zeigen. Hierzu verwenden wir die Formel in Theorem 6.6.

Die Bedingungen $p \in Y$, $p_{i_0} \leq M a_{i_0}$ und $x^\top p \leq b$ folgen aus der Wahl von $x$. Wir überprüfen nun die Bedingungen für alle Indizes $i \in \{1, \ldots, n\}$.
Wegen $I(x) \subseteq J_l$ und Definition 6.2 gilt $p_i/a_i = p_{i_0}/a_{i_0}$ für alle Indizes $i \in I(x)$.
Für alle Indizes $i \notin J(p)$ gilt $\min\{b, M a_i\} < p_i$ und somit $b < p_i \leq u_i$ oder $p_{i_0} \frac{a_i}{a_{i_0}} \leq M a_i < p_i \leq u_i$ wegen $i_0 \in J_l \subseteq J(p)$.
Für die Indizes $i \in J_s$ mit $s < l$ gilt $p_i = b < u_i$ auf Grund der Wahl der Index $l$.
Für alle Indizes $i \in J_s$ mit $s \geq l$ gilt $p_{i_0}/a_{i_0} \leq p_i/a_i$ (siehe Definition 6.2) und somit $p_{i_0} \frac{a_i}{a_{i_0}} \leq p_i \leq u_i$.

Demzufolge ist also $x \in \bar{\Psi}(p)$. Somit haben wir bisher

$$\bar{\Psi}(p) \supseteq \{e^i : \ i \in J_1 \cup \ldots \cup J_l\} \cup \{x \in X \backslash \{\mathbf{0}\} : \ I(x) \subseteq J_l, \ p^\top x \leq b\}$$

gezeigt.

Angenommen es existiert ein Punkt $x \in \bar{\Psi}(p)$ mit $x \neq \mathbf{0}$ und

$$x \notin \{e^i : \ i \in J_1 \cup \ldots \cup J_l\} \cup \{x \in X : \ x \neq 0, \ I(x) \subseteq J_l, \ p^\top x \leq b\}.$$

Auf Grund von $x \in \bar{\Psi}(p)$ und $x \neq \mathbf{0}$ gilt nun $e^i \in \bar{\Psi}(p)$ für alle Indizes $i \in I(x)$ (Lemma 6.16). Mit Theorem 6.18 erhalten wir somit $I(x) \subseteq J_1 \cup \ldots \cup J_l$. Auf Grund der Annahme existiert somit ein Index $i_0 \in I(x) \backslash J_l$ und ein Punkt $x' \neq \mathbf{0}$ mit $x = e^{i_0} + x'$. Dabei ist $I(x') \subseteq I(x) \subseteq J_1 \cup \ldots \cup J_l$. Wegen $i_0 \notin J_l$ ist $i_0 \in J_s$ für ein $s < l$. Auf Grund der Voraussetzung gilt also $p_{i_0} = b$. Wir erhalten nun

$$b \geq p^\top x = p_{i_0} + p^\top x' = b + p^\top x' \quad \text{und somit} \quad p^\top x' = 0.$$

Es ist also $p_i = 0$ für alle Indizes $i \in I(x')$. Dann ist aber $p_i/a_i = 0$ minimal für alle $i \in I(x')$, d.h. es ist $I(x') \subseteq J_1$ (siehe Definition 6.2). Da aber $1 \leq s < l$ ist, ist dies ein Widerspruch zur Voraussetzung $p_k = b > 0$ für alle Indizes $k \in J_1$. Damit haben wir

$$\bar{\Psi}(p) \backslash \{\mathbf{0}\} = \{e^i : \ i \in J_1 \cup \ldots \cup J_l\} \cup \{x \in X \backslash \{\mathbf{0}\} : \ I(x) \subseteq J_l, \ p^\top x \leq b\}$$

gezeigt. Weiter sei $j_0 \in J_l$ ein Index mit $p_{j_0} < b$ oder $b = u_{j_0}$. Wir zeigen nun, dass $\mathbf{0} \in \bar{\Psi}(p)$ und somit $p \in \operatorname{cl} R(\mathbf{0})$ genau dann gilt, wenn $M a_{j_0} = p_{j_0}$ ist. Dazu verwenden wir Theorem 6.5 und Formel 6.8.

Sei $\mathbf{0} \in \bar{\Psi}(p)$. Dann gilt $M a_{j_0} \leq p_{j_0}$ wegen $R(\mathbf{0}) \neq \emptyset$ und $M a_{j_0} \geq p_{j_0}$ wegen $j_0 \in J(p)$. Also ist $M a_{j_0} = p_{j_0}$.

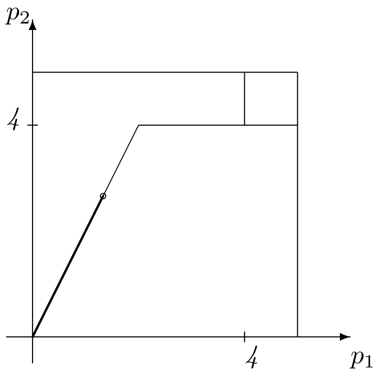
Sei $Ma_{j_0} = p_{j_0}$. Dann sind die Bedingungen $\min\{b, Ma_i\} \leq p_i \leq u_i$ und ($b < u_i$ oder $Ma_i \leq u_i$) für alle Indizes $i = 1, \ldots, n$ zu zeigen. Diese Bedingungen gelten offensichtlich für alle Indizes $i \notin J(p)$ und für alle Indizes $i \in J(p)$ mit $b = p_i < u_i$. Wir betrachten also nun alle Indizes $i \in J(p)$, für welche $p_i < b$ oder $p_i = b = u_i$ gilt und somit $i \in J_t$ mit $t \geq l$ (siehe Wahl des Index $l$). Wegen Definition 6.2 folgt hieraus $p_{j_0}/a_{j_0} \leq p_i/a_i$. Wir erhalten demzufolge

$$M = \frac{p_{j_0}}{a_{j_0}} \leq \frac{p_i}{a_i} \leq M \quad \text{wegen} \quad i \in J(p)$$

und somit $Ma_i = p_i$. Also sind auch für diese Indizes die Bedingungen erfüllt. Folglich gilt $\mathbf{0} \in \bar{\Psi}(p)$.

Somit haben wir nun alle Aussagen des Theorems gezeigt. $\square$

**Beispiel 6.3.** *Seien $n = 2$, $a = (1, 2)^\top$, $b = 4$, $M = 6$, $\beta = (1, 1)^\top$ und sei $u = (5, 5)^\top$.*




*Sei $p = (2, 4)^\top$. Dann gilt $J(p) = J_1 = \{1, 2\}$. Somit ist $\bar{\Psi}(p) = \{e^1, e^2\}$. Sei*

*$p = (3, 4)^\top$. Dann gilt $J_1 = \{2\}$ und $J_2 = \{1\}$. Wegen $p_1 < b$ und $p_1 < Ma_1$ folgt somit $\bar{\Psi}(p) = \{e^1, e^2\}$. Sei*

*$p = (4, 4)^\top$. Dann gilt $J(p) = \{1, 2\}$ und $p_1 = b < u_1$, $p_2 = b < u_2$. Somit ist $\bar{\Psi}(p) = \{\mathbf{0}, e^1, e^2\}$.*

## 6.6 Lösungsfunktionen

In diesem Kapitel untersuchen wir die Lösungsfunktionen für das Problem der unteren Ebene

$$„\max“\{E(p, x) = (p - c)^\top x : \; p \in Y, \; x \in \Psi(p)\}. \tag{6.12}$$

Da die Lösungsmenge im allgemeinen mehr als ein Element besitzen, führen wir wiederum optimistische und pessimistische Lösungsfunktionen $\phi_o : Y \to \mathbb{R}$ und $\phi_p : Y \to \mathbb{R}$ ein (siehe Kapitel 2.5). Dabei ist jedoch zu beachten, dass nun maximiert statt minimiert wird. Wir definieren die Lösungsfunktionen also nun als

$$\phi_o(p) := \max_{x \in \Psi(p)} E(x, p) \quad \text{und} \quad \phi_p(p) := \min_{x \in \Psi(p)} E(x, p). \tag{6.13}$$

Da wir die Lösungsmengen mittels Algorithmus 6.1 angeben können, können wir also bereits für alle Punkte $p \in Y$ die Werte $\phi_o(p)$ und $\phi_p(p)$ berechnen. Da die Lösungsmengen jedoch mitunter sehr viele Elemente enthalten können, ist es sinnvoll die Menge der zu betrachtenden Punkte zunächst zu reduzieren.

**Theorem 6.20.** *Sei ein Punkt $p \in Y$ gegeben. Sei weiter*

$$\begin{aligned} J^+(p) &:= \{i:\ e^i \in \Psi(p),\ p_i - c_i > 0\} \qquad \textit{und} \\ J^-(p) &:= \{i:\ e^i \in \Psi(p),\ p_i - c_i < 0\}. \end{aligned}$$

*Dann ist*

$$\phi_o(p) = \begin{cases} \max\limits_{x \in X}\{E(x,p):\ I(x) \subseteq J^+(p),\ x \in \Psi(p)\} & \textit{falls } J^+(p) \neq \emptyset \\ 0 & \textit{falls } J^+(p) = \emptyset,\ \mathbf{0} \in \Psi(p) \\ \max\limits_{i}\{E(e^i,p):\ e^i \in \Psi(p)\} & \textit{falls } J^+(p) = \emptyset,\ \mathbf{0} \notin \Psi(p) \end{cases}$$

*und*

$$\phi_p(p) = \begin{cases} \min\limits_{x \in X}\{E(x,p):\ I(x) \subseteq J^-(p),\ x \in \Psi(p)\} & \textit{falls } J^-(p) \neq \emptyset \\ 0 & \textit{falls } J^-(p) = \emptyset,\ \mathbf{0} \in \Psi(p) \\ \min\limits_{i}\{E(e^i,p):\ e^i \in \Psi(p)\} & \textit{falls } J^-(p) = \emptyset,\ \mathbf{0} \notin \Psi(p). \end{cases}$$

*Beweis.* Wir zeigen die Behauptung für den optimistischen Fall. Für den pessimistischen Fall ist der Beweis analog.

Angenommen die Behauptung gilt nicht. Wir unterscheiden nun 3 Fälle.

1. Fall: Sei $J^+(p) \neq \emptyset$. Dann existiert ein Index $i_0 \in J^+(p)$. Für diesen gilt $E(e^{i_0},p) > 0$. Demzufolge ist $\phi_o(p) \geq E(e^{i_0},p) > 0$. Auf Grund der Gegenannahme existiert kein Punkt $x' \in \Psi(p)$ mit $I(x') \subseteq J^+(p)$ und $\phi_o(p) = E(x',p)$. Es existiert demzufolge ein Punkt $x \in \Psi(p)$ mit $\phi_o(p) = E(x,p)$ und $I(x) \not\subseteq J^+(p)$. Für diesen gilt somit $E(x,p) = \sum_{i \in I(x)} x_i(p_i - c_i) > 0$. Wegen $I(x) \not\subseteq J^+(p)$ ist die Indexmenge $I(x)$ somit die Vereinigung von zwei disjunkten, nichtleeren Teilmengen $I_1, I_2$, wobei

$$I_1 := \{i \in I(x):\ p_i - c_i > 0\} \quad \text{und} \quad I_2 := \{i \in I(x):\ p_i - c_i \leq 0\}$$

sei. Dann gilt für die Punkte

$$x^1 := \sum_{i \in I_1} x_i e^i \quad \text{und} \quad x^2 := \sum_{i \in I_2} x_i e^i$$

$x^1, x^2 \in X \backslash \{\mathbf{0}\}$ und somit $x^1, x^2 \in \Psi(p)$ (Lemma 6.11). Wegen $E(x^2,p) \leq 0$ und $E(x,p) = E(x^1,p) + E(x^2,p)$ folgt hieraus

$$E(x^1,p) = E(x,p) - E(x^2,p) \geq E(x,p) = \phi_o(p)$$

und somit $E(x^1,p) = \phi_o(p)$. Außerdem ist $e^i \in \Psi(p)$ für alle Indizes $i \in I(x^1)$ und somit $I_1 = I(x^1) \subseteq J^+(p)$. Dies ist aber ein Widerspruch zur Gegenannahme.

2. Fall: Sei $J^+(p) = \emptyset$ und $\mathbf{0} \in \Psi(p)$. Dann gilt $\phi_o(p) \geq E(\mathbf{0},p) = 0$. Auf Grund der Gegenannahme ist also $\phi_o(p) > 0$. Somit existiert ein Punkt $x \in \Psi(p) \backslash \{\mathbf{0}\}$

mit $E(x,p) = \phi_o(p) > 0$. Wegen $E(x,p) = \sum_{i \in I(x)} x_i(p_i - c_i) > 0$ existiert somit ein Index $i \in I(x)$ mit $e^i \in \Psi(p)$ (Lemma 6.12) und $p_i - c_i > 0$. Dies ist aber ein Widerspruch zur Voraussetzung $J^+(p) = \emptyset$.

3.Fall: Sei $J^+(p) = \emptyset$ und $\mathbf{0} \notin \Psi(p)$. Dann gilt $p_i - c_i \leq 0$ für alle Indizes $i \in \{1, \ldots, n\}$ mit $e^i \in \Psi(p)$. Sei nun $x \in \Psi(p)$ beliebig. Dann ist $I(x) \neq \emptyset$ wegen $\mathbf{0} \notin \Psi(p)$ und es gilt $e^i \in \Psi(p)$ für alle Indizes $i \in I(x)$ (Lemma 6.12). Hieraus folgt nun

$$E(x,p) = \sum_{i \in I(x)} x_i(p_i - c_i) \leq (p_i - c_i) = E(e^i, p) \quad \text{für alle } i \in I(x).$$

Somit ist

$$\phi_o(p) = \max_{x \in \Psi(p)} E(x,p) = \max_i \{E(e^i, p) : \; e^i \in \Psi(p)\}.$$

□

Wir können nun die Werte $\phi_o(p)$ und $\phi_p(p)$ berechnet, ohne erst die gesamte Menge $\Psi(p)$ bestimmen zu müssen. Im Fall $J^+(p) = \emptyset$ im optimistischen Fall bzw. $J^-(p) = \emptyset$ im pessimistischen Fall ist dies trivial, da die optimalen Einheitsvektoren einfach berechnet werden können (Lemma 6.13). Im Fall $J^+(p) \neq \emptyset$ im optimistischen Fall bzw. $J^-(p) \neq \emptyset$ im pessimistischen Fall können wir Algorithmus 6.1 verwenden, wobei die Menge $\bar{J}(p)$ durch $J^+(p)$ bzw. $J^-(p)$ ersetzt wird.

Als nächstes werden wir die schwachen Lösungsfunktionen untersuchen.

## 6.7 Die schwachen Lösungsfunktionen

Die schwachen Lösungsfunktionen $\bar{\phi}_o : Y \to \mathbb{R}$ und $\bar{\phi}_p : Y \to \mathbb{R}$ sind definiert durch

$$\bar{\phi}_o(p^0) = \limsup_{p \in Y,\, p \to p^0} \phi_o(p) \quad \text{und} \quad \bar{\phi}_p(p^0) = \limsup_{p \in Y,\, p \to p^0} \phi_p(p) \tag{6.14}$$

für alle Punkte $p^0 \in Y$ (siehe Definition 2.6). Diese Funktionen sind oberhalbstetig (Theorem 2.4) und es gilt

$$\bar{\phi}_o(p) \geq \phi_o(p) \quad \text{und} \quad \bar{\phi}_p(p) \geq \phi_p(p) \tag{6.15}$$

für alle Punkte $p \in Y$. (Beachte: Es wird in Aufgabe (6.12) maximiert statt minimiert.) Sowohl für die schwache optimistische als auch für die schwache pessimistische Lösungsfunktion können wir alternative Beschreibungen angeben, z.B. mit Hilfe von Mengen $\widehat{\Psi}_o(p)$ bzw. $\widehat{\Psi}_p(p)$ (siehe Theorem 2.6) oder unter Verwendung von optimistischen bzw. pessimistischen Auswahlfunktionen (siehe Theorem 3.3, (3.12), (3.13)). Im folgenden geben wir solche Berechnungsmöglichkeiten für die schwachen Lösungsfunktionen an.

