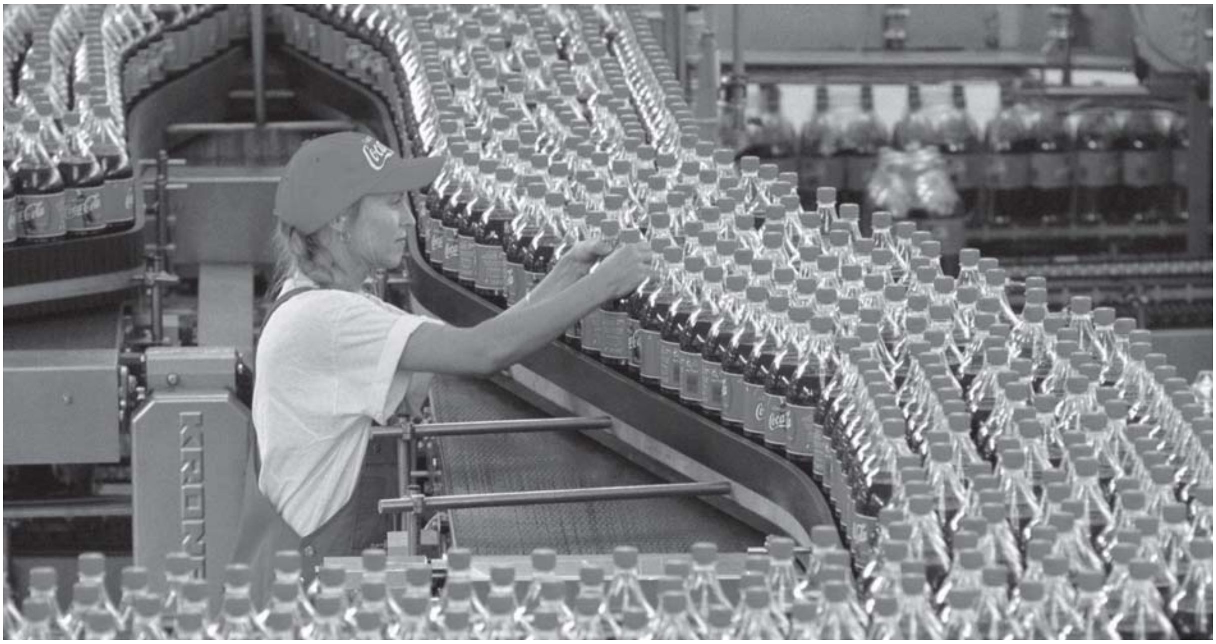
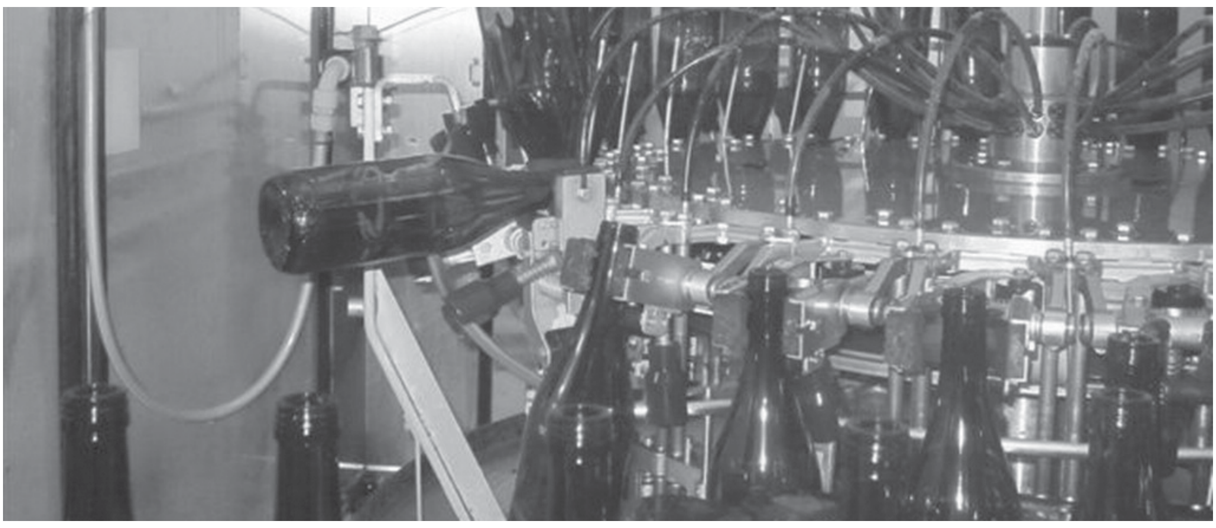


# Formulaciones y técnicas exactas
## de solución para el diseño óptimo de territorios comerciales

ROGER Z. RÍOS MERCADO*, MARÍA ANGÉLICA SALAZAR AGUILAR*, MAURICIO CABRERA RÍOS**



*Universidad Autónoma de Nuevo León, FIME.
**Universidad de Puerto Rico, Mayagüez.
Contacto: roger.rios@uanl.edu.mx

En el presente trabajo se aborda un problema de toma de decisiones que surge en el campo de diseño territorial como una aplicación de una empresa distribuidora de bebidas embotelladas. Puede decirse que el problema bajo estudio cae dentro del área de la investigación de operaciones, la ciencia que brinda soporte científico a problemas de toma de decisiones.

El problema consiste en determinar una agrupación de manzanas o unidades básicas (UB), dentro de un área geográfica objetivo, en un número fijo de territorios (dado por *p*), de tal manera que se cumpla una serie de requerimientos de planificación impuestos por la empresa. Denominamos al problema como TDP (por sus siglas en inglés, *Territory Design Problem*).

El problema que se estudia en este trabajo fue introducido por Ríos-Mercado y Fernández,[1] que desarrollaron un procedimiento de solución basado en un procedimiento metaheurístico, denominado GRASP reactivo (por sus siglas en inglés, *Greedy Randomized Adaptive Search Procedure*). En su trabajo, la compacidad se modeló a través de la función objetivo del problema de *p*-centro, el cual representa la máxima dispersión en los territorios. Consideraron restricciones de balance en términos de número de clientes, volumen de ventas y carga de trabajo.

Los resultados reportados fueron mejores que los generados por la compañía, que lo hacía con un método *ad hoc*. Diferentes versiones del problema se estudiaron en Caballero-Hernández *et al.*,[2] Ríos-Mercado y Salazar-Acosta, [3] Salazar-Aguilar *et al.*,[4] Ríos-Mercado y López-Pérez[5] y López-Pérez y Ríos-Mercado.[6] En cada uno de ellos se desarrollaron enfoques heurísticos para instancias de tamaño grande, las cuales son intratables para propósitos de optimización exacta.

En efecto, detectamos que en trabajos previos no se había reportado algún esquema de solución exacta para estos modelos, sólo procedimientos heurísticos. Sin embargo, instancias de tamaño pequeño y mediano con frecuencia aparecen en situaciones reales y, por ello, sus soluciones exactas se consideran importantes. Entonces, una de las contribuciones importantes de este trabajo es el desarrollo de un método de optimización exacta que maneje de manera efectiva el número exponencial de restricciones de conexidad en instancias pequeñas y medianas.

Por otro lado, en los problemas de diseño de territorios, los modelos que incorporan restricciones de conexidad usualmente son estudiados con heurísticas, como se analizó en Kalcsics *et al.*[7] Son pocos los trabajos que realmente proveen soluciones óptimas. Dos ejemplos son Garfinkel y Nemhauser [8] y Shirabe.[9] Los primeros estudiaron un problema de distritos con 39 UB y siete territorios, mientras que el último propuso un método de solución para un problema similar, utilizando 48 UB y un número variable de territorios. El método propuesto en Shirabe[9] se probó sólo en un número pequeño de territorios.

Nuestro trabajo presenta contribuciones en dos direcciones. La primera consiste en un procedimiento de optimización exacta, como se mencionó anteriormente. El algoritmo propuesto está orientado hacia la solución de instancias de tamaño mediano (alrededor de 200 UB para formar hasta diez territorios). El algoritmo consiste en la solución iterativa de un problema de programación lineal entera mixta (MILP), mediante la relajación de las restricciones de conexidad. Las restricciones no satisfechas se identifican a través de la solución de un problema de separación simple. Después de esto, tales restricciones se introducen como cortes al modelo. El procedimiento continúa hasta que se alcanza optimalidad.

En la segunda dirección, se propone una nueva formulación de programación cuadrática entera (IQP). Esta formulación realmente reduce el número de variables binarias, permitiendo la solución de instancias más grandes que aquellas permitidas por el MILP equivalente. El procedimiento de optimización exacta se prueba con ambas formulaciones (MILP e IQP).

También se presenta un estudio empírico acerca de la compacidad de los territorios sobre un rango amplio de instancias, para explicar qué tipo de medidas de dispersión tiene el potencial de brindar las mejores soluciones para el problema de diseño de territorios comerciales. En el diseño de territorios, en general, no hay una medida estándar de compacidad. Se pueden encontrar diferentes tipos de medidas de dispersión, según la aplicación específica. En el contexto de distritos políticos, por ejemplo, hay algunos estudios en medidas de compacidad en Altman.[10] Este criterio también es discutido por Kalcsics *et al.*,[9] desde una perspectiva más general. Por tanto, en la ausencia de una medida estándar para el caso del diseño de territorios comerciales, realizamos el trabajo experimental sobre un amplio rango de instancias, con el fin de analizar el desempeño de los modelos basados en la medidas del *p*-centro y *p*-mediana.

**Descripción del problema**

Sea $G = (V, E)$ un grafo donde $V$ es el conjunto de UB –manzanas en este caso–, y $E$ el conjunto de arcos que representan adyacencia entre manzanas. Cada nodo $j$ en el conjunto $V$ tiene una serie de parámetros, como coordenadas geográficas, y dos atributos o actividades: número de clientes y volumen de ventas. Se utiliza también una distancia euclidiana $d_{ij}$, que puede calcularse entre cada par de UB $i$ y $j$. El conjunto de UB debe dividirse en $p$ territorios, de tal manera que cada nodo pertenezca sólo a un territorio (asignación exclusiva). Adicionalmente, la compañía busca territorios balanceados con respecto al número de clientes y demanda de producto.