### 6.7.1 Die schwache optimistische Lösungsfunktion

Wie wir schon gesehen haben, kann die schwache optimistische Lösungsfunktion mit Hilfe einer optimistischen Auswahlfunktion oder mit Hilfe der Mengen $\widehat{\Psi}_o(p)$ berechnet werden. Hier werden wir jedoch einen anderen Zugang wählen. Auf Grund von Lemma 2.9 und Formel (2.20) gilt für alle Punkte $p \in Y$

$$\bar{\phi}_o(p) = \max_{x \in \bar{\Psi}(p)} E(x,p). \tag{6.16}$$

Da wir mit Theorem 6.19 für jeden Punkt $p \in Y$ die zugehörige erweiterte Lösungsmenge ermitteln können, können wir also bereits für alle Punkte $p \in Y$ den Wert $\bar{\phi}_o(p)$ berechnen. Da die erweiterten Lösungsmengen jedoch mitunter sehr viele Elemente enthalten, ist es sinnvoll die Menge der zu betrachtenden Punkte in Analogie zu Theorem 6.20 zunächst zu reduzieren.

**Theorem 6.21.** *Sei ein Punkt $p \in Y$ gegeben. Sei weiter*

$$\bar{J}^+(p) := \{i : \ e^i \in \bar{\Psi}(p), \ p_i - c_i > 0\}.$$

*Dann ist*

$$\bar{\phi}_o(p) = \begin{cases} \max\limits_{x \in X}\{E(x,p) : \ I(x) \subseteq \bar{J}^+(p), \ x \in \bar{\Psi}(p)\} & \textit{falls } \bar{J}^+(p) \neq \emptyset \\ 0 & \textit{falls } \bar{J}^+(p) = \emptyset, \ \mathbf{0} \in \bar{\Psi}(p) \\ \max\limits_{i}\{E(e^i,p) : \ e^i \in \bar{\Psi}(p)\} & \textit{falls } \bar{J}^+(p) = \emptyset, \ \mathbf{0} \notin \bar{\Psi}(p). \end{cases}$$

*Beweis.* Angenommen die Behauptung gilt nicht. Wir unterscheiden nun 3 Fälle.

1. Fall: Sei $\bar{J}^+(p) \neq \emptyset$. Dann existiert ein Index $i_0 \in \bar{J}^+(p)$. Für diesen gilt $E(e^{i_0},p) > 0$. Demzufolge ist $\bar{\phi}_o(p) \geq E(e^{i_0},p) > 0$. Auf Grund der Gegenannahme existiert kein Punkt $x' \in \bar{\Psi}(p)$ mit $I(x') \subseteq \bar{J}^+(p)$ und $\bar{\phi}_o(p) = E(x',p)$. Es existiert demzufolge ein Punkt $x \in \bar{\Psi}(p)$ mit $\bar{\phi}_o(p) = E(x,p)$ und $I(x) \not\subseteq \bar{J}^+(p)$. Für diesen gilt somit $E(x,p) = \sum_{i \in I(x)} x_i(p_i - c_i) > 0$. Wegen $I(x) \not\subseteq \bar{J}^+(p)$ ist die Indexmenge $I(x)$ folglich die Vereinigung von zwei disjunkten, nichtleeren Teilmengen $I_1, I_2$, wobei

$$I_1 := \{i \in I(x) : \ p_i - c_i > 0\} \quad \text{und} \quad I_2 := \{i \in I(x) : \ p_i - c_i \leq 0\}$$

sei. Dann gilt für die Punkte

$$x^1 := \sum_{i \in I_1} x_i e^i \quad \text{und} \quad x^2 := \sum_{i \in I_2} x_i e^i$$

$x^1, x^2 \in X \backslash \{\mathbf{0}\}$ und somit $x^1, x^2 \in \bar{\Psi}(p)$ (Lemma 6.16). Wegen $E(x^2,p) \leq 0$ und $E(x,p) = E(x^1,p) + E(x^2,p)$ folgt hieraus

$$E(x^1,p) = E(x,p) - E(x^2,p) \geq E(x,p) = \bar{\phi}_o(p)$$

und somit $E(x^1, p) = \bar{\phi}_o(p)$. Außerdem ist $e^i \in \bar{\Psi}(p)$ für alle Indizes $i \in I(x^1)$ und somit $I_1 = I(x^1) \subseteq \bar{J}^+(p)$. Dies ist aber ein Widerspruch zur Gegenannahme.

2. Fall: Sei $\bar{J}^+(p) = \emptyset$ und $\mathbf{0} \in \bar{\Psi}(p)$. Dann gilt $\bar{\phi}_o(p) \geq E(\mathbf{0}, p) = 0$. Auf Grund der Gegenannahme ist also $\bar{\phi}_o(p) > 0$. Somit existiert ein Punkt $x \in \bar{\Psi}(p) \backslash \{\mathbf{0}\}$ mit $E(x,p) = \bar{\phi}_o(p) > 0$. Wegen $E(x,p) = \sum_{i \in I(x)} x_i(p_i - c_i) > 0$ existiert somit ein Index $i \in I(x)$ mit $e^i \in \bar{\Psi}(p)$ (Lemma 6.16) und $p_i - c_i > 0$. Dies ist aber ein Widerspruch zur Voraussetzung $\bar{J}^+(p) = \emptyset$.

3.Fall: Sei $\bar{J}^+(p) = \emptyset$ und $\mathbf{0} \notin \bar{\Psi}(p)$. Dann gilt $p_i - c_i \leq 0$ für alle Indizes $i \in \{1, \ldots, n\}$ mit $e^i \in \bar{\Psi}(p)$. Sei nun $x \in \bar{\Psi}(p)$ beliebig. Dann ist $I(x) \neq \emptyset$ wegen $\mathbf{0} \notin \bar{\Psi}(p)$ und es gilt $e^i \in \bar{\Psi}(p)$ für alle Indizes $i \in I(x)$ (Lemma 6.16). Hieraus folgt nun

$$E(x,p) = \sum_{i \in I(x)} x_i(p_i - c_i) \leq (p_i - c_i) = E(e^i, p) \quad \text{für alle } i \in I(x).$$

Somit ist

$$\bar{\phi}_o(p) = \max_{x \in \bar{\Psi}(p)} E(x,p) = \max_i \{E(e^i, p) : \; e^i \in \bar{\Psi}(p)\}.$$

□

### 6.7.2 Die schwache pessimistische Lösungsfunktion

Die pessimistische Lösungsfunktion kann mit Hilfe der Formel

$$\bar{\phi}_p(p) = \max_{x \in \widehat{\Psi}_p(p)} E(x,p) \tag{6.17}$$

berechnet werden (siehe Theorem 2.6). Dabei waren für alle Punkte $p \in Y$ die Mengen $\widehat{\Psi}_p(p)$ wie folgt definiert.

Es gilt für alle Punkte $p \in Y$

$$\widehat{\Psi}_p(p) := \{x \in X : \; p \in \operatorname{cl} P(x)\} \tag{6.18}$$

(siehe (2.19)), wobei die Mengen $P(x)$ für alle Punkte $x \in X$ durch

$$P(x) := \{p \in R(x) : \; \phi_p(p) = E(x,p)\} \tag{6.19}$$

gegeben sind (siehe Definition 2.4). Wir müssen also zunächst die Mengen $\operatorname{cl} P(x)$ für alle Punkte $x \in X$ näher untersuchen.

**Lemma 6.22.** *Sei* $\min\{b, Ma_i\} < u_i$ *für alle Indizes* $i = 1, \ldots, n$. *Dann gilt*

$$\operatorname{cl} P(\mathbf{0}) = \operatorname{cl} R(\mathbf{0}).$$

*Beweis.* Wegen $P(\mathbf{0}) \subseteq R(\mathbf{0})$ gilt offensichtlich $\operatorname{cl} P(\mathbf{0}) \subseteq \operatorname{cl} R(\mathbf{0})$. Sei nun $\min\{b, Ma_i\} < u_i$ für alle Indizes $i = 1, \ldots, n$. Dann gilt

$$\operatorname{int} R(\mathbf{0}) = \{p \in \mathbb{R}^n : \min\{b, Ma_i\} < p_i < u_i \text{ für alle } i = 1, \ldots, n\}$$

(siehe Bemerkungen nach Theorem 6.7). Somit gilt $\Psi(p) = \{\mathbf{0}\}$ wegen Lemma 6.13 und demzufolge auch $p \in P(\mathbf{0})$ für alle Punkte $p \in \operatorname{int} R(\mathbf{0})$. Also ist $\operatorname{int} R(\mathbf{0}) \subseteq P(\mathbf{0})$. Da offenbar $\operatorname{cl} \operatorname{int} R(\mathbf{0}) = \operatorname{cl} R(\mathbf{0})$ gilt (siehe (6.8)), ist somit $\operatorname{cl} R(\mathbf{0}) \subseteq \operatorname{cl} P(\mathbf{0})$. Demnach gilt die Behauptung des Lemmas. □

Wir führen nun zunächst für alle Indizes $i = 1, \ldots, n$ und alle $t \in \{1, \ldots, \beta_i\}$ die Größe

$$l_i(t) := \min\{Ma_i, b/t, u_i, \min_{j \neq i:\, u_j \leq b} \frac{u_j a_i}{a_j}\} \tag{6.20}$$

ein. Dies ist die kleinste obere Schranke von $p_i$ für alle $p \in R(te^i)$. Es gilt also $p_i \leq l_i(t)$ für alle $p \in R(te^i)$ bzw. für alle $p \in \operatorname{cl} R(te^i)$, wobei der Wert in mindestens einem Punkt angenommen wird (siehe (6.9), Theorem 6.6 und Lemma 6.9).

**Lemma 6.23.** *Seien $i \in \{1, \ldots, n\}$ und $t^* \in \{1, \ldots, \beta_i\}$ beliebig. Dann gilt*

$$\operatorname{cl} P(t^*e^i) \subseteq \{p \in \operatorname{cl} R(t^*e^i) : \begin{array}{rl} \min\{c_i, b/(t^*+1)\} \leq p_i & \textit{im Fall } t^* < \beta_i \\ c_i \geq p_i & \textit{im Fall } t^* > 1\}. \end{array} \tag{6.21}$$

*Ist außerdem noch einer der Fälle*

1. $t^* = \beta_i$
2. $t^* = 1 < \beta_i$ *und* $\min\{c_i, b/(t^*+1)\} < l_i(t^*)$
3. $1 < t^* < \beta_i$ *und* $\min\{c_i, b/(t^*+1)\} < \min\{l_i(t^*), c_i\}$

*erfüllt, so gilt Gleichheit. Es ist in diesen Fällen also*

$$\operatorname{cl} P(t^*e^i) = \{p \in \operatorname{cl} R(t^*e^i) : \begin{array}{rl} \min\{c_i, b/(t^*+1)\} \leq p_i & \textit{im Fall } t^* < \beta_i \\ c_i \geq p_i & \textit{im Fall } t^* > 1\}. \end{array}$$

*Beweis.* „ $\subseteq$ “: Sei $p \in P(t^*e^i)$. Dann gilt $p \in R(t^*e^i)$ wegen (6.19) und somit $t^*e^i \in \Psi(p)$. Aus Lemma 6.11 und Lemma 6.12 folgt nun

$$\Psi(p) \supseteq \{te^i : t \in \{1, \ldots, \beta_i\}, \ tp_i \leq b\}.$$

Wegen $p \in P(t^*e^i)$ gilt somit $E(t^*e^i, p) \leq E(te^i, p)$ oder $tp_i > b$ für alle natürlichen Zahlen $t \in \{1, \ldots, \beta_i\}$.
Da für alle $t < t^*$ die Ungleichung $tp_i \leq t^*p_i \leq b$ gilt wegen $p \in R(t^*e_i)$, ist also $E(t^*e^i, p) \leq E(te^i, p)$ für alle $t < t^*$. Dies entspricht

$$\begin{array}{rcl} t^*(p_i - c_i) & \leq & t(p_i - c_i) \\ (t^* - t)(p_i - c_i) & \leq & 0, \text{ d.h. } p_i \leq c_i \text{ wegen } t < t^*. \end{array}$$

Es ist also $p_i \leq c_i$ im Fall $i > 1$. Angenommen es ist $t^* < \beta_i$ und $p_i < c_i$. Dann gilt offensichtlich $E(t^*e^i, p) > E(te^i, p)$ für alle Zahlen $t > t^*$. Somit gilt $b < tp_i$ für alle Zahlen $t > t^*$, d.h.

$$b < (t^* + 1)p_i \leq \ldots \leq \beta_i p_i.$$

Ist also $t^* < \beta_i$, so muss $p_i \geq c_i$ oder $p_i > b/(t^* + 1)$ gelten. Demzufolge ist

$$\begin{aligned} P(t^*e^i) \subseteq \{p \in \operatorname{cl} R(t^*e^i) : \ b/(t^* + 1) < p_i \text{ oder } & c_i \leq p_i \text{ im Fall } t^* < \beta_i \\ & c_i \geq p_i \text{ im Fall } t^* > 1\}. \end{aligned} \tag{6.22}$$

Somit gilt die Inklusion „ $\subseteq$ “ für die Abschließungen der Mengen.

„ $\supseteq$ “: Die umgekehrte Inklusion zeigen wir nur für die angegebenen Fälle. Sei nun

$$l_1 := \begin{cases} 0 & \text{im Fall } t^* = \beta_i \\ \min\{c_i, b/(t^* + 1)\} & \text{im Fall } t^* < \beta_i \end{cases}$$

und

$$l_2 := \begin{cases} l_i(t^*) & \text{im Fall } t^* = 1 \\ \min\{c_i, l_i(t^*)\} & \text{im Fall } t^* > 1 \end{cases}.$$

Wie man nun leicht überprüfen kann, sind die angegebenen Fälle genau diejenigen Fälle, für welche $0 \leq l_1 < l_2 \leq l_i(t^*)$ gilt.

Sei nun $p^0 \in \operatorname{cl} R(t^*e^i)$ beliebig mit $p_i^0 \leq c_i$ im Fall $t^* > 1$ und mit $p_i^0 \geq \min\{c_i, b/(t^* + 1)$ im Fall $t^* < \beta_i$. Wir verwenden nun Lemma 6.9 mit den angegebenen Zahlen $l_1 < l_2$.

Dann existiert eine Folge $\{p^k\} \subseteq \operatorname{int} R(t^*e^i)$ mit $\lim_{k\to\infty} p^k = p^0$ und mit $p_i^k \in (l_1, l_2)$ für alle $k$. Aus Folgerung 6.14 und Lemma 6.12 folgt dann

$$t^*e^i \in \Psi(p^k) = \{e^i, 2e^i, \ldots, t_k e^i\} \quad \text{mit} \quad t_k := \max\{t \in \mathbb{N} : \ t \leq \beta_i, \ tp_i^k \leq b\}.$$

Für den Fall $t^* = 1$ erhalten wir nun $t_k = 1 = t^*$ oder $c_i < p_i^k$ für alle $k$.
Für den Fall $t^* > 1$ gilt $p_i^k < c_i$ und $t_k = t^*$ für alle $k$ wegen $p_i^k \in (l_1, l_2)$.