Definimos el tamaño de un territorio $X$, con respecto a la actividad $a$, como la suma de los valores de actividad $a$ asociados a las unidades básicas que conforman el territorio ($=w_a(X)$). Debido a la estructura discreta del problema y a la restricción de asignación exclusiva, es prácticamente imposible tener territorios perfectamente balanceados, es decir, territorios con exactamente el mismo tamaño con respecto a cada actividad. Entonces, con el fin de modelar el balance, se introduce un parámetro de tolerancia $\tau^a$. Este parámetro mide la desviación relativa, con respecto al tamaño deseado en la actividad $a$, $a \in A$. El valor deseado representa el tamaño promedio de los territorios, y está dado por $\mu^a = w^a(V)/p$. Otra restricción importante es la de conexidad, es decir, por cada $i$ y $j$ asignados al mismo territorio debe existir una ruta entre ellos, y ésta debe estar totalmente contenida en el territorio. Además, con el fin de lograr compacidad, las UB del mismo territorio deben estar tan cerca una de la otra como sea posible. Una forma de cumplir con este requerimiento es minimizando una medida de dispersión. En la bibliografía se han utilizado varias medidas, en este trabajo estudiamos dos: una basada en el objetivo del problema de *p*-centro (*p*CP), y la otra basada en el objetivo del problema *p*-mediana (*p*MP). Esto conduce a dos modelos diferentes que se describen a continuación.

**Modelos de optimización lineal**

Para presentar el modelo, definamos primero al conjunto $N^i$ para todo $i$ en $V$, como el conjunto de todas las UB adyacentes a la UB $i$, es decir,

$$N^i = \{ j \in V : (i, j) \in E \vee (j, i) \in E \}$$

Las variables de decisión se definen como:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si la UB } i \text{ es asignada al territorio} \\ & \text{con centro en } j \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Nótese que $x_{ii} = 1$ implica que la UB $i$ es un centro territorial. El modelo matemático MTDP (TDP basado en $p$-mediana) se define a continuación.

$$\text{(MTDP)} \quad \text{minimizar} \quad z = \sum_{j \in V} \sum_{i \in V} d_{ij} x_{ij} \tag{1}$$

$$\text{sujeta a} \quad \sum_{i \in V} x_{ii} = p \tag{2}$$

$$\sum_{i \in V} x_{ij} = 1 \quad j \in V \tag{3}$$

$$\sum_{j \in V} w_j^a x_{ij} \geq (1 - \tau^a) \mu^a x_{ii} \quad i \in V, a \in A \tag{4}$$

$$\sum_{j \in V} w_j^a x_{ij} \leq (1 + \tau^a) \mu^a x_{ii} \quad i \in V, a \in A \tag{5}$$

$$\sum_{j \in \bigcup_{v \in S} N^v \setminus S} x_{ij} - \sum_{j \in S} x_{ij} \geq 1 - |S| \tag{6}$$

$$i \in V, S \subset V \setminus (N^i \cup \{i\})$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \quad i, j \in V \tag{7}$$

El objetivo (1) representa una medida de dispersión basada en el objetivo del $p$MP. En este sentido, minimizar dispersión es equivalente a maximizar compacidad. La restricción (2) garantiza la creación de exactamente $p$ territorios. Las restricciones (3) representan la asignación exclusiva de las UB. Las restricciones (4)-(5) representan el balance con respecto a cada actividad y establecen que el tamaño de cada territorio debe estar dentro de un rango de variación (determinado por $\tau^a$), con respecto al tamaño promedio. La conexidad de los territorios está dada por las restricciones (6). Estas últimas son similares a las restricciones de eliminación de subrutas (*subtours*) en el problema del agente viajero.

La cantidad de estas restricciones es un número exponencial, por lo cual escribirlas explícitamente resulta casi imposible. El método de solución propuesto genera de manera iterativa las restricciones de conexidad necesarias para encontrar una solución óptima del problema. Este modelo fue utilizado en Salazar-Aguilar, González-Velarde y Ríos-Mercado,[4] y puede verse como el problema $p$MP con múltiples restricciones de capacidad y restricciones adicionales (4)-(6). Cuando la medida de dispersión utilizada es el objetivo del $p$CP, la función objetivo (1) se reemplaza por la función (8). El modelo resultante se denomina CTDP y fue introducido en R.Z. Ríos Mercado y E. Fernández.[1]

$$z = \max_{i,j \in V} \{d_{ij} x_{ij}\} \tag{8}$$

Estos modelos pertenecen a la clase NP-duro.[1,4] Pruebas de complejidad para problemas similares en el contexto de distritos políticos pueden encontrarse en Altman.[10,11]

Ríos-Mercado y Fernández[1] propusieron un GRASP reactivo para el CTDP. Salazar-Aguilar *et al.*[4] propusieron una heurística para el MTDP. Sin embargo, hasta el momento no se han desarrollado métodos exactos para este problema. Cabe señalar que, aunque en teoría, las restricciones de conexidad pudieran ser escritas explícitamente, esto no tendría ningún sentido práctico, debido a su número exponencial. En este trabajo se propone un procedimiento de solución exacto para resolver el MTDP y el CTDP. En la fase de modelación estas restricciones no se escriben explícitamente, y se generan de manera iterativa dentro del algoritmo propuesto. Por tanto, el procedimiento se implementa de manera fácil en cualquier sistema de modelación algebraico y puede ser resuelto por cualquier optimizador MILP comercial. Denominemos como R_MTDP al modelo relajado, que se obtiene de relajar las restricciones (6) del MTDP. De manera similar, definimos el modelo relajado R_CTDP, como el resultante al eliminar

(6) en CTDP. En la tabla I se muestra el conjunto de restricciones que se utilizan en cada uno de los modelos propuestos.

Adicionalmente, en este trabajo introdujimos nuevas formulaciones matemáticas del problema, utilizando optimización cuadrática entera (IQP). El número de variables se redujo de $n^2$ a $2np$. Las formulaciones cuadráticas propuestas en este trabajo son las primeras formulaciones propuestas en la bibliografía para el problema estudiado. En el modelo cuadrático usamos los mismos parámetros que en el modelo lineal. Se define un conjunto adicional $Q = \{1, 2, \ldots, p\}$ de índices de territorios y un conjunto de variables binarias $y_{iq}$ para identificar los centros de los territorios, y $z_{jq}$, para representar la asignación de UB a territorios. Las variables de decisión para el modelo IQP se definen así:

$$z_{jq} = \begin{cases} 1 & \text{si la UB } j \text{ es asignada al territorio } q \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$y_{iq} = \begin{cases} 1 & \text{si la UB } i \text{ es asignada al territorio } q \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

De acuerdo con las definiciones anteriores, la equivalencia entre las variables utilizadas en el modelo lineal y las utilizadas en el cuadrático está dada por:

$$x_{ij} = \sum_{q \in Q} z_{jq} y_{iq} \tag{9}$$

El modelo QMTDP (*quadratic median-based territory design problem*) usa una medida de dispersión equivalente a la utilizada en el modelo MTDP. A continuación se muestra la formulación del modelo QMTDP:

$$\text{(QMTDP)} \quad \text{minimizar} \quad z = \sum_{q \in Q} \sum_{j \in V} \sum_{i \in V} d_{ij} z_{jq} y_{iq} \tag{10}$$

$$\text{sujeta a} \quad \sum_{i \in V} y_{iq} = 1 \quad q \in Q \tag{11}$$

$$\sum_{q \in Q} z_{jq} = 1 \quad j \in V \tag{12}$$

$$z_{jq} \geq y_{jq} \quad q \in Q, j \in V \tag{13}$$

$$\sum_{j \in V} w_j^a z_{jq} \geq (1 - \tau^a)\mu^a \quad q \in Q, a \in A \tag{14}$$

$$\sum_{j \in V} w_j^a z_{jq} \leq (1 + \tau^a)\mu^a \quad q \in Q, a \in A \tag{15}$$

$$\sum_{q \in Q} \sum_{j \in \bigcup_{v \in S} N^v \setminus S} z_{jq} y_{iq} - \sum_{q \in Q} \sum_{j \in S} z_{jq} y_{iq} \geq 1 - |S| \quad i \in V, S \subset V \setminus (N^i \cup \{i\}) \tag{16}$$

$$z_{jq} \in \{0,1\} \quad q \in Q, j \in V \tag{17}$$

$$y_{iq} \in \{0,1\} \quad q \in Q, i \in V \tag{18}$$

Las restricciones (11) se usan para garantizar la asignación de un centro por cada territorio. La asignación exclusiva está dada por las restricciones (12). El balance territorial se establece con las restricciones (14)-(15). Las restricciones (13) indican que una UB $j$ no puede ser centro del territorio $q$, si $j$ no pertenece al territorio $q$. El último conjunto de restricciones (16) garantiza la conexidad de los territorios. Nuevamente tenemos un número exponencial de estas restricciones.

Bajo esta formulación cuadrática, una medida de dispersión basada en el objetivo *p*CP está dada por (19). Entonces, el QCTDP (*quadratic center-based territory design problem*) es el modelo resultante al reemplazar la función objetivo (10) por la medida de dispersión (19).

$$\min \quad z = \max_{i, j \in V} \left\{ \sum_{q \in Q} z_{jq} y_{iq} \right\} \tag{19}$$

Cabe recalcar que estas formulaciones IQP son nuevas en la bibliografía de diseño de territorios. QMTDP es difícil de resolver, debido a que posee un objetivo cuadrático y un conjunto de restricciones cuadráticas (restricciones de conexidad). Adicionalmente, no es posible escribirlas explícitamente, debido a su número exponencial. Si las restricciones de conexidad se relajan, el modelo puede resolverse con cualquier optimizador para problemas MINLP.

Similar a la definición de los modelos relajados R_MTDP y R_CTDP, definimos R_QMTDP como la relajación de QMTDP, cuando las restricciones (16) son removidas del modelo. Claramente, una solución para R_QMTDP brinda una cota inferior para QMTDP.

Hay algunos casos especiales para los cuales el modelo puede ser reforzado, por ejemplo, cuando no hay soluciones factibles que contengan territorios formados por una sola UB. Es decir, cuando cada solución factible tiene territorios con al menos dos unidades básicas asociadas a él, la siguiente es una desigualdad válida para R_QMTDP.

$$\sum_{i \in N^j} z_{iq} \geq z_{jq} \quad q \in Q, j \in V \tag{20}$$

Estas desigualdades evitan la creación de subconjuntos no conexos $S$, tales que $|S|=1$. Existe un número polinomial de estos subconjuntos, así que estas desigualdades pueden incorporarse fácilmente al modelo.