Hieraus folgt nun $E(t^*e^i, p^k) \leq E(te^i, p^k)$ für alle $t = 1, \ldots, t_k$ und für alle $k$. Somit gilt $\{p^k\} \subseteq P(t^*e^i)$, d.h. es ist $p^0 \in \operatorname{cl} P(t^*e^i)$. Demzufolge gelten die Behauptungen des Lemmas. □

**Bemerkungen:** Wir können nun also für einen Teil der Punkte $x = t^*e^i$ die zugehörige Menge $\operatorname{cl} P(x)$ berechnen. Für alle anderen Punkte $x = t^*e^i$ können wir Eigenschaften der Mengen $\operatorname{cl} P(x)$ angeben mit Hilfe von der Inklusion (6.21). Ist z.B. die rechte Menge in (6.21) leer, so ist auch die Menge $\operatorname{cl} P(x)$ leer. Außerdem erhalten wir aus Lemma 6.23 die folgende Folgerung.

**Folgerung 6.24.** *Sei $x = t^*e^i$ mit $t^* < \beta_i$ und mit*

$$\begin{aligned} \min\{c_i, b/(t^* + 1)\} = l_i(t^*) \quad & \textit{im Fall} \quad t^* = 1 \ \textit{bzw. mit} \\ \min\{c_i, b/(t^* + 1)\} = \min\{l_i(t^*), c_i\} \quad & \textit{im Fall} \quad t^* > 1. \end{aligned}$$

*Dann ist* $\operatorname{cl} P(x) \subseteq \{p \in \operatorname{cl} R(x) : \ p_i = c_i\}$.

*Sei weiter* $\operatorname{cl} P(x) \neq \emptyset$. *Dann ist* $E(t^* e^i, p) = 0$ *für alle* $p \in \operatorname{cl} P(x)$. *Außerdem existiert für alle* $p \in \operatorname{cl} P(x)$ *ein*

$$\tilde{t} := \max\{t \in \mathbb{N} : \ t \leq \beta_i, \ tp_i \leq b\} > t^*$$

*mit* $p \in \operatorname{cl} P(\tilde{t} e^i)$ *und* $E(t^* e^i, p) = 0 = E(\tilde{t} e^i, p)$.

*Beweis.* Für den Fall $\operatorname{cl} P(x) = \emptyset$ sind die Aussagen der Folgerung offensichtlich. Sei also $\operatorname{cl} P(x) \neq \emptyset$. Dann ist auch $P(x) \neq \emptyset$. Aus (6.22) folgt somit

$$\begin{array}{rlll} b/(t^*+1) < p_i \leq l_i(t^*) \text{ oder } c_i \leq p_i \leq l_i(t^*) & \text{im Fall} & t^* < \beta_i \\ \text{und} \qquad p_i \leq \min\{c_i, l_i(t^*)\} & \text{im Fall} & t^* > 1 \end{array}$$

für alle Punkte $p \in P(x)$ (siehe auch Theorem 6.6). Für die angegebenen Fälle ist somit $p_i = c_i \leq b/(t^*+1)$ für alle $p \in P(x)$. Somit gilt

$$\operatorname{cl} P(x) \subseteq \{p \in \operatorname{cl} R(x) : \ p_i = c_i\}.$$

Demzufolge ist offensichtlich $E(x, p) = 0$ für alle $p \in \operatorname{cl} P(x)$.

Da also im Fall $\operatorname{cl} P(x) \neq \emptyset$ die Werte $p_i$ für alle Punkte $p \in \operatorname{cl} P(x)$ konstant sind, existiert der Wert $\tilde{t}$. Für $\tilde{t}$ gilt entweder $p_i > b/(\tilde{t}+1)$ oder $\tilde{t} = \beta_i$. Wegen $t^* < \beta_i$ und $p_i \leq b/(t^*+1)$ ist somit $t^* < \tilde{t}$. Außerdem gilt $p \in \operatorname{cl} R(\tilde{t} e^i)$ für alle Punkte $p \in \operatorname{cl} P(x)$ wegen $p \in \operatorname{cl} R(t^* e^i)$ und $\tilde{t} p_i \leq b$ (siehe Theorem 6.6). Somit erhalten wir $p \in \operatorname{cl} P(\tilde{t} e^i)$ für alle Punkte $p \in \operatorname{cl} P(t^* e^i)$ (Lemma 6.23). Die Gleichung $E(t^* e^i, p) = 0 = E(\tilde{t} e^i, p)$ für alle Punkte $p \in \operatorname{cl} P(\tilde{t} e^i)$ ist offensichtlich. □

Damit haben wir gezeigt, dass die in Folgerung 6.24 betrachteten $x \in X$ zur Berechnung der Werte $\bar{\phi}_p(p)$ eigentlich gar nicht nötig sind. Im folgenden werden wir analoge Ergebnisse für alle $x \in X$ angeben, für welche wir die Menge $\operatorname{cl} P(x)$ noch nicht berechnet haben.

Wir beginnen unsere weiteren Betrachtungen mit dem Nullvektor.

**Lemma 6.25.** *Sei* $\min\{Ma_i, b\} = u_i$ *für einen Index* $i \in \{1, \ldots, n\}$ *und sei* $P(\mathbf{0}) \neq \emptyset$. *Dann gilt* $c_i \leq \min\{Ma_i, b\}$. *Wir unterscheiden nun die folgenden Fälle.*

1. *Ist* $c_i < \min\{Ma_i, b\}$, *so gilt* $\operatorname{cl} P(\mathbf{0}) \subseteq \operatorname{cl} P(e^i)$ *und* $E(\tilde{t} e^i, p) \geq E(\mathbf{0}, p)$ *für alle* $p \in \operatorname{cl} P(\mathbf{0})$.

2. *Ist* $c_i = \min\{Ma_i, b\}$, *so gilt* $\operatorname{cl} P(\mathbf{0}) \subseteq \operatorname{cl} P(t^* e^i)$ *und* $E(t^* e^i, p) = E(\mathbf{0}, p)$ *für alle* $p \in \operatorname{cl} P(\mathbf{0})$ *mit* $t^* := \max\{t \in \mathbb{N} : \ t \leq \beta_i, \ t \min\{Ma_i, b\} \leq b\}$.

*Beweis.* Sei $i \in \{1, \ldots, n\}$ ein Index mit $\min\{Ma_i, b\} = u_i$ und sei $P(\mathbf{0}) \neq \emptyset$. Dann ist $R(\mathbf{0}) \neq \emptyset$ und somit $Ma_i = u_i = p_i \leq b$ für alle $p \in \operatorname{cl} P(\mathbf{0})$. Weiter gilt wegen $R(\mathbf{0}) \neq \emptyset$

$$b < u_j \text{ oder } Ma_j = Ma_i \frac{a_j}{a_i} = p_i \frac{a_j}{a_i} \leq u_j \quad \text{für alle } j \neq i \text{ und alle } p \in R(\mathbf{0}).$$

Wir erhalten somit $P(\mathbf{0}) \subseteq R(\mathbf{0}) \subseteq R(e^i)$. Wegen der Definition der pessimistischen Lösungsfunktion folgt hieraus nun $0 = E(\mathbf{0}, p) \leq E(e^i, p)$ für alle $p \in P(\mathbf{0})$ und somit $c_i \leq p_i = \min\{Ma_i, b\}$ für alle $p \in P(\mathbf{0})$.

1. Sei $c_i < \min\{Ma_i, b\}$. Dann gilt offensichtlich $l_i(1) = \min\{Ma_i, b\}$ (siehe (6.20)) und somit $\min\{c_i, b/2\} < l_i(1)$. Wir können nun mit Lemma 6.23 die Menge $\operatorname{cl} P(e^i)$ bestimmen. Es gilt

   $$\operatorname{cl} P(e^i) = \operatorname{cl} R(e^i) \cap \{p \in Y : \ \min\{c_i, b/2\} \leq p_i \text{ im Fall } 1 < \beta_i\}.$$

   Wegen $P(\mathbf{0}) \subseteq \operatorname{cl} R(e^i)$ und wegen $l_i(1) = p_i$ für alle $p \in P(\mathbf{0})$ folgt hieraus $P(\mathbf{0}) \subseteq \operatorname{cl} P(e^i)$ und somit die Behauptung.

2. Sei $c_i = \min\{Ma_i, b\}$ und sei $t^* := \max\{t \in \mathbb{N} : \ t \leq \beta_i, \ t \min\{Ma_i, b\} \leq b\}$. Wegen $p \in R(e^i)$ und $t^* p_i \leq b$ gilt dann $p \in R(t^* e^i)$ für alle $p \in P(\mathbf{0})$. Also ist $\operatorname{cl} P(\mathbf{0}) \subseteq \operatorname{cl} R(t^* e^i)$. Weiter kann leicht $l_i(t^*) = \min\{Ma_i, b\} = c_i$ gezeigt werden (siehe (6.20)). Wegen der Definition von $t^*$ gilt nun entweder $t^* = \beta_i$ oder $c_i = \min\{Ma_i, b\} = l_i(t^*) > b/(t^* + 1)$. In beiden Fällen kann offensichtlich mit Lemma 6.23 die Menge $\operatorname{cl} P(t^* e^i)$ bestimmt werden. Es ist

   $$\operatorname{cl} P(t^* e^i) = \operatorname{cl} R(t^* e^i) \cap \{p \in Y : \ \min\{c_i, b/(t^*+1)\} \leq p_i \text{ im Fall } t^* < \beta_i\}.$$

   Wegen $P(\mathbf{0}) \subseteq \operatorname{cl} R(t^* e^i)$ und wegen $l_i(t^*) = p_i$ für alle $p \in P(\mathbf{0})$ folgt hieraus $P(\mathbf{0}) \subseteq \operatorname{cl} P(t^* e^i)$ und somit die Behauptung.

Die angegebenen Gleichungen bzw. Ungleichungen sind nun offensichtlich. □

Die einzigen Punkte, welche wir bisher noch nicht betrachten haben, sind die Punkte $x \in X$ mit $\operatorname{card} I(x) > 1$. Bevor wir jedoch mit unseren Untersuchungen beginnen, betrachten wir zunächst das folgende Beispiel.

**Beispiel 6.4.** *Sei $n = 2$, $a = (1, 2)^\top$, $b = 4$, $M = 10$, $u = (5, 5)^\top$ $\beta = (2, 1)^\top$ und $c = (1.5, 3)^\top$. Wir betrachten nun den Punkt $p^0 = (4/3, 8/3)^\top$. Dann gilt*

$$\Psi(p^0) = \{e^1, e^2, e^1 + e^2, 2e^1\} = X \backslash \{\mathbf{0}\}$$

*(siehe Algorithmus 6.1). Für diese optimalen Lösungen der unteren Ebene erhalten wir die Funktionswerte*

$$\begin{aligned} E(e^1, p^0) &= -1/6, & E(e^1 + e^2, p^0) &= -1/2, \\ E(e^2, p^0) &= -1/3 \quad \textit{und} & E(2e^1, p^0) &= -1/3. \end{aligned}$$

*Demzufolge ist* $p^0 \in P(e^1+e^2)$ *und somit* $e^1+e^2 \in \widehat{\Psi}_p(p^0)$. *Andererseits gilt auf Grund von Lemma 6.23*

$$\begin{aligned} \operatorname{cl} P(2e^1) &= \{p \in Y:\ p_1 \le 1.5,\ \min\{4, 2p_1\} \le p_2\}, \\ \operatorname{cl} P(e^2) &= \{p \in Y:\ p_2 \le 4,\ \min\{4, p_2/2\} \le p_1\}. \end{aligned}$$

*Demzufolge ist* $p^0 \in \operatorname{cl} P(2e^1) \cap \operatorname{cl} P(e^2)$. *Es gilt also* $\{2e^1, e^2, e^1+e^2\} \subseteq \widehat{\Psi}_p(p^0)$ *und somit wegen (6.17)*

$$\bar{\phi}_p(p^0) \ge E(2e^1, p^0) = E(e^2, p^0) > E(e^1+e^2),$$

*d.h. wir benötigen den Punkt* $e^1+e^2$ *zwar zur Berechnung des Wertes* $\phi_p(p^0)$, *aber nicht zur Berechnung des Wertes* $\bar{\phi}_p(p^0)$.

Im nächsten Lemma zeigen wir, dass wir eine analoge Aussage für alle Punkte $p \in Y$ und alle $x \in X$ mit $\operatorname{card} I(x) > 1$ treffen können.

**Lemma 6.26.** *Seien Punkte* $p^0 \in Y$ *und* $x \in \widehat{\Psi}_p(p^0)$ *gegeben mit* $\operatorname{card} I(x) > 1$. *Dann existiert für jeden Index* $i \in I(x)$ *eine natürliche Zahl* $t_i^* \in \mathbb{N}$ *mit*

$$t_i^* e^i \in \widehat{\Psi}_p(p^0) \quad \text{und} \quad \bar{\phi}_p(p^0) \ge E(t_i^* e^i, p^0) \ge E(x, p^0).$$

*Beweis.* Sei ein $x \in X$ gegeben mit $\operatorname{card} I(x) > 1$ und sei $p^0 \in \operatorname{cl} P(x)$. Dann existiert eine Folge $\{p^k\} \subseteq P(x)$ mit $\lim\limits_{k\to\infty} p^k = p^0$. Sei nun

$$t_i^k := \max_t \{t \in \mathbb{N}:\ t \le \beta_i,\ tp_i^k \le b\} \qquad \text{für alle Indizes } i \in I(x) \text{ und } k.$$

O.B.d.A. können wir dabei annehmen, dass natürliche Zahlen $t_i^*$ existieren mit $t_i^* = t_i^k$ für alle Indizes $i \in I(x)$ und $k$. Weiter folgt $x \in \Psi(p^k)$ aus $\{p^k\} \subseteq P(x)$ und somit $t_i^* e^i \in \Psi(p)$ für alle Indizes $i \in I(x)$ (siehe Lemma 6.12). Demzufolge ist $p^k \in R(t_i^* e^i)$ für alle Indizes $i \in I(x)$. Wegen der Wahl der $t_i^k$ folgt aus Lemma 6.23 also $p^k \in \operatorname{cl} P(t_i^* e^i)$ für alle Indizes $i \in I(x)$. Folglich gilt auch $p^0 \in \operatorname{cl} P(t_i^* e^i)$ für alle Indizes $i \in I(x)$.

Weiter gilt $\phi_p(p^k) = E(x, p^k) \le E(t_i^* e^i, p^k)$ wegen $\{p^k\} \subseteq P(x)$ und wegen $t_i^* e^i \in \Psi(p)$ für alle Indizes $i \in I(x)$ und $k$. Auf Grund der Stetigkeit der Funktion $E(\cdot,\cdot)$ folgt somit die Behauptung. □

Wir fassen nun unsere bisherigen Ergebisse im folgenden Theorem zusammen.