Nótese que, para las formulaciones MILP, las desigualdades válidas equivalentes están dadas por:

$$\sum_{l \in N^j} x_{il} \geq x_{ij} \quad i \in V, j \in V \setminus \left(\{i\} \cup N^i\right) \tag{21}$$

En contraste con las desigualdades dadas en (20), que sólo son válidas cuando permanece la condición de territorios formados por más de una unidad básica, las restricciones (21) son válidas para cualquier instacia. Definamos entonces a R1_QMTDP como la relajación conformada por R_QMTDP más las restricciones de adicionales (20). De manera similar, definimos modelos relajados para el modelo QCTDP. Nos referimos a éstos como R_QCTDP y R1_QCTDP, respectivamente. Asimismo, para los modelos MTDP y CTDP se obtienen nuevos modelos relajados agregando (21) en los modelos relajados R_MTDP y R_CTDP. Los denominamos como R1_MTDP y R1_CTDP, respectivamente. Para una mejor definición de los modelo, véase la tabla I.

**Procedimiento de solución propuesto**

Una de las principales dificultades para obtener soluciones exactas para cualquiera de los modelos previamente descritos se debe al número exponencial de restricciones de conexidad. Como ya se mencionó, resulta prácticamente imposible escribir estas restricciones de manera explícita. Así que ideamos un procedimiento iterativo que utiliza ramificación y acotamiento (B&B) y un esquema de generación de cortes. La idea es relativamente simple. Al relajar las restricciones de conexidad, nos quedamos con un problema relajado que se puede resolver mediante B&B.

Después se verifica la conexidad de la solución obtenida para este problema relajado. Esta prueba

Tabla I. Modelos relajados asociados a los modelos MILP e IQP, respectivamente.

| Modelo | Objetivo | Restricciones |
|---|---|---|
| R_MTDP | (1) | (2)-(5) |
| R1_MTDP | (1) | (2)-(5) y (21) |
| R_CTDP | (8) | (2)-(5) |
| R1_CTDP | (8) | (2)-(5) y (21) |
| R_QMTDP | (10) | (11)-(13) |
| R1_QMTDP | (10) | (11)-(13) y (20) |
| R_QCTDP | (19) | (11)-(13) |
| R1_QCTDP | (19) | (11)-(13) y (20) |

de conexidad se realiza al resolver un problema de separación, el cual se resuelve polinomialmente con el algoritmo *breadth first search* (BFS, véase Cormen *et al.*[12]). Las desigualdades válidas correspondientes (restricciones de conexidad no satisfechas) se agregan al modelo relajado como cortes, y el procedimiento continúa hasta que no se encuentran más desigualdades sin satisfacer. El procedimiento de generación de cortes iterativo para resolver TDP (ICGP-TDP) se resume en el algoritmo 1 (figura 1).

**Algoritmo 1** ICGP-TDP($P, DispersionM, TModelo$)

**Entrada:**

$P$:=Instancia del TDP

$DispersionM$:= $p$CP o $p$MP

$TModelo$:= MILP o IQP

**Salida:** $X = (X_1, X_2, \ldots, X_p)$:= Una $p$-partición factible de $V$

$Cortes \leftarrow \emptyset$ {*Conjunto de cortes*}

$ModeloR \leftarrow$ GenerarModeloRelajado($P, DispersionM, TModelo$)

**Mientras**($Cortes \neq \emptyset$)

  **Si**($TModelo$ = MILP)

    $X \leftarrow$ ResolverMILP($ModeloR$)

  **Si no**

    $X \leftarrow$ ResolverIQP($ModeloR$)

  **Fin si**

  $Cortes \leftarrow$ ResolverProbSeparacion($P, X$)

  AgregarCortes($TModelo, Cortes$)

**Fin mientras**

**Regresar** $X$

Fig. 1. Procedimiento ICGP-TDP.

Para resolver los modelos relajados MILP, el método ResolverMILP en ICGP-TDP llama a algún método de B&B. En contraste, el método ResolverIQP llama, ya sea a un procedimiento exacto o a uno aproximado. En nuestro caso, utilizamos un método que garantiza optimalidad local (GAMS/DICOPT). Un tema para ser investigado es precisamente el costo-beneficio entre el tiempo de cómputo empleado y la calidad de la solución obtenida. Asumiendo que se utiliza un algoritmo finito para resolver los modelos relajados enteros (en ResolverMILP() o ResolverIQP()), la convergencia de nuestro algoritmo propuesto está garantizada, debido a que el problema de separación se resuelve en tiempo polinomial. Entonces, la convergencia del algoritmo se garantiza, debido a que hay un conjunto finito de restricciones de conexidad. Cuando éste se detiene, la última solución es factible, con respecto a las restricciones de conexidad y, por eso, es una solución óptima al problema.

## RESULTADOS COMPUTACIONALES

El método propuesto ICGP-TDP se codificó en C++, y se compiló con Sun C++ 8.0. Las relajaciones MILP se resuelven con CPLEX 11.2, y las relajaciones IQP con DICOPT, uno de los métodos más populares para resolver programas enteros mixtos no lineales. DICOPT fue desarrollado por Viswanathan y Grossmann en el Centro de Investigación de Diseño de Ingeniería (EDRC) en la Universidad Carnegie Mellon (véase Kocis y Grossmann[13] y Viswanathan y Grossmann,[14] para más detalles). Se utilizaron dos criterios de parada: por intervalo de optimalidad relativa (*gap* $\leq 5 \times 10^{-6}$) y por tiempo (7200 s).