**Theorem 6.27.** *Sei* $RX \subseteq X$ *eine diskrete Menge bestehend aus den folgenden Elementen:*

$$\begin{aligned} \mathbf{0} \in RX &\quad \textit{im Fall} \quad \min\{b, Ma_i\} < u_i \ \textit{für alle}\ i = 1, \dots, n \\ te^i \in RX &\quad \textit{im Fall} \quad l_{i1}(t) < l_{i2}(t) \end{aligned}$$

*mit*

$$l_{i1}(t) := \begin{cases} 0 & \textit{im Fall } t = \beta_i \\ \min\{c_i, b/(t+1)\} & \textit{im Fall } t < \beta_i \end{cases}$$

*und*

$$l_{i2}(t) := \begin{cases} \min\{Ma_i, b/t, u_i, \min\limits_{j\neq i:\, u_j \le b} \frac{u_j a_i}{a_j}\} & \textit{im Fall } t = 1 \\ \\ \min\{c_i, Ma_i, b/t, u_i, \min\limits_{j\neq i:\, u_j \le b} \frac{u_j a_i}{a_j}\} & \textit{im Fall } t > 1. \end{cases}$$

*Für alle Punkte $x \notin RX$ und für alle $p \in \operatorname{cl} R(x)$ existiert ein $\bar{x} \in RX$ mit*

$$p \in \operatorname{cl} P(\bar{x}) \quad \textit{und} \quad E(x,p) \le E(\bar{x},p) \le \bar{\phi}_p(p).$$

**Bemerkungen:**1.) Wenn wir die Bezeichnungen $l_{i1}(t)$ und $l_{i2}(t)$ verwenden, so erhalten wir aus Lemma 6.23

$$\operatorname{cl} P(te^i) = \operatorname{cl} R(te^i) \cap \{p \in Y : \; p_i \in [l_{i1}(t); l_{i2}(t)]\} \tag{6.23}$$

für alle Punkte $te^i \in RX \backslash \{\mathbf{0}\}$.

2.)Für den Fall $\beta = (1,1,\ldots,1)^\top$ gilt stets $l_{i1}(1) = 0 < l_{i2}(1)$. Somit ist dann

$$\begin{array}{rcll} RX & = & \{\mathbf{0}, e^1, e^2, \ldots, e^n\} & \text{falls } \min\{Ma_i, b\} < u_i \text{ ist für alle } i = 1,\ldots,n \\ RX & = & \{e^1, e^2, \ldots, e^n\} & \text{falls ein Index } i \text{ existiert mit } \min\{Ma_i, b\} \ge u_i. \end{array}$$

Für alle Punkte $p \in Y$ sei im folgenden

$$\widehat{R\Psi}_p(p) := \{x \in RX : \; p \in \operatorname{cl} P(x)\}. \tag{6.24}$$

Dies entspricht offensichtlich

$$\widehat{R\Psi}_p(p) = \widehat{\Psi}_p(p) \cap RX. \tag{6.25}$$

Dann gilt auf Grund von Theorem 6.27 für alle Punkte $p \in Y$

$$\bar{\phi}_p(p) = \max_{x \in \widehat{R\Psi}_p(p)} E(x,p). \tag{6.26}$$

Damit wurde die Anzahl der Punkte $x \in X$, welche man für die Berechnung der schwach pessimistischen Lösungfunktion benötigt, erheblich reduziert. Dabei ist natürlich die Berechnung der Mengen $\widehat{R\Psi}_p(p)$ nötig. Dies ist aber möglich, da wir in Lemma 6.22 und Lemma 6.23 die entsprechenden Mengen $\operatorname{cl} P(x)$ angeben konnten.
Wir betrachten hierfür das folgende Theorem, wobei wir die Bezeichnungen $l_{i1}(t)$ und $l_{i2}(t)$ aus Theorem 6.27 übernehmen.

**Theorem 6.28.** *Sei $p \in Y$ gegeben. Dann besteht die Menge $\widehat{R\Psi}_p(p)$ aus den folgenden Elementen*

$$\begin{array}{rll} \mathbf{0} \in \widehat{R\Psi}_p(p) & \textit{im Fall} & \mathbf{0} \in \bar{\Psi}(p) \textit{ mit } \min\{Ma_i, b\} < u_i \textit{ für alle } i = 1,\ldots,n, \\ te^i \in \widehat{R\Psi}_p(p) & \textit{im Fall} & te^i \in \bar{\Psi}(p) \textit{ mit } te^i \in RX \textit{ und } p_i \in [l_{i1}(t); l_{i2}(t)]. \end{array}$$

*Beweis.* Laut Definition (6.24) ist genau dann $\mathbf{0} \in \widehat{R\Psi}_p(p)$, wenn $\mathbf{0} \in RX$ und $p \in \operatorname{cl} P(\mathbf{0})$ gelten. Dabei gilt wegen Theorem 6.27 $\mathbf{0} \in RX$ genau dann, wenn die Bedingung $\min\{Ma_i, b\} < u_i$ für alle $i = 1, \dots, n$ erfüllt ist. Weiter ist $\operatorname{cl} P(\mathbf{0}) = \operatorname{cl} R(\mathbf{0})$ im Fall $\mathbf{0} \in RX$ (Lemma 6.22), d.h. die Aussagen $\mathbf{0} \in \bar{\Psi}(p)$ und $p \in \operatorname{cl} P(\mathbf{0})$ sind zueinander äquivalent. Demzufolge gelten für $x = \mathbf{0}$ die Aussagen des Theorems.

Sei $x = te^i$. Dann gilt laut Definition (6.24) genau dann $x \in \widehat{R\Psi}_p(p)$, wenn $x \in RX$ ist und $p \in \operatorname{cl} P(x)$. Dabei entspricht $x \in RX$ der Bedingung $l_{i1}(t) < l_{i2}(t)$ (Theorem 6.27). Weiter ist wegen (6.23)

$$\operatorname{cl} P(x) = \operatorname{cl} R(x) \cap \{p \in Y : \; l_{i1}(t) \le p_i \le l_{i2}(t)\}.$$

Demzufolge gilt $p \in \operatorname{cl} P(x)$ genau dann, wenn $p_i \in [l_{i1}(t); l_{i2}(t)]$ und $p \in \operatorname{cl} R(x)$ und somit $x \in \bar{\Psi}(p)$ ist. Somit gelten für $x = te^i$ die Aussagen des Theorems.

Weitere Elemente können nicht in der Menge $\widehat{R\Psi}_p(p)$ liegen auf Grund von (6.24) und der Definition der Menge $RX$. □

Da wir nun die Mengen $\widehat{R\Psi}_p(p)$ bestimmen können für alle Punkte $p \in Y$, können wir also mit Hilfe der Formel (6.26) die schwache pessimistische Lösungsfunktion

$$\bar{\phi}_p(p) = \max_{x \in \widehat{R\Psi}_p(p)} E(x, p)$$

berechnen. Wir demonstrieren dies am folgenden Beispiel.

**Beispiel 6.5.** *Sei $n = 2$, $a = (1, 2)^\top$, $b = 4$, $M = 10$, $u = (5, 5)^\top$ $\beta = (2, 1)^\top$ und $c = (1.5, 3)^\top$. Dann ist offensichtlich $RX \subseteq \{\mathbf{0}, e^1, 2e^1, e^2\}$. Wir überprüfen also nun diese Elemente. Wegen $b < u_1$, $b < u_2$ gilt $\mathbf{0} \in RX$. Weiter ist*

$$\begin{aligned}
l_{11}(1) = 1.5 \quad &< \quad l_{12}(1) = \min\{10, 4, 5\} = 4, && \text{d.h. } e^1 \in RX\\
l_{11}(2) = 0 \quad &< \quad l_{12}(2) = \min\{1.5, 10, 4, 5\} = 1.5, && \text{d.h. } 2e^1 \in RX\\
l_{21}(1) = 0 \quad &< \quad l_{22}(1) = \min\{20, 4, 5\} = 4, && \text{d.h. } e^2 \in RX.
\end{aligned}$$

*Demzufolge ist also $RX = \{\mathbf{0}, e^1, 2e^1, e^2\}$. Wir betrachten nun den Punkt $p = (1, 2)^\top$. Dann erhalten wir mit Theorem 6.19 die erweiterte Lösungsmenge*

$$\bar{\Psi}(p) = \{e^1, 2e^1, e^2, e^1 + e^2, 2e^1 + e^2\}$$

*und somit $RX \cap \bar{\Psi}(p^0) = \{e^1, 2e^1, e^2\}$. Weiter gilt*

$$p_1 \in [l_{11}(2); l_{12}(2)] \text{ und } p_2 \in [l_{21}(1); l_{22}(1)] \text{ aber } p_1 \notin [l_{11}(1); l_{12}(1)].$$

*Wegen Theorem 6.28 ist also $\widehat{R\Psi}_p(p) = \{2e^1, e^2\}$. Demzufolge erhalten wir*

$$\bar{\phi}_p(p) = \max\{E(2e^1, p), E(e^2, p)\} = \max\{-1, -1\} = -1.$$

## 6.8 Die Mengen $\bar{L}(x)$ und $L_p(x)$

Unser Ziel ist es, die Optimalitätsbedingungen aus Theorem 2.8, Folgerung 2.10 und Folgerung 2.12 für das Assortment Pricing Problem (6.1) zu spezifizieren. Um insbesondere Folgerung 2.10 anwenden zu können, müssen wir jedoch zuvor die Mengen

$$\bar{L}(x) := \operatorname*{locmax}_p \{E(x,p) : \; p \in \operatorname{cl} R(x)\}$$

für alle Punkte $x \in X$ bestimmen (siehe (2.24)). Weiterhin benötigen wir die Mengen

$$L_p(x) := \operatorname*{locmax}_p \{E(x,p) : \; p \in \operatorname{cl} P(x)\}$$

für alle Punkte $x \in X$ (siehe (2.23)), um im pessimistischen Fall das Theorem 2.8 anwenden zu können.

Wir unterteilen dieses Kapitel somit wie folgt. Zunächst bestimmen wir die Mengen $\bar{L}(x)$ für alle Punkte $x \in X$. Danach untersuchen wir die Mengen $L_p(x)$ für alle Punkte $x \in X$.

### 6.8.1 Die Mengen $\bar{L}(x)$

In diesem Abschnitt wollen wir die Mengen

$$\bar{L}(x) := \operatorname*{locmax}_p \{E(x,p) : \; p \in \operatorname{cl} R(x)\} \tag{6.27}$$

für alle Punkte $x \in X$ bestimmen. Wir beginnen unsere Untersuchungen mit dem Punkt $\mathbf{0} \in X$.

Angenommen es gilt $R(\mathbf{0}) = \emptyset$. Dann ist offensichtlich $\operatorname{cl} R(\mathbf{0}) = \emptyset$ und somit $\bar{L}(\mathbf{0}) = \emptyset$. Sei also im folgenden $R(\mathbf{0}) \neq \emptyset$, d.h. es sei $b < u_i$ oder $Ma_i \leq u_i$ für alle Indizes $i = 1, \ldots, n$ (siehe Theorem 6.5). Dann gilt

$$\begin{aligned} \bar{L}(\mathbf{0}) &= \operatorname*{locmax}_p \{E(p,\mathbf{0}) : \; p \in \operatorname{cl} R(\mathbf{0})\} \\ &= \operatorname{locmax}\{0 : \; p \in \operatorname{cl} R(\mathbf{0})\} \\ &= \operatorname{cl} R(\mathbf{0}). \end{aligned} \tag{6.28}$$

Somit müssen wir nur noch die Mengen $\bar{L}(x)$ untersuchen mit $x \in X \backslash \{\mathbf{0}\}$.

**Theorem 6.29.** *Sei $x \in X$ und sei $i_0 \in I(x)$ beliebig. Außerdem sei $p^* \in Y$ ein Punkt mit*

$$\begin{aligned} p^*_{i_0} &:= \min\{Ma_{i_0}, \frac{b \cdot a_{i_0}}{a^\top x}, \min_{i \in I(x)} \frac{u_i \cdot a_{i_0}}{a_i}, \min_{k \notin I(x):\, u_k \leq b} \frac{u_k \cdot a_{i_0}}{a_k}\} \\ p^*_i &:= p^*_{i_0} \frac{a_i}{a_{i_0}} \quad \textit{für alle Indizes } i \in I(x) \backslash \{i_0\} \\ p^*_k &:= u_k \quad \textit{für alle Indizes } k \notin I(x). \end{aligned}$$

*Dann gilt $p^* \in \bar{L}(x)$. Weiter ist $\bar{L}(x) = \{p \in \mathrm{cl}\, R(x) :\ p_{i_0} = p^*_{i_0}\}$, d.h.*

$$\bar{L}(x) = \{p \in Y :\ p_i = p^*_i \ \ \forall i \in I(x),\ p_k \in [p^*_{i_0}\frac{a_k}{a_{i_0}}, u_k] \quad \forall k \notin I(x) : \quad b \geq u_k,$$
$$p_k \in [\min\{b, p^*_{i_0}\frac{a_k}{a_{i_0}}\}, u_k] \quad \forall k \notin I(x) : \quad b < u_k\}.$$

*Beweis.* Wegen Theorem 6.6 gilt offensichtlich $p^* \in \mathrm{cl}\, R(x)$. Weiter gelten für alle Punkte $p \in \mathrm{cl}\, R(x)$ die Ungleichungen $p_{i_0} \leq p^*_{i_0}$ und $p_{i_0} = p_i \frac{a_{i_0}}{a_i}$ für alle Indizes $i \in I(x)$. Wir erhalten somit

$$\begin{aligned} E(x,p) &= \sum_{i \in I(x)} x_i(p_i - c_i) = \sum_{i \in I(x)} x_i(p_{i_0}\frac{a_i}{a_{i_0}} - c_i) \\ &\leq \sum_{i \in I(x)} x_i(p^*_{i_0}\frac{a_i}{a_{i_0}} - c_i) = \sum_{i \in I(x)} x_i(p^*_i - c_i) = E(x,p^*) \end{aligned}$$

für alle Punkte $p \in \mathrm{cl}\, R(x)$. Folglich gilt

$$p^* \in \mathrm{argmax}\{E(x,p) :\ p \in \mathrm{cl}\, R(x)\} \subseteq \bar{L}(x).$$

Sei ein Punkt $p \in \mathrm{cl}\, R(x)$ gegeben mit $p_{i_0} < p^*_{i_0}$. Weiter sei $h \in \mathbb{R}^n$ ein Punkt mit $h_i = a_i$ für alle Indizes $i$ mit $p_i < u_i$ und mit $h_i = 0$ für alle Indizes $i$ mit $p_i = u_i$. Dann gilt $h_{i_0} = a_{i_0}$ wegen $p_{i_0} < p^*_{i_0} \leq u_{i_0}$.

Weiter erhalten wir $p + th \in \mathrm{cl}\, R(x)$ für alle hinreichen kleinen reellen Zahlen $t > 0$ (siehe Theorem 6.6). Außerdem ist $E(x,p) < E(x, p+th)$ für alle diese Zahlen $t > 0$, d.h. der Funktionswert wächst in der Richtung $h$. Demzufolge gilt $p \notin \bar{L}(x)$. Hieraus folgt nun $\bar{L}(x) = \{p \in \mathrm{cl}\, R(x) :\ p_{i_0} = p^*_{i_0}\}$. Zusammen mit Theorem 6.6 erhalten wir somit

$$\bar{L}(x) = \{p \in Y :\ p_i = p^*_i \ \ \forall i \in I(x),\ p_k \in [p^*_{i_0}\frac{a_k}{a_{i_0}}, u_k] \quad \forall k \notin I(x) : \quad b \geq u_k,$$
$$p_k \in [\min\{b, p^*_{i_0}\frac{a_k}{a_{i_0}}\}, u_k] \quad \forall k \notin I(x) : \quad b < u_k\}.$$

□

**Beispiel 6.6.** *Seien $n = 2$, $a = (1,2)^\top$, $b = 4$, $M = 6$, $\beta = (1,1)^\top$ und $u = (5,5)^\top$. Dann gilt wegen Theorem 6.29 und (6.28)*

$$\begin{aligned} \bar{L}(\mathbf{0}) &= \{p \in \mathbb{R}^2 : 4 \leq p_1 \leq 5,\ 4 \leq p_2 \leq 5\} \\ \bar{L}(e^1) &= \{p \in \mathbb{R}^2 :\ p_1 = 4,\ p_2 \in [4,5]\} \\ \bar{L}(e^2) &= \{p \in \mathbb{R}^2 :\ p_1 \in [2,5],\ p_2 = 4\} \\ \bar{L}(e^1 + e^2) &= \{p \in \mathbb{R}^2 :\ p_1 = 4/3,\ p_2 = 8/3\}. \end{aligned}$$

### 6.8.2 Die Mengen $L_p(x)$

In diesem Kapitel wollen wir die Mengen

$$L_p(x) := \underset{p}{\text{locmax}}\{E(x,p) : \ p \in \operatorname{cl} P(x)\} \tag{6.29}$$

für alle Punkte $x \in X$ bestimmen. Zunächst untersuchen wir die Mengen $L_p(x)$ für alle Punkte $x \in RX$, da wir für diese Punkte die Mengen $\operatorname{cl} P(x)$ explizit angeben können (siehe Lemma 6.22 und Lemma 6.23).

Im Fall $\mathbf{0} \in RX$ gilt $\operatorname{cl} R(\mathbf{0}) = \operatorname{cl} P(\mathbf{0}) \neq \emptyset$ (Lemma 6.22, Theorem 6.27). Demzufolge ist

$$\begin{aligned} L_p(\mathbf{0}) &= \underset{p}{\text{locmax}}\{E(p,\mathbf{0}) : \ p \in \operatorname{cl} P(\mathbf{0})\} \\ &= \text{locmax}\{0 : \ p \in \operatorname{cl} P(\mathbf{0})\} \\ &= \operatorname{cl} P(\mathbf{0}) = \operatorname{cl} R(\mathbf{0}). \end{aligned} \tag{6.30}$$

Sei nun $x \in RX$ mit $x \neq \mathbf{0}$. Dann existieren ein $t \in \mathbb{N}$ und ein Index $i$ mit $x = te^i$ und $l_{i1}(t) < l_{i2}(t)$, wobei wir die Bezeichnungen $l_{i1}(t)$, $l_{i2}(t)$ aus Theorem 6.27 übernehmen. Für diese Punkte gilt das folgende Theorem.

**Theorem 6.30.** *Sei ein Punkt $x = te^i$ gegeben mit $x \in RX$. Dann gilt*

$$L_p(x) = \{p \in \operatorname{cl} R(x) : \ p_i = l_{i2}(t)\},$$

*wobei*

$$l_{i2}(t) = \begin{cases} \min\{Ma_i, b/t, u_i, \min\limits_{j \neq i:\, u_j \leq b} \frac{u_j a_i}{a_j}\} & \textit{im Fall } t = 1 \\ \min\{c_i, Ma_i, b/t, u_i, \min\limits_{j \neq i:\, u_j \leq b} \frac{u_j a_i}{a_j}\} & \textit{im Fall } t > 1 \quad \textit{ist.} \end{cases}$$

*Beweis.* Wegen $te^i \in RX$ gilt $l_{i1}(t) < l_{i2}(t)$ (Theorem 6.27) und

$$\operatorname{cl} P(te^i) = \operatorname{cl} R(te^i) \cap \{p \in Y : \ p_i \in [l_{i1}(t); l_{i2}(t)]\}$$

(siehe (6.23)). Wir betrachten nun zunächst einen Punkt $p^* \in Y$ mit $p_i^* := l_{i2}(t)$ und $p_k^* := u_k$ für alle Indizes $k \neq i$. Wegen

$$l_{i2} \leq \min\{Ma_i, b/t, u_i, \min_{j \neq i:\, u_j \leq b} \frac{u_j a_i}{a_j}\}$$

gilt dann offensichtlich $p^* \in \operatorname{cl} R(te^i)$ (Theorem 6.6). Aus $p_i^* \in [l_{i1}(t); l_{i2}(t)]$ folgt somit $p^* \in \operatorname{cl} P(te^i)$. Außerdem erhalten wir

$$E(te^i, p) = t(p_i - c_i) \leq t(p_i^* - c_i) = E(p^*, x)$$

für alle Punkte $p \in \operatorname{cl} P(te^i)$. Folglich ist

$$p^* \in \text{argmax}\{E(te^i, p) : \ p \in \operatorname{cl} P(te^i)\} \subseteq L_p(te^i).$$

Sei ein Punkt $p \in \operatorname{cl} P(x)$ gegeben mit $p_i < p_i^* = l_{i2}(t)$. Weiter sei $h \in \mathbb{R}^n$ ein Punkt mit $h_k = a_k$ für alle Indizes $k$ mit $p_k < u_k$ und mit $h_k = 0$ für alle Indizes $k$ mit $p_k = u_k$. Dann gilt $h_i = a_i$ wegen $p_i < p_i^* \leq u_{i_0}$.

Weiter erhalten wir $p + \epsilon h \in \operatorname{cl} P(x)$ für alle hinreichen kleinen reellen Zahlen $\epsilon > 0$ (siehe (6.23)). Außerdem ist $E(te^i, p) < E(te^i, p + \epsilon h)$ für alle diese Zahlen $\epsilon > 0$, d.h. der Funktionswert wächst in der Richtung $h$. Demzufolge gilt $p \notin L_p(te^i)$. Hieraus folgt nun $L_p(te^i) = \{p \in \operatorname{cl} R(x) : \; p_i = l_{i2}(t)\}$. $\square$

Für einige Punkte $x \notin RX$ können wir die Mengen $\operatorname{cl} P(x)$ nicht explizit angeben, aber wir können dennoch Aussagen über die Mengen $L_p(x)$ treffen. Es gilt für diese Punkte das folgende Lemma.

**Lemma 6.31.** *Sei ein Punkt $x \notin RX$ gegeben und ein Punkt $p^0 \in Y$, für welche*

$$x \in \widehat{\Psi}_p(p^0), \quad \bar{\phi}_p(p^0) = E(x, p^0) \quad \textit{und} \quad p^0 \notin L_p(x)$$

*gilt. Dann existiert ein Punkt $\bar{x} \in RX$ mit*

$$\bar{x} \in \widehat{\Psi}_p(p^0), \quad \bar{\phi}_p(p^0) = E(\bar{x}, p^0) \quad \textit{und} \quad p^0 \notin L_p(\bar{x}).$$

*Beweis.* Seien ein Punkt $x \notin RX$ gegeben und ein Punkt $p^0 \in \operatorname{cl} P(x)$. Wir nehmen nun an, dass $p^0 \notin L_p(x)$ gilt. Wegen der Definition

$$L_p(x) = \operatorname{locmax}\{E(x, p) : \; p \in \operatorname{cl} P(x)\} \quad \text{(siehe (6.29))}$$

existiert somit eine Folge $\{p^k\} \subseteq \operatorname{cl} P(x)$ mit $\lim\limits_{k\to\infty} p^k = p^0$ und mit $E(x, p^k) > E(x, p^0)$ für alle $k$. Wegen Theorem 6.27 und da die Menge $RX$ endlich ist, können wir o.B.d.A. annehmem, dass ein $\bar{x} \in RX$ existiert mit $\{p^k\} \subseteq P(\bar{x})$ und mit $E(\bar{x}, p^k) \geq E(x, p^k)$ für alle $k$.

Wegen $\{p^k\} \subseteq P(\bar{x})$ gilt nun $p^0 \in P(\bar{x})$, d.h. $\bar{x} \in \widehat{\Psi}_p(p^0)$. Somit ist auf Grund der Voraussetzung

$$\bar{\phi}_p(p^0) = E(x, p^0) \geq E(\bar{x}, p^0) \quad \text{(siehe (6.17))}.$$

Demzufolge gilt also

$$E(\bar{x}, p^k) \geq E(x, p^k) > E(x, p^0) \geq E(\bar{x}, p^0)$$

für alle $k$. Hieraus folgt nun $p^0 \notin L_p(\bar{x})$. Außerdem erhalten wir $E(x, p^0) = E(\bar{x}, p^0)$ durch Berechnung des Grenzwertes für $k \to \infty$. Somit gelten die Aussagen des Lemmas. $\square$

## 6.9 Optimalitätsbedingungen

In diesem Kapitel wollen wir die Optimalitätsbedingungen für den optimistischen und den pessimistischen Fall diskutieren. Dabei sollen die Bedingungen aus Theorem 2.8, Folgerung 2.10 und Theorem 2.11 für das Assortment Pricing Problem (6.1) spezifiziert werden.

### 6.9.1 Der optimistische Fall

Für die schwach lokal optimistischen Lösungen erhalten wir nun aus Folgerung 2.10 das folgende Theorem.

**Theorem 6.32.** *Es ist* $p^0 \in \operatorname{locmax}\{\bar\phi_o(p) : \; p \in Y\}$ *genau dann, wenn* $p^0 \in \bar L(x)$ *gilt für alle Punkte* $x \in \bar\Psi(p^0)$ *mit* $\bar\phi_o(p^0) = E(x, p^0)$.

*Beweis.* Der Beweis folgt direkt aus Folgerung 2.10. □

Die Bedingungen des Theorems können nun leicht überprüft werden, indem der Wert $\bar\phi_o(p^0)$ mit Theorem 6.21, die erweiterte Lösungsmenge mit Theorem 6.19 und die Mengen $\bar L(x)$ mit (6.28) bzw. Theorem 6.29 berechnet werden. Dabei muss man im Fall $x \neq \mathbf{0}$ mit $i_0 \in I(x)$ offenbar nur die Bedingung

$$p^0_{i_0} = \min\{Ma_{i_0}, \frac{ba_{i_0}}{a^\top x}, \min_{i \in I(x)} \frac{u_i a_{i_0}}{a_i}, \min_{k \notin I(x):\, u_k \leq b} \frac{u_k a_{i_0}}{a_k}\}$$

überprüfen, um die Bedingung $p^0 \in \bar L(x)$ zu verifizieren.

Da die Funktion $\bar\phi_o : Y \to \mathbb{R}$ oberhalbstetig ist (siehe Theorem 2.4) und die Menge $Y$ kompakt, existiert stets eine schwach lokal optimistische Lösung. Es gilt also

$$\operatorname{locmax}\{\bar\phi_o(p) : \; p \in Y\} \neq \emptyset. \tag{6.31}$$

Weiter können wir nun mit Hilfe von Folgerung 2.12 Optimalitätsbedingungen für lokal optimistische Lösungen aufstellen. Wir erhalten das folgende Theorem.

**Theorem 6.33.** *Es ist* $p^0 \in \operatorname{locmax}\{\phi_o(p) : \; p \in Y\}$ *genau dann, wenn* $\phi_o(p^0) = \bar\phi_o(p^0)$ *und* $p^0 \in \operatorname{locmax}\{\bar\phi_o(p) : \; p \in Y\}$ *gilt.*

*Beweis.* Das Theorem entspricht Folgerung 2.12 für die Aufgabe (6.1). □

Im Gegensatz zu anderen Aufgabenstellungen (siehe z.B. Beispiel 2.11) existiert für die Aufgabe (6.1) stets eine lokal optimistische Lösung. Es gilt die folgende Folgerung aus Theorem 6.33.

**Folgerung 6.34.** *Es gilt*

$$u \in \operatorname{locmax}\{\bar\phi_o(p) : \; p \in Y\} \quad \textit{und} \quad u \in \operatorname{locmax}\{\phi_o(p) : \; p \in Y\}.$$

*Beweis.* Sei $x \in \bar\Psi(u)$ beliebig und somit $u \in \operatorname{cl} R(x)$. Auf Grund von Theorem 6.29 gilt dann auch $u \in \bar L(x)$. Somit ist $u \in \operatorname{locmax}\{\bar\phi_o(p) : \; p \in Y\}$ (siehe Theorem 6.32). Außerdem kann man leicht zeigen, dass $\bar\Psi(u) = \Psi(u)$ gilt. Demzufolge ist $\phi_o(u) = \bar\phi_o(u)$ und somit $u \in \operatorname{locmax}\{\phi_o(p) : \; p \in Y\}$ (siehe Theorem 6.33). □

### 6.9.2 Der pessimistische Fall

Für die schwach lokal pessimistischen Lösungen erhalten wir aus Theorem 2.8 das folgende Theorem.

**Theorem 6.35.** *Es ist* $p^0 \in \operatorname{locmax}\{\bar{\phi}_p(p) : \ p \in Y\}$ *genau dann, wenn* $p^0 \in L_p(x)$ *gilt für alle Punkte* $x \in \widehat{R\Psi}_p(p^0)$ *mit* $\bar{\phi}_p(p^0) = E(x, p^0)$.

*Beweis.* Sei $p^0 \in \operatorname{locmax}\{\bar{\phi}_p(p) : \ p \in Y\}$. Dann gilt $p^0 \in L_p(x)$ für alle Punkte $x \in \widehat{\Psi}_p(p^0)$ mit $\bar{\phi}_p(p^0) = E(x, p^0)$ (Theorem 2.8). Wegen $\widehat{R\Psi}_p(p^0) \subseteq \widehat{\Psi}_p(p^0)$ (siehe (6.24)) gelten somit die angegebenen Bedingungen.

Sei nun ein Punkt $p^0 \in Y$ gegeben und sei $p^0 \in L_p(x)$ für alle Punkte $x \in \widehat{R\Psi}_p(p^0)$ mit $\bar{\phi}_p(p^0) = E(x, p^0)$. Dann gilt wegen Lemma 6.31 und wegen (6.25) $p^0 \in L_p(x)$ für alle Punkte $x \in \widehat{\Psi}_p(p^0)$ mit $\bar{\phi}_p(p^0) = E(x, p^0)$. Aus Theorem 2.8 folgt nun $p^0 \in \operatorname{locmax}\{\bar{\phi}_p(p) : \ p \in Y\}$. □

Die Bedingungen des Theorems können nun für jeden Punkt $p^0 \in Y$ leicht überprüft werden, indem die Menge $\widehat{R\Psi}_p(p^0)$ mit Theorem 6.28 berechnet wird. Dann erhält man mit Formel (6.26) den Wert $\bar{\phi}_p(p^0)$ und mit (6.30) bzw. mit Theorem 6.30 die Mengen $L_p(x)$ für alle Punkte $x \in \widehat{R\Psi}_p(p^0)$. Dabei muss man im Fall $x = te^i$ offensichtlich nur die Bedingung $p_i^0 = l_{i2}(t)$ überprüfen, um die Bedingung $p^0 \in L_p(x)$ zu verifizieren.

Da die Funktion $\bar{\phi}_p : Y \to \mathbb{R}$ oberhalbstetig ist (siehe Theorem 2.4) und die Menge $Y$ kompakt, existiert stets eine schwach lokal pessimistische Lösung. Es gilt also

$$\operatorname{locmax}\{\bar{\phi}_p(p) : \ p \in Y\} \neq \emptyset. \tag{6.32}$$

In Analogie zu Folgerung 6.34 kann man außerdem zeigen, dass

$$u \in \operatorname{locmax}\{\bar{\phi}_p(p) : \ p \in Y\} \tag{6.33}$$

gilt. Weiter können wir nun mit Hilfe von Folgerung 2.12 Optimalitätsbedingungen für lokal pessimistische Lösungen aufstellen. Wir erhalten das folgende Theorem.