Se utilizaron instancias generadas aleatoriamente, basadas en datos reales provenientes de la compañía. La topología de cada instancia se formó con el generador desarrollado por Ríos-Mercado y Fernández.[1] En este trabajo, los autores emplearon información histórica de la compañía, y obtuvieron la distribución de los datos asociados al número de clientes y volumen de venta. La compañía utiliza distancias euclidianas entre las unidades básicas calculadas en su Sistema de Información Geográfica (GIS). Consideramos una tolerancia de $\tau^{(a)}=0.05$, $a \in A$ y, generamos tres conjuntos de instancias diferentes con $(n,p) \in \{(60, 4), (80, 5), (100, 6)\}$. Para cada uno de estos conjuntos se generaron 20 instancias diferentes. Adicionalmente, se generaron diez instancias diferentes de dos conjuntos más grandes con $(n,p) \in \{(150, 8), (200, 11)\}$.

En primera instancia, trabajamos con los modelos lineales, CTDP y MTDP. El procedimiento ICGP-TDP se utilizó con los modelos relajados R_CTDP y R_MTDP, respectivamente.

Las tablas II y III muestran los resultados para CTDP y MTDP, respectivamente. La primera columna indica el tamaño de la instancia probada. La segunda columna muestra el porcentaje de instancias que fueron resueltas en la primera iteración (hasta 20 excepto para el conjunto (150, 8)), esto es, el porcentaje de instancias para las cuales se encontró una partición conexa en la primera iteración. La tercera columna contiene el promedio y el máximo número de iteraciones/instancia requeridas por el algoritmo. La cuarta columna muestra el porcentaje de instancias resueltas dentro del tiempo límite especificado. La quinta columna muestra el promedio y el máximo número de cortes agregados por instancia resuelta. Finalmente, la última columna muestra información del tiempo de CPU (promedio y máximo) utilizado por instancia.

Para el modelo CTDP, la tabla II indica que una proporción muy pequeña de las instancias se resolvieron en la primera iteración. Hasta 26 iteraciones y 82 cortes fueron necesarios en el peor de los casos para resolver problemas de tamaño (60, 4). Al final

Tabla II. Resultados reportados por ICGP-TDP para CTDP bajo la relajación R_CTDP.

| Tamaño | Resulto en | Iteraciones | | Resuelto | Cortes/inst | | Tiempo (s) | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $(n,p)$ | 1ra iter (%) | Prom | Max | (%) | Prom | Max | Prom | Max |
| (60,4) | 20 | 5.3 | 26 | 100 | 12.1 | 82 | 381 | 1446 |
| (80,5) | 10 | 5.4 | 14 | 90 | 12.4 | 43 | 2682 | 7200 |
| (100,6) | 10 | 2.3 | 11 | 40 | 3.5 | 32 | 5812 | 7200 |
| (150,8) | 0 | - | - | 0 | - | - | 7200 | 7200 |

Tabla III: Resultados reportados por ICGP-TDP para MTDP bajo la relajación R_MTDP.

| Tamaño | Resulto en | Iteraciones | | Resuelto | Cortes/inst | | Tiempo (s) | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $(n,p)$ | 1ra iter (%) | Prom | Max | (%) | Prom | Max | Prom | Max |
| (60,4) | 80 | 1.4 | 6 | 100 | 0.5 | 5 | 7 | 33 |
| (80,5) | 70 | 1.4 | 4 | 100 | 0.5 | 4 | 53 | 235 |
| (100,6) | 75 | 1.4 | 4 | 100 | 0.5 | 4 | 95 | 438 |
| (150,8) | 75 | 1.8 | 5 | 80 | 1.6 | 6 | 1900 | 7200 |

del procedimiento, todas las instancias de (60, 4) se resolvieron a optimalidad; 90% del conjunto (80, 5) se resolvió a optimalidad. Sin embargo, el procedimiento tuvo dificultad con los conjuntos más grandes. Para los dos conjuntos más pequeños se necesitaron en promedio alrededor de cinco iteraciones y doce cortes. Nótese que, para una iteración específica, el problema de separación tiene la propiedad de identificar más de un subconjunto no conexo, y genera todas las restricciones de conexidad no satisfechas en la misma iteración. Para el conjunto (150, 80), el procedimiento no pudo terminar una sola iteración dentro del límite de tiempo.

Estos estadísticos mejoran significativamente para el modelo MTDP (tabla II). Excepto por muy pocos casos en los conjuntos más grandes, todas las demás instancias se resolvieron a optimalidad. Una gran proporción de éstas se resolvió en la primera iteración. En promedio, requirió menos de dos iteraciones y muy pocos cortes para obtener soluciones óptimas. Esto no sólo sugiere que la relajación LP del modelo basado en mediana es más difícil que la del modelo basado en centros, sino que las soluciones para la relajación R_MTDP producen soluciones prácticamente conexas. Esto tiene un impacto positivo en el tiempo total de solución.