**Theorem 6.36.** *Es ist* $p^0 \in \operatorname{locmax}\{\phi_p(p) : \ p \in Y\}$ *genau dann, wenn* $\phi_p(p^0) = \bar{\phi}_p(p^0)$ *und* $p^0 \in \operatorname{locmax}\{\bar{\phi}_p(p) : \ p \in Y\}$ *gilt.*

*Beweis.* Das Theorem folgt direkt aus Folgerung 2.12. □

Im Gegensatz zum optimistischen Fall (siehe Folgerung 6.34) existiert nicht immer eine lokal pessimistische Lösung. Wir demonstrieren dies im folgenden Beispiel.

**Beispiel 6.7.** *Sei im folgenden $n = 2$, $a = (1,1)^\top$, $b = 6$, $M = 8$, $u = (5,5)^\top$, $\beta = (1,1)^\top$ und $c = (1,2)^\top$. Dann gilt $RX = \{e^1, e^2\}$. Weiter ist $L_p(e^1) = \{(5,5)^\top\} = L_p(e^2)$. Wegen Theorem 6.36 gilt demzufolge*

$$\operatorname{locmax}\{\phi_p(p) : \ p \in Y\} \subseteq \{(5,5)^\top\}.$$

*Sei also $p^0 = u = (5,5)^\top$. Dann gilt $\widehat{R\Psi}_p(p^0) = \{e^1, e^2\}$ und demzufolge*

$$\bar{\phi}_p(p^0) = \max\{4,3\} = 4.$$

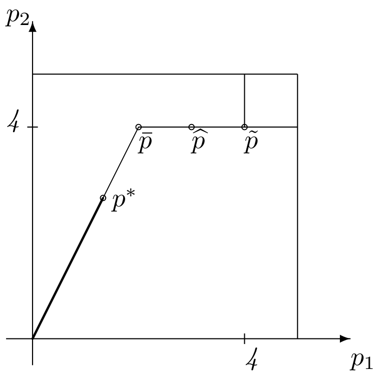
*Weiter ist $\Psi(p^0) = \{e^1, e^2\}$. Folglich gilt $\phi_p(p^0) = \min\{3,4\} = 3$. Wegen $\phi_p(p^0) \neq \bar{\phi}_p(p^0)$ ist also $p^0 \notin \operatorname{locmax}\{\phi_p(p) : \ p \in Y\}$, d.h.*

$$\operatorname{locmax}\{\phi_p(p) : \ p \in Y\} = \emptyset.$$

### 6.9.3 Einige Beispiele

In diesem Kapitel werden wir einige einfache Beispiele betrachten, um die Anwendung der Optimalitätsbedingungen zu demonstrieren.

**Beispiel 6.8.** *seien im folgenden $n = 2$, $a = (1,2)^\top$, $c = (1,2)^\top$, $\beta = (1,1)^\top$, $u = (5,5)^\top$, $M = 8$ und $b = 4$.*




*Es gilt*

$$E(e^1, p) \geq E(e^2, p) \quad \text{für} \quad p_1 + 1 \geq p_2,$$

$$E(e^1 + e^2, p) \geq E(e^2, p) \quad \text{für} \quad E(e^1, p) \geq 0,$$
$$E(e^1 + e^2, p) \geq E(e^1, p) \quad \text{für} \quad E(e^2, p) \geq 0.$$

*Wir wollen nun für einige Punkte die Optimalitätsbedingungen überprüfen.*

1. *Sei $\tilde{p} = (4,4)^\top$. Dann gilt $\Psi(\tilde{p}) = \{e^2\}$ und somit $\phi_o(\tilde{p}) = \phi_p(\tilde{p}) = E(e^2, \tilde{p}) = 2$. Weiter ist*

   $$\bar{\Psi}(\tilde{p}) = \widehat{R\Psi}_p(\tilde{p}) = \{e^1, e^2, \mathbf{0}\} \quad \text{und somit} \quad \bar{\phi}_o(\tilde{p}) = \bar{\phi}_p(\tilde{p}) = E(e^1, \tilde{p}) = 3.$$

   *Wegen $2 = \phi_o(\tilde{p}) < \bar{\phi}_o(\tilde{p}) = 3$ und $2 = \phi_o(\tilde{p}) < \bar{\phi}_o(\tilde{p}) = 3$ erhalten wir aus Theorem 6.33 und aus Theorem 6.36, dass der Punkt $\tilde{p}$ weder eine lokal optimistische noch eine lokal pessimistische Lösung ist. Wegen*

   $$\bar{\phi}_o(\tilde{p}) = \bar{\phi}_p(\tilde{p}) = E(e^1, \tilde{p}) = 3 > E(e^2, \tilde{p}) > E(\mathbf{0}, \tilde{p})$$

*und $\tilde{p} \in \bar{L}(e^1) = L_p(e^1)$ ist der Punkt $\tilde{p}$ zumindest noch eine schwache lokal optimistische bzw. pessimistische Lösung (siehe Theorem 6.32, Theorem 6.35).*

2. *Sei $\widehat{p} = (3,4)^\top$. Dann gilt $\Psi(\widehat{p}) = \{e^2\}$ und $\bar{\Psi}(\widehat{p}) = \widehat{R\Psi}_p(\widehat{p}) = \{e^1, e^2\}$. Somit ist*
$$\bar{\phi}_o(\widehat{p}) = \bar{\phi}_p(\widehat{p}) = 2 = E(e^1, \widehat{p}) = E(e^2, \widehat{p}).$$
*Da jedoch $\widehat{p} \notin \bar{L}(e^1)$ bzw. $\widehat{p} \notin L_p(e^1)$ ist, ist der Punkt $\widehat{p}$ weder eine schwache lokal optimistische noch eine schwache lokal pessimistische Lösung. Demzufolge ist $\widehat{p}$ auch keine lokal optimistische oder lokal pessimistische Lösung.*

3. *Sei $\bar{p} = (2,4)^\top$. Dann gilt $\Psi(\bar{p}) = \{e^1, e^2\} = \bar{\Psi}(\bar{p}) = \widehat{R\Psi}_p(\bar{p})$. Somit ist*
$$\phi_p(\bar{p}) = E(e^1, \bar{p}) < E(e^2, \bar{p}) = \phi_o(\bar{p}) = \bar{\phi}_o(\bar{p}) = \bar{\phi}_p(\bar{p}).$$
*Weiter gilt $\bar{p} \in \bar{L}(e^2) = L_p(e^2)$. Demzufolge ist also $\bar{p}$ eine lokal optimistische aber keine lokal pessimistische Lösung. Außerdem ist $\bar{p}$ eine schwache lokal optimistische/pessimistische Lösung.*

4. *Sei $p^* = (4/3, 8/3)^\top$. Dann gilt $\Psi(p^*) = \{e^1, e^2, e^1 + e^2\} = \bar{\Psi}(p^*)$ und $\widehat{R\Psi}_p(p^*) = \{e^1, e^2\}$. Demzufolge ist*
$$\begin{array}{rcl} \phi_p(p^*) = E(e^1, p^*) = 1/3 & < & E(e^2, p^*) = 2/3 = \bar{\phi}_p(p^*) \quad \text{und} \\ E(e^1 + e^2, p^*) = 1 & = & \phi_o(p^*) = \bar{\phi}_o(p^*) \end{array}$$
*Da außerdem zwar $p^* \in \bar{L}(e^1 + e^2)$ aber $p^* \notin L_p(e^2)$ ist, ist der Punkt $p^*$ also eine lokal optimistische aber keine (schwach) lokal pessimistische Lösung.*

**Beispiel 6.9.** *Seien*
$$\begin{array}{rcl} a^\top & = & (10, 8, 6, 12, 5, 4, 2, 3) \\ c^\top & = & (4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4) \\ p^\top & = & (5, 4, 3, 6, 4, 4, 4, 5) \\ \beta^\top & = & (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1) \\ u^\top & = & (5, 10, 6, 10, 5, 5, 10, 5) \quad \text{und} \quad M = 10,\ b = 20. \end{array}$$
*Wir wollen nun die Optimalitätsbedingungen für den Punkt $p$ überprüfen. Dafür müssen wir zunächst die Lösungsmenge und die erweiterte Lösungsmenge berechnen.*

*Zuerst untersuchen wir die Einheitsvektoren. Die Werte $p_i/a_i$ sind für die Indizes $i = 1, 2, 3, 4$ minimal. Wegen $p_1 < b$ und wegen $RX = \{e^1, e^2, \ldots, e^8\}$ gilt somit*
$$\{i : e^i \in \Psi(p)\} = \{i : e^i \in \bar{\Psi}(p)\} = \{1, 2, 3, 4\} \quad \text{und} \quad \widehat{R\Psi}_p(p) = \{e^1, e^2, e^3, e^4\}.$$

*Durch Berechnen aller zulässigen Summen erhalten wir demzufolge*

$$\Psi(p) = \bar{\Psi}(p) = \{x = \sum_{i \in I} e^i : \emptyset \neq I \subseteq \{1, 2, 3, 4\}\}.$$

*Weiter gilt*

$$E(e^1, p) = 1,\ E(e^2, p) = 0,\ E(e^3, p) = -1 \text{ und } E(e^4, p) = 2.$$

*Mit* $E(x, p) = \sum_{i \in I(x)} x_i E(e^i, p)$ *erhalten wir demzufolge*

$$\bar{\phi}_o(p) = \phi_o(p) = 3 = E(e^1 + e^4, p) = E(e^1 + e^2 + e^4, p),$$
$$\bar{\phi}_p(p) = E(e^4, p) = 2 \quad \text{and} \quad \phi_p(p) = -1 = E(e^3, p).$$

*Wegen* $\phi_p(p) \neq \bar{\phi}_p(p)$ *ist* $p$ *also keine lokal pessimistische Lösung. Da aber* $p \in L_p(e^4)$ *gilt wegen*

$$p_4 = \min\{b, Ma_4, \min_{i=1,\ldots,8} \frac{u_i a_4}{a_i}\} = 6,$$

*ist der Punkt* $p$ *eine schwache lokal pessimistische Lösung. Wir verifizieren nun die Bedingungen* $p \in L(e^1 + e^4)$ *und* $p \in L(e^1 + e^2 + e^4)$*. Wegen*

$$L(e^1 + e^4) = \{5\} \times [4, 10] \times [3, 6] \times \{6\} \times [2.5, 5] \times [2, 5] \times [1, 10] \times [1.5, 5]$$

*und*

$$L(e^1 + e^2 + e^4) = \{5\} \times \{4\} \times [3, 6] \times \{6\} \times [2.5, 5] \times [2, 5] \times [1, 10] \times [1.5, 5]$$

*sind diese Bedingungen erfüllt. Somit ist der Punkt* $p$ *eine lokal optimistische Lösung.*

*Im folgenden seien die Vektoren* $a, p, c, \beta, M$ *und* $u$ *unverändert, aber es sei jetzt* $b = 4.5$*. Dann gilt* $\Psi(p) = \bar{\Psi}(p) = \{e^2, e^3\} = \widehat{R\Psi}_p(p)$ *und*

$$\phi_o(p) = \bar{\phi}_o(p) = \bar{\phi}_p(p) = E(p, e^2) = 0 > -1 = E(p, e^3) = \phi_p(p).$$

*Durch Überprüfen der Menge* $\bar{L}(e^2) = L_p(e^2)$ *erhalten wir, dass* $p_2^* = 4.5 \neq p_2$ *gilt für alle Punkte* $p^* \in L_p(e^2) = \bar{L}(e^2)$*. Somit ist der Punkt* $p$ *weder eine schwach lokal optimistische noch eine schwach lokal pessimistische Lösung.*

## 6.10 Lösungsverfahren

Natürlich kennt man mit $p^0 = u$ stets eine lokal optimistische und schwach lokal pessimistische Lösung (siehe (6.33), Folgerung 6.34). In vielen Fällen ist jedoch der Funktionswert in diesem Punkt nicht gut genug. Betrachten wir hierfür zum Beispiel den Fall $u_i > \min\{b, Ma_i\}$ für alle Indizes $i = 1, \ldots, n$. Dann gilt $\phi_o(u) = \phi_p(u) = 0$. In der Anwendung würde dies bedeuten, dass der Produzent keinen Profit erzielt. Es ist also sinnvoll, die Algorithmen 2.1 und 2.2 zu verwenden, um ausgehend von einem Startpunkt $p^0 \in Y$ eine schwach lokal optimistische bzw. pessimistische Lösung zu bestimmen.

**Algorithmus 6.2. (Schwach lokal optimistische Lösung)**

*Eingabe:* $p^0 \in Y$

0. $k := 0$
1. *Berechne* $\bar{\Psi}(p^k)$, $\bar{\phi}_o(p^k)$ *und* $M(p^k) := \{x \in \bar{\Psi}(p^k) : \bar{\phi}_o(p^k) = E(x, p^k)\}$.
2. *Falls ein* $x^k \in M(p^k)$ *existiert mit* $p^k \notin \bar{L}(x^k)$, *so wähle ein* $p^{k+1} \in \bar{L}(x^k)$ *und gehe mit* $k := k+1$ *zu Schritt 1.; sonst Stopp.*

*Ausgabe:* $p^k \in \operatorname{locmax}\{\bar{\phi}_o(p) : \ p \in Y\}$

**Theorem 6.37.** *Der Algorithmus 6.2 berechnet in endlich vielen Iterationen eine schwach lokal optimistische Lösung.*

*Beweis.* Wenn der Algorithmus stoppt, so ersieht man leicht aus Theorem 6.32, dass der berechnete Punkt eine schwach lokal optimistische Lösung ist. Es ist also nur zu zeigen, dass der Algorithmus tatsächlich nach endlich vielen Iterationen stoppt. Angenommen dies ist nicht der Fall. Dann berechnet der Algorithmus Folgen $\{p^k\} \subseteq Y$ und $\{x^k\} \subseteq X$ mit $x^k \in M(p^k)$, $p^k \notin \bar{L}(x^k)$ und $p^{k+1} \in \bar{L}(x^k)$ für alle $k \geq 0$. Aus $p^{k+1} \in \bar{L}(x^k)$ für alle $k$ folgt weiter $x^k \in \bar{\Psi}(p^{k+1})$ und somit $\bar{\phi}_o(p^{k+1}) \geq E(x^k, p^{k+1})$ für alle $k$. Also gilt

$$\bar{\phi}_o(p^k) = E(x^k, p^k) < E(x^k, y^{k+1}) \leq \bar{\phi}_o(p^{k+1}) \text{ für alle } k.$$

Demzufolge ist $\bar{\phi}_o(p^k) < \bar{\phi}_o(p^l)$ für alle Indizes $k < l$. Da $\operatorname{card} X < \infty$ gilt, existierten zwei Indizes $k, l$ mit $k < l$ und $x^k = x^l$. Dann ist $x^k = x^l \in \bar{\Psi}(p^l)$, d.h. $p^l \in \operatorname{cl} R(x^k)$. Zusammen mit $p^{k+1} \in \bar{L}(x^k)$ und $p^l \notin \bar{L}(x^l) = \bar{L}(x^k)$ ergibt dies

$$E(x^k, p^{k+1}) > E(x^k, p^l) = E(x^l, p^l).$$

Dies ist aber ein Widerspruch zu

$$E(x^k, p^{k+1}) \leq \bar{\phi}_o(p^{k+1}) \leq \bar{\phi}_o(p^l) = E(x^l, p^l).$$

Also endet der Algorithmus nach endlich vielen Iterationen. □

Aus dem Beweis erhalten wir weiter die Ungleichung

$$\bar{\phi}_o(p^0) \leq \bar{\phi}_o(p^k) \quad \text{für alle } k, \tag{6.34}$$

wobei $p^0$ den Startpunkt und $p^k$ die durch Algorithmus 6.2 berechnete schwach lokal optimistische Lösung bezeichnet.