Posteriormente, se analizó el comportamiento de los modelos de optimización IQP. Observamos que el tiempo necesario para resolver los modelos cuadráticos es menor que el tiempo requerido para resolver los modelos lineales. Sin embargo, resolver el modelo cuadrático con métodos de optimización local no asegura optimalidad global. Por esto, un tema importante para analizarse fue precisamente el balance entre la calidad de la solución y el esfuerzo computacional. Para ello, aplicamos ICGP-TDP con los modelos MTDP y QMTDP, usamos 20 instancias de los conjuntos {(60, 4), (80, 5), (100, 6)} y 10 del conjunto (150, 8).

La tabla IV muestra la calidad de las soluciones encontradas mediante la optimización del modelo QMTDP. En estos conjuntos de instancias, el tiempo computacional no es un problema; sin embargo, para instancias más grandes (mostradas en la tabla V), el tiempo llega a ser un factor sumamente importante. En la tabla V se muestra cómo el tiempo incrementa significativamente para el modelo MILP. Hay dos instancias en las que se alcanzó el tiempo límite cuando se utilizó el modelo MILP. Cuando se usó el modelo cuadrático, todas las instancias se resolvieron en un minuto de tiempo de CPU, con intervalos de optimalidad de menos de 5% en 90% de las instancias. Por tanto, el modelo cuadrático es una alternativa rápida y atractiva para encontrar soluciones de calidad para instancias grandes del problema.

Tabla IV. Calidad de las soluciones reportadas para el modelo QMTDP.

| Tamaño $(n, p)$ | Gap (%) Min | Prom | Max |
|---|---|---|---|
| (60,4) | 0.00 | 2.75 | 14.80 |
| (80,5) | 0.01 | 2.61 | 8.15 |
| (100,6) | 0.06 | 3.14 | 7.56 |
| (150,8) | 0.05 | 3.13 | 10.39 |

Adicionalmente se analizó el comportamiento de los modelos basados en la medida de dispersión *p*CP, observamos que el tiempo computacional en ambas formulaciones, CTDP y QCTDP, es extremadamente costoso. La descripción detallada y resultados computacionales completos están ampliamente descritos en Salazar Aguilar.[15]

Tabla V. MTDP vs. QMTDP para instancias (200, 11).

| Inst | Valor Objetivo MTDP | QMTDP | Gap (%) | Tiempo (sec) MTDP | QMTDP |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 10422.01 | 11523 | 10.56 | 1116 | 28 |
| 2 | (*) 10646.14 | 11425 | 7.32 | 7200 | 966 |
| 3 | 10846.77 | 11443 | 5.50 | 1468 | 7200 |
| 4 | (*) 11122.03 | 11443 | 2.89 | 7200 | 3618 |
| 5 | (*) 10878.12 | 11097 | 2.01 | 7200 | 1193 |
| 6 | (*) 10499.29 | 10746 | 2.35 | 7200 | 1871 |
| 7 | (*) 11061.00 | 11686 | 5.65 | 7200 | 1088 |
| 8 | 10659.51 | 11205 | 5.12 | 2641 | 592 |
| 9 | (*)11470.29 | 11648 | 1.55 | 7200 | 1263 |
| 10 | 11043.82 | 11780 | 6.67 | 1211 | 2349 |

## CONCLUSIONES

En este trabajo propusimos nuevos modelos cuadráticos (IQP) para el problema de diseño de territorios comerciales, con restricciones de conexidad y múltiples restricciones de balance. Estas formulaciones IQP utilizan un número más pequeño de variables binarias. Además, desarrollamos un procedimiento de solución exacta (ICGP-TDP) con base en B&B y una estrategia de generación de cortes. El método puede aplicarse a ambos modelos, MILP e IQP. Éste es el primer algoritmo exacto desarrollado a la fecha para tal problema. Los modelos se reforzaron con la introducción de desigualdades válidas que eliminan los subconjuntos no conexos de cardinalidad uno. Observamos, de manera empírica, que la mayoría de los subconjuntos no conexos encontrados en los modelos relajados (relajando las restricciones de conexidad) tienen cardinalidad igual a 1, lo cual motivó la introducción de estas desigualdades válidas. Empíricamente, probamos que en los modelos MTDP y QMTDP los cortes propuestos aceleran la convergencia del algoritmo propuesto. Cuando el método de solución se aplicó para resolver instancias con los modelos lineales y cuadráticos, los modelos IQP propuestos mostraron un desempeño balanceado entre calidad y esfuerzo. Para las instancias más grandes, los tiempos de ejecución de los modelos cuadráticos fueron significativamente más bajos que los observados con los modelos lineales. La calidad de solución de las obtenidas con el modelo cuadrático sobre todas las instancias estuvo en el rango de 0.0-14.8%, y, en el mejor de los casos, menor que 5%.

Se observó que el objetivo de *p*MP es más amigable que el objetivo *p*CP. Durante el proceso de B&B, la relajación lineal para el objetivo *p*MP mostró mejor desempeño que la relajación lineal para el objetivo *p*CP. Además, también se observó que las soluciones obtenidas de la relajación de los modelos basados en *p*-mediana tienen un grado muy alto de conexidad. Esto tuvo un impacto muy bueno en la eficiencia computacional, ya que se necesitaron muy pocas iteraciones para encontrar las soluciones conexas a diferencia de los modelos basados en *p*-centro. Por tanto, en la ausencia de una medida de dispersión estándar, el objetivo *p*MP podría ser una buena elección para otro problema de diseño de territorios que tenga la compacidad como medida de desempeño.

## AGRADECIMIENTOS

El trabajo de M. Angélica Salazar Aguilar fue apoyado por la Universidad Autónoma de Nuevo León (proyecto NL-2006-C09-32652), mediante una beca de estudios de doctorado. La infraestructura requerida para la elaboración del mismo, así como el financiamiento para la presentación del trabajo en foros internacionales fue posible gracias a UANL-Paicyt CA1478-07 y UANL-Paicyt CE012-09; SEP-Conacyt 48499-Y y SEP-Conacyt 61343; y al Tecnológico de Monterrey (CAT128).

## RESUMEN

En este trabajo se estudió el problema de diseño de territorios comerciales. Se propusieron modelos, desigualdades válidas y procedimientos de solución para el diseño óptimo de territorios comerciales para una situación presente en una empresa distribuidora de bebidas embotelladas. Los resultados de esta investigación contribuyen significativamente al estado del arte en el área de diseño de territorios. Los modelos y métodos propuestos para este problema superan el desempeño de los mejores métodos existentes a la fecha.

**Palabras clave**: Diseño de territorios, Programación cuadrática no lineal entera, Desigualdades válidas, Ramificación y acotamiento.

## ABSTRACT

In this work, we address the problem of computing optimal territory designs for a beverage distribution company. New models, valid inequalities, and solution methods have been proposed in this research. The results contribute significantly to the state of the art in the field of territory design. Empirical evidence shows the significant impact of the proposed models and algorithms which outperformed significantly the best solution methods known to date.

**Keywords:** Territory design, Non-linear integer quadratic programming, Valid inequalities, Branch and bound.

## REFERENCIAS


1. R.Z. Ríos-Mercado y E. Fernández. A reactive GRASP for a commercial territory design problem with multiple balancing requirements. *Computers & Operations Research*, 36(3):755–776, 2009.
2. S.I. Caballero-Hernández, R.Z. Ríos-Mercado, F. López y E. Schaeffer. Empirical evaluation of a metaheuristic for commercial territory design with joint assignment constraints. En J. E. Fernández, S. Noriega, A. Mital, S. E. Butt y T. K. Fredericks (editores), *Proceedings of the 12th Annual International Conference on Industrial Engineering Theory, Applications, and Practice (IJIE)*, pp. 422–427, ISBN: 978-0-9654506-3-8. Cancún, México, Noviembre 2007.
3. R.Z. Ríos-Mercado y J.C. Salazar-Acosta. A GRASP with strategic oscillation for a commercial territory design problem with a routing budget constraint. En I. Batyrshin y G. Sidorov (editores), *Advances in Soft Computing, Part II,* Lecture Notes in Artificial Intelligence, Vol. 7095, pp. 307-318, ISBN: 978-3-642-25330-0. Springer, Heidelberg, Alemania, 2011.
4. M.A. Salazar-Aguilar, J.L. González-Velarde y R.Z. Ríos-Mercado. A divide-and-conquer approach to commercial territory design. *Computación y Sistemas*, 16(3):309-320, 2012.
5. R.Z. Ríos-Mercado y J.F. López-Pérez. Commercial territory design planning with realignment and disjoint assignment requirements. *Omega*, 41(3):525-535, 2013.
6. J.F. López-Pérez y R.Z. Ríos-Mercado. Embotelladoras ARCA uses operations research to improve territory design plans. *Interfaces*, aceptado.
7. J. Kalcsics, S. Nickel y M. Schroder. Towards a unified territorial design approach: Applica- tions, algorithms, and GIS integration. *TOP*, 13(1):1–56, 2005.
8. R.S. Garfinkel y G.L. Nemhauser. Solving optimal political districting by implicit enumeration techniques. *Management Science*, 16(8):B495–B508, 1970.
9. T. Shirabe. Districting modeling with exact contiguity constraints. *Environment and Planning B: Planning and Design*, 36(6):1053–1066, 2009.
10. M. Altman. *Districting Principles and Democratic Representation*. Disertación doctoral, California Institute of Technology, Pasadena, EUA, 1998.
11. M. Altman. The computational complexity of automated redistricting: Is automation the answer? *Rutgers Computer & Technology Law Journal*, 23(1):81–142, 1997.
12. T.H. Cormen, C.E. Leiserson y R.L. Rivest. *Introduction to Algorithms.* MIT Press, Cambridge, EUA, 1990.
13. G.R. Kocis y I.E. Grossmann. Computational experience with DICOPT solving MINLP problems in process systems engineering. *Computers and Chemical Engineering*, 13(3):307–315, 1989.
14. J. Viswanathan e I.E. Grossmann. A combined penalty function and outer approximation method for MINLP optimization. *Computers and Chemical Engineering*, 14(7):769–782, 1990.
15. M.A. Salazar-Aguilar. *Models, Algorithms, and Heuristics for Multiobjective Commercial Territory Design*. Disertación doctoral, Posgrado en Ingeniería de Sistemas, FIME, UANL, San Nicolás de los Garza, México, 2010.


*Recibido: 16 de octubre de 2012*
*Aceptado: 18 de enero de 2013*