**Algorithmus 6.3. (Schwach lokal pessimistische Lösung)**

*Eingabe:* $p^0 \in Y$

0. $k := 0$

1. *Berechne* $\widehat{R\Psi}_p(p^k)$, $\bar{\phi}_p(p^k)$ *und*

$$M(p^k) := \{x \in \widehat{R\Psi}_p(p^k) :\ \bar{\phi}_p(p^k) = E(x, p^k)\}.$$

2. *Falls ein* $x^k \in M(p^k)$ *existiert mit* $p^k \notin L_p(x^k)$, *so wähle ein* $p^{k+1} \in L_p(x^k)$ *und gehe mit* $k := k+1$ *zu Schritt 1.; sonst Stopp.*

*Ausgabe:* $p^k \in \operatorname{locmax}\{\bar{\phi}_p(y) :\ y \in Y\}$

**Theorem 6.38.** *Der Algorithmus 6.3 berechnet in endlich vielen Iterationen eine schwach lokal pessimistische Lösung.*

*Beweis.* Der Beweis folgt direkt aus Theorem 2.14, wobei der Übergang von den Mengen $\widehat{\Psi}_p(p)$ zu den Mengen $\widehat{R\Psi}_p(p)$ durch Lemma 6.31 gerechtfertigt wird. □

Da stets eine lokal optimistische Lösung existiert (siehe Folgerung 6.34), sind wir natürlich auch an einem Algorithmus zur Berechnung einer lokal optimistischen Lösung interessiert. Ausgehend von einem Startpunkt $p^0 \in Y$ können wir hierfür die folgende Methode verwenden.

**Algorithmus 6.4. (Lokal optimistische Lösung)**

*Eingabe:* $p^0 \in Y$

0. $k := 0$

1. *Verwende Punkt* $p^k$ *und Algorithmus 6.2 zur Berechnung einer schwach lokal optimistischen Lösung* $v^k$.

2. *Gilt* $\bar{\phi}_o(v^k) = \phi_o(v^k)$, *dann Stopp; sonst gehe zu Schritt 3.*

3. *Bestimme einen Punkt* $x^k \in \bar{\Psi}(v^k)$ *mit* $E(x^k, v^k) = \bar{\phi}_o(v^k)$. *Wähle weiter einen Punkt* $p^{k+1} \in \bar{L}(x^k)$ *mit* $p^{k+1} \neq v^k$ *und* $p^{k+1} \in R(x^k)$.
   *Setze* $k := k+1$ *und gehe zu Schritt 1.*

*Ausgabe:* $p^k \in \operatorname{locmax}\{\phi_o(p) :\ p \in Y\}$

Wir erinnern uns, dass eine schwach lokal optimistische Lösung $v^k$ keine lokal optimistische Lösung ist, wenn ein Punkt $x^k \in \bar{\Psi}(v^k)$ existiert mit $\phi_o(v^k) < E(x^k, v^k) = \bar{\phi}_o(v^k)$ (Theorem 6.33). In diesem Fall wählt also der Algorithmus einen Punkt $p^{k+1} \in \bar{L}(x^k) \cap R(x)$ und sucht erneut nach einer schwach lokal optimistischen Lösung.

**Theorem 6.39.** *Algorithmus 6.4 berechnet eine lokal optimistische Lösung.*

*Beweis.* Aus den Optimalitätsbedingungen von Theorem 6.33 ist ersichtlich, dass wir eine lokal optimistische Lösung gefunden haben, wenn der Algorithmus stoppt. Wir haben somit nur zu zeigen, dass der Algorithmus endlich ist.

Angenommen dies ist nicht der Fall. Dann berechnet der Algorithmus Folgen $\{p^k\} \subseteq Y$, $\{v^k\} \subseteq Y$ und $\{x^k\} \subseteq X$. Dabei gilt $p^{k+1}, v^k \in \bar{L}(x^k)$ für alle $k \geq 0$, da $v^k$ eine schwach lokal optimistische Lösung ist. Aus der Ungleichung (6.34) erhalten wir somit

$$\bar{\phi}_o(p^k) \leq \bar{\phi}_o(v^k) = E(x^k, v^k) = E(x^k, p^{k+1}) \leq \phi_o(p^{k+1}) \leq \bar{\phi}_o(p^{k+1}) \quad \forall k \geq 0.$$

Angenommen es gilt $x^k = x^l$ für zwei Indizes $k < l$. Dann ist

$$E(x^k, v^k) \leq \phi_o(p^{k+1}) \leq \bar{\phi}_o(p^{k+1}) \leq \bar{\phi}_o(p^l) \leq \bar{\phi}_o(v^l) = E(x^l, v^l).$$

Zusammen mit $v^k \in \bar{L}(x^k)$ und $v^l \in \bar{L}(x^l) = \bar{L}(x^k)$ erhalten wir

$$E(x^k, v^k) = \phi_o(p^{k+1}) = \bar{\phi}_o(p^{k+1}) = \bar{\phi}_o(p^l) = E(x^l, v^l).$$

Hieraus ergibt sich nun $p^{k+1} = v^{k+1}$ und $\phi_o(p^{k+1}) = \bar{\phi}_o(p^{k+1})$. Dies ist aber ein Widerspruch zu

$$\phi_o(v^{k+1}) < E(v^{k+1}, x^{k+1}) = \bar{\phi}_o(v^{k+1}).$$

Somit sind alle Elemente der Folge $\{x^k\}$ voneinander verschieden. Dies jedoch ist ein Widerspruch zur endlichen Kardinalität der Menge $X$. Somit ist der Algorithmus endlich. $\square$

**Bemerkung:** Da $x^k \in \bar{\Psi}(v^k)$ und $x^k \notin \Psi(v^k)$ für all $k$ gilt, wird die Eigenschaft $p^{k+1} \neq v^k$ durch die Bedingung $p^{k+1} \in R(x^k) \cap \bar{L}(x^k)$ impliziert. Somit ist also $p^{k+1}$ ein beliebiger Punkt der Menge $R(x^k) \cap \bar{L}(x^k)$.

Wie sehen also diese Mengen aus? Aus (6.9), Theorem 6.5, Theorem 6.29 und (6.28) erhält man offensichtlich

$$R(\mathbf{0}) \cap \bar{L}(\mathbf{0}) = \{p \in \mathbb{R}^n : \; Ma_i \leq p_i \leq u_i \text{ oder } b < p_i \leq u_i \text{ für alle } i = 1, \ldots, n\}$$

und

$$\begin{aligned} R(x) \cap \bar{L}(x) = \{p \in \mathbb{R}^n_+ \quad : \quad & p_{i_0} = a_{i_0} \min\{M, \frac{b}{a^\top x}, \min_{i \in I(x)} \frac{u_i}{a_i}, \min_{k \notin I(x), u_k \leq b} \frac{u_k}{a_k}\} \\ & p_i = p_{i_0} \frac{a_i}{a_{i_0}} \qquad\qquad\qquad \forall i \in I(x) \backslash \{i_0\}, \\ & p_k \in [p_{i_0} \frac{a_k}{a_{i_0}}, u_k] \qquad\qquad \forall k \notin I(x) : \; u_k \leq b, \\ & p_k \in [p_{i_0} \frac{a_k}{a_{i_0}}, u_k] \cup (b, u_k] \quad \forall k \notin I(x) : \; u_k > b\} \end{aligned}$$

für alle Punkte $x \in X$ und alle Indizes $i_0 \in I(x)$.

**Beispiel 6.10.** *Es seien*

$$\begin{aligned} a^\top &= (10, 8, 6, 12, 5, 4, 2, 3) \\ c^\top &= (4.5, 4, 3.5, 4, 4, 4, 4, 4) \\ {p^0}^\top &= (5, 4, 3, 6, 4, 4, 4, 5) \\ \beta^\top &= (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1) \\ u^\top &= (5, 10, 4, 10, 5, 5, 10, 5) \quad \text{und} \quad b = 4.5,\ M = 20. \end{aligned}$$

*Dann gilt* $\Psi(p^0) = \bar{\Psi}(p^0) = \{e^2, e^3\}$ *und*

$$\phi_o(p^0) = \bar{\phi}_o(p^0) = E(p^0, e^2) = 0 > -0.5 = E(p^0, e^3).$$

*Beim Überprüfen der Menge* $\bar{L}(e^2)$ *erhalten wir* $p_2^* = 4.5 \neq p_2^0$ *für alle Punkte* $p^* \in \bar{L}(e^2)$. *Somit gilt* $p^0 \notin \bar{L}(e^2)$. *Demzufolge ist* $p^0$ *keine schwach lokal optimistische Lösung (siehe Theorem 6.32).*

*Wir wollen nun den Algorithmus 6.4 verwenden, um eine lokal optimistische Lösung zu berechnen. Zuerst berechnen wir ausgehend von* $p^0$ *eine schwach lokal optimistische Lösung* $v^0$ *mittels Algorithmus 6.2. Es gilt* $M(p^0) = \{e^2\}$ *aber* $p^0 \notin \bar{L}(e^2)$. *Somit wählen wir ein* $p \in \bar{L}(e^2)$, *z.B.*

$$p = (4.5, 4.5, 4, 5, 5, 5, 5, 5)^\top.$$

*Dann gilt* $\bar{\Psi}(p) = \{e^1, e^2, e^3\}$, $E(p, e^1) = 0$, $E(p, e^2) = 0.5 = E(p, e^3)$ *und* $p \in \bar{L}(e^i)$ *für* $i = 2, 3$. *Folglich ist* $p$ *eine schwach lokal optimistische Lösung. Wir setzen nun* $v^0 := p$ *und führen Algorithmus 6.4 fort. Wegen* $\Psi(v^0) = \{e^1\}$ *und* $\phi_o(v^0) = 0 < E(v^0, e^3)$ *setzen wir* $x^0 := e^3$. *Wir wählen dann einen Punkt* $p^1 \in \bar{L}(e^3) \cap R(e^3)$, *z.B.*

$$p^1 = (5, 5, 4, 5, 5, 5, 5, 5)^\top.$$

*Für den Punkt* $p^1$ *gilt* $\Psi(p^1) = \bar{\Psi}(p^1) = \{e^3\}$ *und* $p^1 \in \bar{L}(e^3)$. *Somit ist* $p^1$ *eine lokal optimistische Lösung. Der Algorithmus stoppt nun.*

Für lokal pessimistische Lösung ist es nicht möglich, einen zu Algorithmus 6.4 analogen Algorithmus anzugeben, da bei einem solchen Vorgehen das Wachstum der Lösungsfunktion nicht garantiert werden kann. Es bietet sich im pessimistischen Fall jedoch an, nach $\varepsilon$-optimalen Lösungen zu suchen. Hierzu verwenden wir die Betrachtungen aus Kapitel 3.6. Dies ist möglich, da

$$\phi_p(p) = \phi_\sigma(p) \quad \text{und} \quad \phi_p(p) = \bar{\phi}_\sigma(p)$$

für alle $p \in Y$ und für alle pessimistischen Auswahlfunktionen $\sigma \in \mathfrak{S}_p$ gilt (siehe (3.11), (3.13)). Außerdem ist zu beachten, dass nun maximiert statt minimiert wird.

Zunächst untersuchen wir die Werte

$$\phi_p^* := \operatorname{argmax}\{\phi_p(p) :\ p \in Y\} \quad \text{und} \quad \bar{\phi}_p^* := \operatorname{argmax}\{\bar{\phi}_p(p) :\ p \in Y\}. \tag{6.35}$$

Diese Werte sind gleich (siehe Lemma 3.14), d.h. es ist

$$\phi_p^* = \bar{\phi}_p^*. \tag{6.36}$$

Es gilt nun das folgende Lemma.

**Lemma 6.40.** *Es ist*

$$\phi_p^* = \bar{\phi}_p^* = \max_{x \in RX} E(x, p),$$

*wobei für alle $x \in RX$ der Punkt $p \in L_p(x)$ beliebig gewählt wird. Sei weiter*

$$GS := \{x \in RX : \ \phi_p^* = E(x, p) \ \text{ für ein } p \in L_p(x)\} \qquad (\text{„global solutions“}) \,.$$

*Dann gilt*

$$\operatorname*{argmax}_p \{\bar{\phi}_p(p) : \ p \in Y\} = \bigcup_{x \in GS} L_p(x).$$

*Beweis.* Aus der Definition (6.35) folgt

$$\bar{\phi}_p^* \geq \bar{\phi}_p(p) \geq E(x, p)$$

für alle Punkte $x \in RX$ und alle Punkte $p \in L_p(x)$ wegen $x \in \widehat{R\Psi}_p(p)$ für alle Punkte $p \in L_p(x)$ und wegen (6.26). Es ist also

$$\phi_p^* = \bar{\phi}_p^* \geq \max_{x \in RX,\ p \in L_p(x)} E(x, p).$$

Da die Funktion $\bar{\phi}_p : Y \to \mathbb{R}$ oberhalbstetig ist und $Y$ kompakt, existiert ein $p^0 \in Y$ mit $\bar{\phi}_p^* = \bar{\phi}_p(p^0)$. Wegen (6.26) existiert weiter ein $x^0 \in \widehat{R\Psi}_p(p^0)$ mit $\bar{\phi}_p(p^0) = E(x^0, p^0)$. Demzufolge erhalten wir

$$\bar{\phi}_p^* = E(x^0, p^0) \leq E(x^0, p)$$

für alle Punkte $p \in L_p(x^0)$. Wegen $x^0 \in RX$ folgt aus der obigen Ungleichung somit

$$L_p(x^0) \subseteq \operatorname*{argmax}_p \{\bar{\phi}_p(p) : \ p \in Y\},$$

$x^0 \in GS$ und

$$\phi_p^* = \bar{\phi}_p^* = \max_{x \in RX} E(x, p),$$

wobei für alle $x \in RX$ der Punkt $p \in L_p(x)$ beliebig gewählt wird.

Sei nun $p^0 \in \operatorname{argmax}_p\{\bar{\phi}_p(p) : \ p \in Y\}$ beliebig. Dann ist $p^0$ auch eine schwach lokal pessimistische Lösung. Wegen Theorem 6.35 existiert dann ein $x \in \widehat{R\Psi}_p(p^0)$ mit $\bar{\phi}_p^* = \bar{\phi}_p(p^0) = E(x, p^0)$ und $p^0 \in L_p(x)$. Somit gilt $x \in GS$. Folglich ist $p^0 \in L_p(x)$. Hieraus folgt nun

$$\operatorname*{argmax}_p \{\bar{\phi}_p(p) : \ p \in Y\} \subseteq \bigcup_{x \in GS} L_p(x).$$

Also gelten alle Aussagen des Lemmas. $\square$

**Bemerkungen:** Wegen Theorem 6.27 besitzen alle Elemente $x \in RX$ die Form $x = \mathbf{0}$ oder $x = t_i e^i$.

1.) Gilt $\mathbf{0} \in RX$, so gilt $E(\mathbf{0}, p) = 0$ für alle Punkte $p \in L_p(\mathbf{0})$.

2.) Sei $t_i e^i \in RX$ mit $t_i \leq \beta_i$. Dann gilt auf Grund von Theorem 6.30

$$E(t_i e^i, p) = t_i(l_{i2}(t_i) - c_i),$$

wobei wir wiederum die Bezeichnungen $l_{i1}(t)$ und $l_{i2}(t)$ aus Theorem 6.27 übernehmen. Zusammen mit Theorem 6.27 erhalten wir demzufolge

$$\phi_p^* = \max_{i=1,\ldots,n} \max_{\substack{t_i=1,\ldots,\beta_i: \\ l_{i1}(t_i)<l_{i2}(t_i)}} t_i(l_{i2}(t_i) - c_i)$$

im Fall $\mathbf{0} \notin RX$ und

$$\phi_p^* = \max\{0, \max_{i=1,\ldots,n} \max_{\substack{t_i=1,\ldots,\beta_i: \\ l_{i1}(t_i)<l_{i2}(t_i)}} t_i(l_{i2}(t_i) - c_i)\}$$

im Fall $\mathbf{0} \in RX$. Um den Wert $\phi_p^*$ zu berechnen, müssen also $\sum_{i=1}^n \beta_i + 1$ Punkte auf ihre Zugehörigkeit zu $RX$ geprüft (Theorem 6.27) und dann das Maximum der zugehörigen Funktionswerte gebildet werden.

Die Berechnung des Wertes $\phi_p^*$ kann noch weiter vereinfacht werden. Wir geben die entsprechenden Ergebnisse in der folgenden Folgerung an.

**Folgerung 6.41.** *Es bezeichne $t_i^*$ die kleinste natürliche Zahl mit $t_i^* e^i \in RX$, $i = 1, \ldots, n$. Dann gilt*

$$\begin{aligned} \phi_p^* &= \max_{i=1,\ldots,n} t_i^*(l_{i2}(t_i^*) - c_i) && \textit{im Fall } \mathbf{0} \notin RX \textit{ und} \\ \phi_p^* &= \max\{0, \max_{i=1,\ldots,n} t_i^*(l_{i2}(t_i^*) - c_i)\} && \textit{im Fall } \mathbf{0} \in RX. \end{aligned}$$

*Beweis.* Sei

$$l_i := \min\{Ma_i, u_i, \min_{j \neq i:\, u_j \leq b} \frac{u_j a_i}{a_j}\}.$$

Dann lassen sich die Zahlen $l_{i1}(t)$ und $l_{i2}(t)$ aus Theorem 6.27 wie folgt schreiben:

$$l_{i1}(t) = \begin{cases} 0 & , t = \beta_i \\ \min\{c_i, b/(t+1)\} & , t < \beta_i \end{cases}, \quad l_{i2}(t) = \begin{cases} \min\{b, l_i\} & , t = 1 \\ \min\{c_i, b/t, l_i\} & , t > 1. \end{cases}$$

Angenommen es gibt ein $t_i > t_i^*$ mit $t_i e^i \in RX$. Dann ist

$$l_{i1}(t_i^*) = \min\{c_i, b/(t_i^* + 1)\} < l_{i2}(t_i^*) \leq l_i.$$

Hieraus folgt nun $l_{i1}(t-1) = \min\{c_i, b/t\} = l_{i2}(t)$ für alle $t > t_i^*$. Demzufolge gilt

$$E(te^i, l_{i2}(t)) = \min\{0, b - c_i t\} \leq \min\{0, b - c_i(t_i^* + 1)\} \leq \min\{0, b - c_i t_i^*\}$$

für alle $t > t_i^*$. Wie wir schon gezeigt haben, gilt $\min\{c_i, b/(t_i^*+1)\} < l_i$. Angenommen es ist $c_i < l_i$. Dann ist $0 < t_i^*(l_i - c_i)$ und somit

$$\min\{0, b - c_i(t_i^*+1)\} \le \min\{0, b - c_i t_i^*, t_i^*(l_i - c_i)\} \le E(t_i^* e^i, l_{i2}(t_i^*)).$$

Angenommen es ist $c_i \ge l_i$ und $b/(t_i^*+1) < l_i$. Dann gilt

$$\begin{aligned} b &< l_i t_i^* + l_i \le l_i t_i^* + c_i \\ b - c_i - c_i t_i^* &< l_i t_i^* - c_i t_i^* \\ b - c_i(t_i^*+1) &< t_i^*(l_i - c_i) \end{aligned}$$

und somit wiederum

$$\min\{0, b - c_i(t_i^*+1)\} \le \min\{0, b - c_i t_i^*, t_i^*(l_i - c_i)\} \le E(t_i^* e^i, l_{i2}(t_i^*)).$$

Demzufolge ist $E(te^i, l_{i2}(t)) \le E(t_i^* e^i, l_{i2}(t_i^*))$ für alle Punkte $te^i \in RX$. Die Aussagen der Folgerung folgen nun aus Theorem 6.40. □

Da man außerdem leicht zeigen kann, dass

$$E((t_i^*+1)e^i, l_{i2}(t_i^*+1)) < E(t_i^* e^i, l_{i2}(t_i^*))$$

gilt, folgt weiter

$$GS \subseteq \{\mathbf{0}, t_1^* e^1, t_2^* e^2, \ldots, t_n^* e^n\}. \tag{6.37}$$

Wir wollen nun nach $\varepsilon$-optimalen Lösungen suchen für den pessimistischen Fall (siehe Definition 3.6).

**Definition 6.3.** *Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann heißt ein Punkt $p^0 \in Y$ $\varepsilon$-optimale pessimistische Lösung, wenn $\phi_p(y^0) > \phi_p^* - \varepsilon$ ist.*

Wir erhalten nun das folgende Theorem.

**Theorem 6.42.** *Sei $\varepsilon > 0$. Weiter sei $x^0 \in GS$ (siehe Lemma 6.40) und es sei $p^0 \in L_p(x^0)$. Dann ist jeder Punkt $p \in R(x^0)$ mit*

$$E(x^0, p) > E(x^0, p^0) - \varepsilon$$

*eine $\varepsilon$-optimale pessimistische Lösung.*

*Beweis.* Der Beweis folgt direkt aus Theorem 3.15. □

**Bemerkungen:** 1.) Ist $\mathbf{0} \in GS$, so gilt $\phi_p^* = 0$ und $\min\{Ma_i, b\} < u_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$. Somit ist $\Psi(p) = \{\mathbf{0}\}$ für alle Punkte $p \in Y$ mit $\min\{Ma_i, b\} < p_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$. Demzufolge sind alle Elemente der Menge

$$\bigotimes_{i=1}^{n} (\min\{Ma_i, b\}; u_i]$$

global optimale pessimistische Lösungen und somit auch $\varepsilon$-optimale pessimistische Lösungen für alle $\varepsilon > 0$.

2.) Sei $t_i e^i \in GS$ für ein $i$. Dann ist $p_i^0 = l_{i2}(t_i)$ für alle Punkte $p^0 \in L_p(t_i e^i)$. Wir können die Ungleichung aus Theorem 6.42 somit wie folgt umformen:

$$\begin{array}{rcl} E(t_i e^i, p) & > & E(t_i e^i, p^0) - \varepsilon \\ t_i(p_i - c_i) & > & t_i(l_{i2}(t_i) - c_i) - \varepsilon \\ t_i p_i & > & t_i l_{i2}(t_i) - \varepsilon \\ p_i & > & l_{i2}(t_i) - \varepsilon / t_i. \end{array}$$

Demzufolge sind alle Punkte $p \in R(t_i e^i)$ mit

$$p_i \in (l_{i2}(t_i) - \varepsilon/t_i; l_{i2}(t_i)]$$

$\varepsilon$-optimale pessimistische Lösungen.

# Kapitel 7

# Schlussbemerkungen

Zwei-Ebenen–Probleme mit diskreter unterer Ebene sind hierarchische Optimierungsaufgaben, welche bisher trotz einer großen Anzahl von Anwendungsmöglichkeiten nur sehr selten untersucht wurden.

In der vorliegenden Arbeit wurden theoretische Grundlagen für die Betrachtung von diskreten Zwei-Ebenen–Problemen bereitgestellt. Dabei wurden insbesondere Optimalitätsbedingungen und Struktureigenschaften der Aufgaben der unteren und oberen Ebene diskutiert. Anhand von drei verschiedenen Problemklassen wurde aufgezeigt, auf welche Weise die theoretischen Erkenntnisse auf konkrete Aufgaben angewendet werden und wie die bei der Berechnung der zu betrachtenden Mengen und Funktionen entstehenden Schwierigkeiten in einigen Problemklassen gelöst werden können.
Die vorliegende Arbeit stellt folglich mit ihren Ergebnissen eine Konzeption für die weiterführende mathematische Behandlung von diskreten Zwei-Ebenen–Problemen dar.

Für die weitere Forschung auf dem Gebiet ergeben sich u.a. die folgenden offenen Probleme:

1. Für die Aufgaben (4.1), (5.1) und (6.1) sind die angegebenen Algorithmen zu implementieren und ihre Komplexität zu untersuchen.

2. Lassen sich die Betrachtungen zur schwach pessimistischen Lösungsfunktion aus Kapitel 6.7 verallgemeinern?

3. Für die Untersuchung von Zwei-Ebenen–Problemen mit diskreter unterer Ebene werden i.a. *alle* global optimalen Lösungen der Aufgabe der unteren Ebene benötigt.

   Für viele diskrete Optimierungsaufgaben wurden bisher jedoch nur Algorithmen zum Auffinden *einer* global optimalen Lösung entwickelt. Für welche diskreten Optimierungsaufgaben ist es möglich *alle* optimalen Lösungen zu berechnen?

4. Da für die Betrachtung der Aufgabe der unteren Ebene Kenntnisse zu Stabilitätsbereichen benötigt werden, ist die Betrachtung diskreter parametrischer Optimierungsaufgaben und die Berechnung ihrer Stabilitätsbereiche und erweiterten Lösungsmengen von Bedeutung. Es stellt sich also die Aufgabe, diese Mengen für möglichst viele diskrete parametrische Optimierungsaufgaben zu untersuchen.

5. Da viele praktische Probleme durch lineare Aufgaben modelliert werden, besteht insbesondere bei der Betrachtung von linearen Zwei-Ebenen–Problemen mit diskreter unterer Ebene ein großer Forschungsbedarf. Insbesondere stellt sich in diesem Zusammenhang die Frage nach einer Approximation der Menge $\operatorname{conv} \bigcup_{x \in \bar{X}} (\{x\} \times R(x))$.

# Literaturverzeichnis


[1] B. Bank et al. (1982) Non-Linear Parametric Optimization, Akademie-Verlag, Berlin

[2] J.F. Bard (1998) Practical Bilevel Optimization - Algorithms and Applications, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht

[3] J.F. Bard, J.T. Moore (1992) An algorithm for the discrete bilevel programming problem, Naval Research Logistics, vol. 39, pp. 419-435

[4] K.H. Borgwardt (2001) Optimierung, Operations Research, Spieltheorie: Mathematische Grundlagen, Birkhäuser Verlag, Basel

[5] H. Calvete, C. Galé (1997) The bilevel linear/linear fractional programming problem, European Journal of Operational Research, vol. 114, pp. 118-197

[6] S. Dempe (2002) Foundations of Bilevel Programming, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht

[7] S. Dempe (2003) Annotated bibliography on bilevel programming and mathematical programs with equilibrium constraints, Optimization, vol. 52, pp. 333-359

[8] S. Dempe, V. Kalashnikov, R.Z. Ríos-Mercado (2005) Discrete bilevel programming: application to a natural gas cash-out problem, European Journal of Operational Research, vol. 166(2), pp. 469-488

[9] S. Dempe, K. Richter (2000) Bilevel programming with knapsack constraints, Central European Journal of Operations Research, vol. 8, pp. 93-107

[10] S. Dempe, T. Unger (1999) Generalized $PC^1$-functions, Optimization, vol. 46, pp. 311-326

[11] T.A. Edmunds, J.F. Bard (1992) An algorithm for the mixed-integer nonlinear bilevel programming problem, Annals of Operations Research, vol. 34, pp. 149-162

[12] D. Fanghänel (2006) Optimality criteria for bilevel programming problems using the radial subdifferential, In: S. Dempe, V. Kalashnikov, editors, Optimization with Multivalued Mappings: Theory, Application and Algorithms, pp. 73-95, Springer-Verlag, Berlin

[13] J.-B. Hiriart-Urruty, C. Lemaréchal (1993) Convex Analysis and Minimization Algorithms I, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg

[14] R.H. Jan, M.S. Chern (1994) Nonlinear integer bilevel programming, European Journal of Operational Research, vol. 72, pp. 574-587

[15] V.V. Kalashnikov, R.Z. Ríos-Mercado (2001) A penalty-function approach to a mixed-integer bilevel programming problem, In: C. Zozaya et al., editors, Proceedings of the 3rd International Meeting on Computer Science, Aguascalientes, Mexico, vol. 2, pp. 1045-1054

[16] Yu.A. Kochetov, A.W. Plyasunov (2002) Choice problem for series of goods under partial external financing (Russ.), Diskretn. Anal. Issled. Oper., series 2, vol. 9(2), pp. 78-96

[17] E. L. Lawler (1979) Fast approximation algorithms for knapsack problems, Mathematics of Operations Research, vol. 4(4), pp. 339-356

[18] S. Martello, P. Toth (1990) Knapsack Problems, John Wiley & Sons Ltd, Chichester

[19] J.T. Moore, J.F. Bard (1990) The mixed integer bilevel programming problem, Operations Research, vol. 38(5), pp. 911-921

[20] A. Okabe et al. (1992) Spatial Tessellations: Concepts and Applications of Voronoi Diagrams, John Wiley & Sons Ltd, Chichester

[21] D. Pisinger, P. Toth (1998) Knapsack problems, In D. Z. Du, P. Pardalos, editors, Handbook of Combinatorial Optimization, pp. 1-89, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht

[22] O. A. Prokopyev et al. (2005) On multiple-ratio hyperbolic 0-1 programming problems, Pacific Journal of Optimization, vol. 1(2), pp. 327-345

[23] P. Recht (1993) Generalized Derivatives: An Approach to a New Gradient in Nonsmooth Optimization, volume 136 of Mathematical Systems in Economics, Anton Hain, Frankfurt am Main

[24] P. Recht, Universität Dortmund, Wirtschafts-und Sozialwissenschaftliche Fakultät: Private Kommunikation

[25] R.T. Rockafellar, R. Wets (1998) Variational Analysis, Springer-Verlag, Berlin

[26] H. Schmidt (1995) Zwei-Ebenen–Optimierungsaufgaben mit mehrelementiger Lösung der unteren Ebene, Dissertation, TU Chemnitz-Zwickau

[27] D. Thirwani, S.R. Arora (1997) An algorithm for the integer linear fractional bilevel programming problem, Optimization vol. 39, pp. 53-67

[28] L.N. Vicente, P.H. Calamai (1994) Bilevel and multilevel programming: A bibliography review, Journal of Global Optimization, vol. 5, pp. 291-306

[29] L.N. Vicente, G. Savard, J.J. Júdice (1996) The discrete linear bilevel programming problem, JOTA, vol. 89(3), pp. 597-614

[30] U.P. Wen, Y.H. Yang (1990) Algorithms for solving the mixed-integer two-level linear programming problem, Computers Opns. Res., vol. 17(2), pp. 133-142

[31] W. Zhao (2006) Stabilitätsbereiche bei diskreten konvexen Optimierungsaufgaben - Verallgemeinerte Voronoi-Gebiete, Bakkalaureusarbeit, TU Bergakademie Freiberg